

# Arbeiten mit komplexen Zahlen

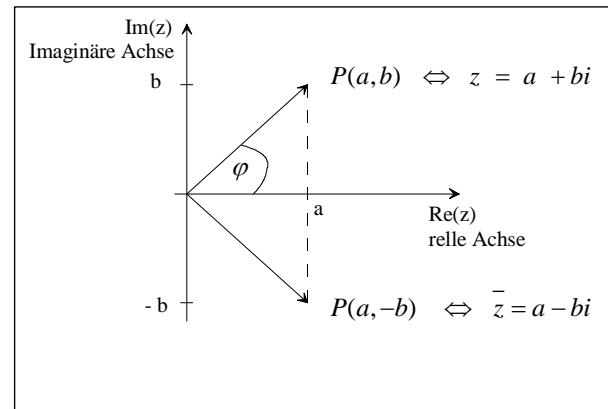
## Arithmetische Form

(In dieser Form sollen alle Endergebnisse von Rechnungen in  $\mathbb{C}$  dargestellt werden!)

$$z = a + bi \Leftrightarrow \bar{z} = a - bi$$

$$|z|^2 = a^2 + b^2; \quad i^2 = -1$$

- addiere Real- und Imaginärteile separat
- multipliziere/potenzieren wie bei Binomen (Klammern setzen und beachten!)
- dividiere durch Erweitern mit  $\bar{z}$
- kein Wurzelziehen



$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \phi = \arctan \frac{b}{a};$$

**Quadranten beachten!**

$$a = r \cos \phi; \quad b = r \sin \phi$$

## Trigonometrische Form

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \Leftrightarrow \bar{z} = r(\cos(-\phi) + i \sin(-\phi))$$

- keine Addition/Subtraktion
- Multiplikation: multipliziere Beträge und addiere Argumente
- Division: dividiere Beträge und subtrahiere Argumente
- Potenzieren: Satz von Moivre:  
 $(r(\cos \phi + i \sin \phi))^n = r^n(\cos n\phi + i \sin n\phi)$

- Wurzelziehen:  $\sqrt[n]{z}$  :

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\phi + k * 2\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + k * 2\pi}{n} \right)$$

$$k = 0, 1, \dots, n - 1$$

$$\phi = \phi; \quad r = r$$

## Exponentielle Form

$$z = r e^{i\phi}, \text{ wobei gilt } e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

- Rechenarten wie bei trigonometr. Form
- Potenzgesetze sind anwendbar
- Verkürzung der Schreibweise durch Nutzung der Potenzschreibweise

# Einige Regeln zur Lösung algebraischer Gleichungen n-ten Grades

Zu lösen sei die Gleichung:  $g_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

## Dann gelten u.a. folgende Regeln:

R1) Alle reellen Lösungen liegen im Intervall  $[-r; +r]$  mit

$$r = \frac{|a_n| + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \dots + |a_2| + |a_1| + |a_0|}{|a_n|}$$

R2) Ist  $s_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 + a_0 = 0$ , so hat die Gleichung die Lösung  $x_1 = 1$ .

R3) Ist  $a_0 = 0$ , so hat die Gleichung die Lösung  $x_1 = 0$ .

R4) Hat die Gleichung ganzzahlige Koeffizienten  $a_k, \forall k = 0, 1, \dots, n$ , so gilt:

Wenn die Gleichung ganzzahlige Wurzeln (Lösungen) besitzt, dann müssen sie Teiler des Absolutgliedes  $a_0$  sein.

R5) **Vor.:** Gleichung hat nur reelle Koeffizienten  $a_k, \forall k = 0, 1, \dots, n$ .

Hat die Gleichung die komplexe Lösung  $z = a + b \cdot j$ , so ist auch die zu ihr konjugiert-komplexe Zahl  $z^* = a - b \cdot j$  Lösung,

d. h., komplexe Wurzeln treten stets paarweise auf.

R6) Gilt für zwei Werte  $x_1, x_2$  mit  $x_1 < x_2$ , dass  $g_n(x_1) < 0$  und  $g_n(x_2) > 0$  bzw.  $g_n(x_1) > 0$  und  $g_n(x_2) < 0$ , so hat die Gleichung eine Lösung  $x_0$  mit  $x_1 < x_0 < x_2$ .

R7) Weisen alle  $b_j, \forall j = 0, 1, \dots, n-1$ , und  $r_0$  der dritten Zeile des HORNER-Schemas

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & \downarrow & & & & & & \\
 x_1 & \nearrow & x_1 b_{n-1} & x_1 b_{n-2} & \dots & x_1 b_2 & x_1 b_1 & x_1 b_0 \\
 \hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_1 & b_0 & r_0 = g_n(x_1)
 \end{array}$$

für positives  $x_1$  gleiche Vorzeichen auf, so existieren keine weiteren Lösungen für noch größere Werte, also für  $x > x_1$ .

R8) Weisen alle  $b_j, \forall j = 0, 1, \dots, n-1$ , und  $r_0$  der dritten Zeile des HORNER-Schemas negatives  $x_1$  wechselnde Vorzeichen auf, so existieren keine weiteren Lösungen für noch kleinere Werte, also für  $x < x_1$ .

R9) Hat die Gleichung keine ganzzahligen Lösungen, so muss ein Näherungsverfahren angewandt werden (z. B. Halbierungsverfahren, Regula falsi, Newtonverfahren).

## Der Gauß'sche Algorithmus – Anleitung zum Handrechnen

Schreibe die Koeffizienten und die rechte Seite des LGS unter Beachtung der Nullen in ein rechteckiges Tableau entsprechend Vorlesung. Das ist die erweiterte Systemmatrix.

1. Betrachte die erweiterte Systemmatrix  $(A|b)$  als Arbeitsblock.
2. Tausche im Arbeitsblock die Zeilen so, dass das linke obere ECKelement (Pivotelement) von Null verschieden ist. Sollte das unmöglich sein, versuche es mit den Spalten von A und merke die neue Reihenfolge der Variablen.  
Wird kein von Null verschiedenes Pivotelement gefunden  $\Rightarrow$  Stopp.

Hinweis/1: Günstig zum Rechnen sind als Pivotelemente die Zahlen 1 oder -1

Hinweis/2: Befindet sich unter den Koeffizienten ein Parameter, so sind die Zeilen so zu tauschen, dass das Pivotelement den obigen Anforderungen genügt und die Zeile mit dem Parameter im Arbeitsblock möglichst weit nach unten getauscht wird.

3. Teile die Elemente der 1. Zeile des Arbeitsblockes durch das Pivotelement.

Hinweis/3: Sollten sich dadurch unangenehme Brüche ergeben, bilde das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Elemente der ersten Spalte des Arbeitsblockes und multipliziere die Zeilen des Arbeitsblockes mit den entsprechenden Faktoren, so dass in der 1. Spalte in allen Zeilen das kgV oder „0“ steht.

4. Ist das Pivotelement die Zahl 1, so multipliziere die 1. Zeile des Arbeitsblockes jeweils mit den ersten Elementen der anderen Zeilen des Arbeitsblockes und subtrahiere sie von diesen anderen Zeilen. Damit ergeben sich in der 1. Spalte des Arbeitsblockes unter dem Pivotelement Nullen. (Rechenkontrolle, Rechenziel!!)

Wurde in der 1. Spalte des Arbeitsblockes zum kleinsten gemeinsamen Vielfachen übergegangen, so subtrahiere die 1. Zeile des Arbeitsblockes jeweils von den anderen Zeilen.

Allgemein:

Berechne elementweise  $\text{Arbeitszeile/neu} = \text{Arbeitszeile/alt} - \text{Faktor} \cdot \text{Pivotzeile}$

Ziel: Wert „0“ in 1. Spalte des Arbeitsblockes außer dem Pivotelement!

5. **Verkleinere den Arbeitsblock** um je eine Zeile und Spalte von oben bzw. von links.
6. Wiederhole die Vorschrift ab Punkt 2 bis die gesamte Matrix abgearbeitet oder ein Abbruch bei Punkt 2 eingetreten ist.

Wurde ein Spaltentausch im Arbeitsblock nötig, ist bei der Rückrechnung die neue (gemerkte) Variablenreihenfolge zu beachten.

Auf der nächsten Seite finden Sie ein Beispiel, das mit den beiden unterschiedlichen Rechenarten in den Schritten 3 und 4 berechnet wurde:

x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	b	
0	3	6	3	Schritt 1
2	4	6	2	
-4	-8	-12	12	
2	4	6	2	Schritt 2
0	3	6	3	
-4	-8	-12	12	
1	2	3	1	Schritt 3
0	3	6	3	
-4	-8	-12	12	
Schritt 4: Zeile 3 - (-4)* Zeile 1 ergibt				
1	2	3	1	
0	3	6	3	
0	0	0	16	
1	2	3	1	Schritt 5,2
0	3	6	3	
0	0	0	16	
1	2	3	1	Schritt 3,4
0	1	2	1	
0	0	0	16	
1	2	3	1	Schritt 5,2 Stopp
0	1	2	1	
0	0	0	16	

x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	b	
0	3	6	3	Schritt 1
2	4	6	2	
-4	-8	-12	12	
2	4	6	2	Schritt 2
0	3	6	3	
-4	-8	-12	12	
-4	-8	-12	-4	Schritt 3
0	3	6	3	
-4	-8	-12	12	
Schritt 4: Zeile 3 – Zeile 1 ergibt				
-4	-8	-12	-4	
0	3	6	3	
0	0	0	16	
-4	-8	-12	-4	Schritt 5,2
0	3	6	3	
0	0	0	16	
-4	-8	-12	-4	Schritt 3,4
0	3	6	3	
0	0	0	16	
-4	-8	-12	-4	Schritt 5,2 Stopp
0	3	6	3	
0	0	0	16	

## Kurvendiskussion / Arbeitsanleitung

### 1. Definitionsgebiet $D_f$ :

Welche Werte  $x \in \mathbb{R}$  müssen ausgeschlossen werden,  
z.B. wegen Nulldivision,  
negativem Radikanten,  
Argument einer Logarithmusfunktion ist kleiner oder gleich Null?

Gib  $D_f$  als Vereinigung von Intervallen oder als Punktmenge an.

Bemerkung: Bei allen später zu berechnenden Werte (Achsen Schnittpunkte, Extremwerte, Wendepunkte) ist zu prüfen, ob sie in  $D_f$  enthalten sind.

### 2. Symmetrie, Periodizität:

- Prüfe:  $f(-x) = f(x)$ : gerade Funktion, symmetrisch zur y-Achse.
- Prüfe:  $f(-x) = -f(x)$ : ungerade Funktion, punktsymmetrisch zum Ursprung.
- Angabe der kleinsten Periode  $T$ , so dass gilt:  $f(x + kT) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Für zusammengesetzte Funktionen gilt dabei Folgendes:

- A) Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier gerader Funktionen ist wieder gerade.
- B) Summe und Differenz zweier ungerader Funktionen ist wieder ungerade.
- C) Produkt und Quotient zweier ungerader Funktionen ist gerade.
- D) Produkt und Quotient geraden und einer ungeraden Funktionen ist ungerade.

### 3. Verhalten an den Randpunkten des Definitionsbereiches:

- Falls  $f(x)$  in ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist, bestimme  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
- Falls  $f(x)$  in einem endlichen Intervall  $I = [a, b]$  oder  $I = (a, b)$  oder  $I = [a, b)$  oder  $I = (a, b]$  definiert ist, so sind die einseitigen Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$  zu berechnen.
- Bestimme die einseitigen Grenzwerte an den Stellen, bei denen  $D_f$  im Endlichen unterbrochen ist (z.B. an Nennernullstellen).
- Ist  $f$  eine gebrochen rationale Funktion, so ist es für die Erstellung des Graphen der Funktion günstiger, die Asymptote  $y_A$  zu bestimmen:  
Es sei also  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}$ . Dann gilt:
  - A) Ist  $\text{Grad}(u(x)) = m < n = \text{Grad}(v(x))$ , so ist  $y_A = 0$ ,  $f$  heißt echt gebrochen rational.
  - B) Ist  $\text{Grad}(u(x)) = m = n = \text{Grad}(v(x))$ , so ist  $y_A = \frac{b_m}{a_n}$
  - C) Ist  $\text{Grad}(u(x)) = m > n = \text{Grad}(v(x))$ , so ist  $f$  mittels Partialdivision in ein Polynom  $g(x)$  und einen echt gebrochen rationalen Anteil  $h(x)$  zu zerlegen. Es gilt  $y_A = g(x)$ .

### 4. Achsen Schnittpunkte:

- Nullstellen: Löse  $f(x) = 0 \implies x_1, \dots, x_k$
- Prüfe, ob  $x_i, i = 1, \dots, k$  und  $x = 0$  zum Definitionsbereich gehören.
- Schnittpunkt mit der y-Achse: Setze  $x = 0$  und berechne  $f(0)$ , sofern  $x \in D_f$ .

### 5. Unstetigkeitsstellen:

Untersuche die Stellen, die unter 1. als isolierte Punkte aus  $\mathbb{R}$  ausgeschlossen wurden auf Polstelle, Lücke oder Sprungstelle endlicher Höhe:

- $x = a$ : **Polstelle:**  
Sind die Grenzwerte  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  entweder beide  $\infty$  oder beide  $-\infty$ , so liegt bei ein Pol gerader Ordnung vor. Wechseln die Vorzeichen bei den Grenzwerte, so liegt ein Pol ungerader Ordnung vor.

- $x = a$ : Stelle einer **hebbaren Unstetigkeit/Lücke**:  
Existiert der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$ , dann hat die Funktion im Punkt  $P(a, g)$  eine Lücke, die durch Einfügen des Grenzwertes geschlossen werden kann.  
Ist  $f$  eine gebrochen rationale Funktion, so kann die Funktion gekürzt werden (s.unten). Alle weiteren Untersuchungen können an der gekürzten Funktion erfolgen!
- $x = a$ : **Sprungstelle**:  
Es existieren links- und rechtsseitiger Grenzwert bei  $x = a$ . Beide Grenzwerte sind aber verschieden, d.h.  
$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = g^+ \neq g^- = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \text{ mit } |g^+|, |g^-| < \infty$$
- Ist  $f(x)$  eine gebrochen rationale Funktion:  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  und  
sei  $x_l$   $k$ -fache Lösung von  $u(x) = 0$  (im Zähler), d.h.  $u(x) = (x - x_l)^k \cdot u_l(x)$  und  
sei  $x_l$   $j$ -fache Lösung von  $v(x) = 0$  (im Nenner), d.h.  $v(x) = (x - x_l)^j \cdot v_l(x)$ .  
Dann gilt:  
Ist  $k < j$ , so ist  $x_l$  eine Polstelle  
Ist  $k \geq j$ , so befindet sich bei  $x_l$  eine Lücke.  
Wenn  $k > 0$  und  $j > 0$  gilt kann in beiden Fällen kann gekürzt werden::  
$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{(x-x_l)^k \cdot u_l(x)}{(x-x_l)^j \cdot v_l(x)} = (x-x_l)^{k-j} \cdot \frac{u_l(x)}{v_l(x)}$$

## 6. Extremwerte:

- Suche extremwertverdächtige Stellen mittels  $f'(x) = 0 \implies x_{E1}, \dots, x_{Ek}$ .
- Teste diese Stellen  $x_{E1}, \dots, x_{Ek}$  auf Vorlage eines Extremums mit Hilfe des Satzes:  
 $f$  sei in  $U(x_{Ej})$  stetig differenzierbar bis zur  $n$ -ten Ableitung,  $n \geq 2$ .

Die  $n$ -te Ableitung sei die erste von Null verschiedene Ableitung in  $x_{Ej}$ .

Ist **n gerade**, so gilt:  $f^{(n)}(x_{Ej}) < 0 \Rightarrow$  relatives Maximum bei  $x_{Ej}$

$f^{(n)}(x_{Ej}) > 0 \Rightarrow$  relatives Minimum bei  $x_{Ej}$

Ist **n ungerade**, so liegt bei  $x_{Ej}$  ein Wendepunkt vor.

- Berechne die Funktionswerte  $f(x_{Ej})$  für die gefundenen Extrema.

## 7. Wendepunkte:

- Suche wendepunktverdächtige Stellen mittels  $f''(x) = 0 \implies x_{W1}, \dots, x_{Wk}$ .
- Teste diese auf Vorlage eines Wendepunktes mit Hilfe des Satzes aus Punkt 6.
- Berechne die Funktionswerte  $f(x_{Wj})$  für die gefundenen Wendepunkte.

## 8. Skizze:

Leite aus den vorher bestimmten Angaben und evtl. einigen wenigen zusätzlich bestimmten Punkten das Bild der Funktion ab. Kontrolliere, falls möglich, mit dem Taschenrechner.

## 9. Wertevorrat: Leite aus den vorhergehenden Punkten, speziell der Skizze, ab:

- Welche Werte aus  $\mathbb{R}$  müssen als Funktionswerte ausgeschlossen werden?
- Angabe von  $W_f$  als Vereinigung von Intervallen oder als Punktmenge.

## Geometrische und technische Anwendungen der Integralrechnung (eindimensional)

1. **Fläche** zwischen der Kurve  $y = f(x)$  und der x-Achse im Intervall  $[a, b]$ , wobei die stetige Funktion  $f(x)$  in diesem Intervall die Nullstellen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  besitzt:

$$F = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$$

2. **Fläche** zwischen den Kurven  $y_1 = f(x)$  und  $y_2 = g(x)$  im Intervall  $[a, b]$ , wobei sich die stetigen Funktion  $f(x)$  und  $g(x)$  in diesem Intervall an den Stellen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  schneiden:

$$\curvearrowright F = \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

3. **Länge s der Kurve K:**

- im  $\mathbb{R}^2$  bei expliziter Darstellung  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ :  $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

- im  $\mathbb{R}^2$  bei Parameterdarstellung  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

- im  $\mathbb{R}^n$  bei Parameterdarstellung  $x_i = x_i(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ ;  $i = 1, \dots, n$ :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\dot{x}_i(t))^2} dt$$

- im  $\mathbb{R}^2$  bei Polarkoordinatendarstellung  $r = r(\phi)$ ,  $\phi \in [\phi_1, \phi_2]$ :

$$s = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{r^2(\phi) + \dot{r}^2(\phi)} d\phi$$

4. **Volumen und Mantelfläche** des Körpers, der bei Rotation der Fläche zwischen der stetigen Funktion  $f(x)$  und der x-Achse um die x-Achse im Intervall  $[a, b]$  entsteht:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx; \quad M_x = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Wird die Fläche durch die Kurven  $f(x)$  und  $g(x)$  berandet, so ist zur Flächenbestimmung entsprechend Punkt 2 zu verfahren.

5. **Volumen und Mantelfläche** des Körpers, der bei Rotation der Fläche zwischen der im Intervall  $[a, b]$  eindeutigen stetigen Funktion  $y = f(x)$  und der y-Achse um die y-Achse entsteht:

$$V_y = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} x^2(y) dy; \quad M_y = 2\pi \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

6. Der **Gleichrichtwert** einer Wechselstromgröße  $f(x)$  ist der lineare Mittelwert dieser Größe:

$$\tilde{f} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(x) dx$$

7. Der **Effektivwert** einer Wechselstromgröße  $f(x)$  ist der quadratische Mittelwert dieser Größe:

$$f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} f^2(x) dx}$$

8. **Elektrische Arbeit:**

$$W_{el} = \int_{t_1}^{t_2} u \cdot i dt$$

9. Koordinaten  $(x_s, y_s)$  des Schwerpunktes einer homogenen Fläche mit dem Flächeninhalt  $F$  unter der stetigen Kurve  $y = f(x)$  :

$$x_s = \frac{M_y}{F} = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx} \quad y_s = \frac{M_x}{F} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} y^2 dx}{\int_a^b y dx}$$

10. Uneigentliche Integrale mit unendlichen Grenzen:

Sei  $f(x)$  auf beliebigen Intervallen  $[a, b]$  integrierbar.

$$\text{a) } \int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{c) } \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx; \quad c \in \mathbb{R}$$

11. Uneigentliche Integrale mit nichtbeschränkten Funktionen:

Sei  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$ ,  $a \leq c \leq b$ . (Eventuell werden nur einseitige Grenzwerte benötigt!)

$$\text{a) } \int_a^c f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx$$

$$\text{b) } \int_c^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$$

$$\text{c) } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx$$



## A) Grundintegrale

1. $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1$	7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
2. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C = \ln cx $	8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ( $\int e^x dx = e^x + C$ )	10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$	11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln x + \sqrt{x^2-1}  + C$
6. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	

## B) Integrationsregeln

- Linearität:**
  - $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx, k \in \mathbb{R}$
  - $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- Substitution:**  $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du = F(g(x)) + C$
- Partielle Integration:**  $\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$   
**Integral auf der rechten Seite muss einfacher ausfallen als das auf der linken Seite!**
- Spezialfälle:**
  - $\int f(x)f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x) + C$
  - $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

## C) Hinweise zum Berechnen von Integralen:

- Erforsche die Struktur des Integranden:**  
Summe/Differenz: A, B1, B2, B4.1,  
Produkt: B2, B3, B4.1  
Quotient: B2, B4.2, Partialbruchzerlegung
- Mögliche Umformungen im Integranden:**  
Abdividieren, Ausmultiplizieren  
Anwenden trigonometrischer Halb- und Doppelwinkelformeln,  
Additionstheoreme, trigonometrischer Pythagoras,...  
Umschreiben von Wurzeln in Potenzen  
Anwenden von Potenzgesetzen, Logarithmengesetzen...
- Ansetzungen für die partielle Integration:**

u	v'	Hinweise
Potenzfkt.	Exponentialfunktion	eventuell mehrfach anwenden
Potenzfkt.	Winkelfunktionen	eventuell mehrfach anwenden
ln(x)	Potenzfkt.	Es entsteht eine gebrochen rationale Fkt.!
Winkelfkt.	Exponentialfunktion	zweimal, gleichartig ansetzen!