# Wiederholung

1. Vereinfachen Sie!

a) $a^m b^{n-p} a b^{2n-3p} a^{-2} b^{-3n+2p}$ b) $\dfrac{x^m y^m z^r}{x^2 y^{2-n} z^{r-2}}$

c) $\left(\dfrac{4x^3 y}{9a^2 b}\right)^3 \div \left(\dfrac{2x^3 a^2 y}{3b}\right)^2$

2. Bringen Sie auf einen Nenner, und vereinfachen Sie !

a) $\dfrac{2+3x^3}{x^7} - \dfrac{3}{x^4}$ b) $\dfrac{1}{a^n b^{n-3}} - \dfrac{3}{a^{n-1} b^{n-2}} + \dfrac{3}{a^{n-2} b^{n-1}} - \dfrac{1}{a^{n-3} b^n}$

c) $\dfrac{a+2b}{3a^2-3ab} - \dfrac{1}{2b} - \dfrac{3b-a}{2ab-2b^2}$

d) $\dfrac{2a-5}{a+3} - \dfrac{3a-4}{a+2} + \dfrac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$ e) $\dfrac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1+x}{1-x}} - x}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+x}}}$

3. Lösen Sie nach den angegebenen Größen auf!

a) $B = \dfrac{1}{A}\dfrac{nI}{R_e + R_l}$ nach $R_e$, I

b) $I = \dfrac{nU}{nR_i + R_a}$ nach n, $R_i$

c)
1. $K_n = K_0\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$, $p$, $n$
2. $K_n = E \cdot q \cdot \dfrac{q^n - 1}{q-1}$, $E$, $n$

4. Lösen Sie folgende Gleichungen!

a) $\dfrac{13+x}{7} + \dfrac{10-x}{3} = \dfrac{7x+26}{x+21} - \dfrac{17+4x}{21}$

b) $(2x-3)^2 - (x-5)^2 = 80$

c) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} = 9$

d) $2^{3(x-1)} = 8^{(1-x)}$

e) $\tan(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

f) $$\frac{6x - \frac{7}{3}}{\frac{8x}{3} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{3} - 3x}{\frac{7}{8} - \frac{4x}{3}}$$

5. Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen:

a) $y(x) = x^2 \sin(x)$ b) $y(x) = \frac{x^3}{e^x}$ c) $y(x) = \sin(x^2)$

d) $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e) $y(x) = 7^{2x}$ f) $y = \sqrt{3x^2 + 2x}$

6. Berechnen Sie die unbestimmten Integrale folgender Funktionen:

a) $\int (x^4 + \cos(x) + e^x)\, dx$ b) $\int \sin(x)\, dx$ c) $\int (3x^2 + \frac{1}{x})\, dx$

d) $\int e^{2x}\, dx$ e) $\int \sin(6x+3)\, dx$ f) $\int x\sin(x)\, dx$

7. *In welchen Punkten schneidet die Gerade 3x+3y=21 den durch $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 47$ gegebenen Kreis? Skizze!

8. *In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneiden sich die Geraden $g_1:\ y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ und $g_2:\ 3x - y - 1 = 0$ ? Geben Sie die Gleichung derjenigen Geraden an, die senkrecht auf $g_1$ steht und durch den Schnittpunkt beider Geraden verläuft.

9. *Wie lautet die Gleichung der Parabel, die an den Stellen x = 2 und x = 4 die x – Achse schneidet und durch den Punkt (3, -4) verläuft?

**Lösungen:**

1. a) $a^{m-1}b^{-2p}$ b) $\frac{y^{m+n-2}z^2}{x^{2-m}}$ c) $\frac{2^4 x^3 y}{3^4 a^{10} b}$

2. a) $\frac{2}{x^7}$ b) $\frac{(b-a)^3}{a^n b^n}$ c) $-\frac{2}{3a}$

   d) $\frac{12}{a^2+5a+6}$ e) $\frac{(1-3x)\cdot x}{2\cdot(2x+1)}$

3. a) $R_e = \frac{nI - BAR_1}{BA}$ $I = \frac{BA(R_e + R_1)}{n}$

   b) $n = \frac{R_a I}{U - R_i I}$ $R_i = \frac{U}{I} - \frac{R_a}{n}$

   c) $E = \frac{K_n}{q}\cdot\frac{q-1}{q^n-1}$ $n = \frac{\ln\left(1+\frac{K_n(q-1)}{E\cdot q}\right)}{\ln q}$

4. a) 100 b) 6; -16/3 c) 17

   d) 1 e) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,$ $k \in Z$

   f) x = 0,5

5. a) $y'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$ b) $y(x)' = \frac{3x^2 - x^3}{e^x}$ c) $y'(x) = 2x\cos(x^2)$

   d) $y(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ e) $y(x) = 2\cdot 7^{2x}\ln(7)$ f) $y = \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x}}$

6. a) $I = \frac{1}{5}x^5 + \sin(x) + e^x + C$ b) $I = -\cos(x) + C$ c) $I = x^3 + \ln|x| + C$

   d) $I = \frac{1}{2}e^{2x} + C$ e) $I = -\frac{1}{6}\cos(6x+3)$ f) $I = -x\cos(x) + \sin(x) + C$

7. $P_1(5{,}56;1{,}44)$ $P_2(1{,}44;5{,}56)$

8. S(1; 2) $\alpha = 45°$ $g_3: y = -2x + 4$

9. $y = 4x^2 - 24x + 32 = 4(x-3)^2 - 4$

# Komplexe Zahlen 1

## A) Aufgaben zur Vorbereitung

1. Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 2 - 2i$ und $z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$.
Berechnen Sie!

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | $z_1 + z_2$ | b) | $z_1 - z_2$ | c) | $z_1 \cdot z_2$ |
| d) | $z_1 \div z_2$ | e) | $\overline{z}_1 \quad , \quad \overline{z}_2$ | f) | $z_1 \cdot \overline{z}_1$ |
| g) | $z_1 + \overline{z}_1$ | h) | $\lvert z_1 \rvert \quad , \quad \lvert z_2 \rvert$ | i) | $\lvert z_1 \cdot z_2 \rvert, \quad \lvert z_1 \div z_2 \rvert$ |

2. Bestimmen Sie die trigonometrische und Euler'sche Form der folgenden komplexen Zahlen, stellen Sie diese in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | $z_1 = 3,$ | b) | $z_2 = 3i,$ | c) | $z_3 = -5i,$ |
| d) | $z_4 = -2,$ | e) | $z_5 = -2 - 2i,$ | | |

## B) Seminaraufgaben

1. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke (Nenner reell)!

a) $z = \dfrac{1 + \frac{1}{i}}{1 - \frac{1}{i}}$ b) $z = \dfrac{\frac{5+i}{2}}{2 + \frac{1}{1-i}}$

c) $z = \dfrac{(1+2i)(2-i)+1}{(2-i)^2 - 2 + i}$ d) $z = \dfrac{1}{i^5} + \dfrac{1}{i^7}$ e) $z = \dfrac{1}{1 + i\omega T}$

2. Veranschaulichen Sie folgende Punktmengen in der Gauß'schen Zahlenebene!

a) $\lvert z \rvert \le 4$ b) $1 \le \lvert z \rvert \le 4$ c) $\operatorname{Re} z^2 = 1$

d) $1 \le \operatorname{Im} z \le 2$

3. Bestimmen Sie die trigonometrische und Euler'sche Form der folgenden komplexen Zahlen, stellen Sie diese in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

a) $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ b) $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ c) $z_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

4. Geben Sie die arithmetische Form folgender komplexer Zahlen an:

a) $z_1 = \dfrac{1}{2}e^{-i45^o} = \dfrac{1}{2}\exp(-i\dfrac{\pi}{4}),$ b) $z_2 = 2(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}),$

## C) Aufgaben zur Nachbereitung

1. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke (Nenner reell)!

a) $z = \dfrac{(6-2i)(1+i)}{(2+i)(2+2i)}$  b) $z = \dfrac{2+4i}{1-2i}$  c) $z = \dfrac{1-3i}{-4+2i}$

d) $\dfrac{R_2 \cdot \dfrac{1}{i\omega C}}{R_2 + \dfrac{1}{i\omega C}}$

2. Veranschaulichen Sie in der komplexen Zahlenebene die Punktmengen

a) $|z| > 2$  b) $\operatorname{Re} z \geq 1$  c) $0 \leq \operatorname{Re}(iz) \leq 2\pi$

d)* $|z - z_0| \leq R$, $R>0$, $z_0$=const.

3. Bestimmen Sie jeweils alle 3 Formen der gegebenen komplexen Zahlen und stellen Sie diese in der komplexen Zahlenebene dar:

a) $z_1 = 4 + 4i$  b) $z_2 = -\sqrt{8} + i$  c) $z_3 = -\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, i$

d) $z_4 = \frac{1}{i} e^{-i\pi}$  e) $z_5 = 5(\cos 60^o + i \sin 60^o)$

## Lösungen zum Teil A

1. a) 3 - 0,2679i  b) 1 - 3,732i  c) 5,4641 + 1,4641i

d) -0,366 - 1,366i  e) $\overline{z}_1 = 2 + 2i$  $\overline{z}_2 = 1 - \sqrt{3}i$

f) 8  g) 4  h) $|z_1| = 2\sqrt{2}$; $|z_2|=2$

i) $4\sqrt{2}$ ; $\sqrt{2}$

2. $z_1 = 3(\cos 0 + i \sin 0) = 3e^{i0} = 3$  $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right)$

$z_3 = 5\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2}\right)$  $z_4 = 2(\cos\pi + i \sin\pi)$

$$z_5 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

## Lösungen zum Teil C

1. a) $1-i$ b) -1,2 + 1,6i c) -0,5+ 0,5i

d) $\dfrac{R_2(1-R_2 i\omega C)}{1+R_2^2\omega^2C^2}$

2. a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{\text{Kreisscheibe mit } r = 2 \text{ und } M = (0,0)^T\}$

b) Halbebene $x \geq 1$

c) Streifen, Rand eingeschlossen, $-2\pi \leq y \leq 0$

3. a) $z_1 = 4+4i = \sqrt{32}(\cos 45^0 + i\sin 45^o) = \sqrt{32}e^{i45^o} = \sqrt{32}\exp(i45^o)$

b) $z_2 = -\sqrt{8} + i = 3(\cos 160{,}53^o + i\sin 160{,}53^o) = 3e^{i160{,}53^o} = 3\exp(i160{,}53^o)$

c) $z_3 = -\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\ i = \frac{5}{2}(\cos 206{,}56^o + i\sin 206{,}56^o) = \frac{5}{2}e^{i206{,}56^o} = \frac{5}{2}\exp(i206{,}56^o)$

d) $z_4 = \frac{1}{i}e^{-i\pi} = \frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i}(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) = i = \cos(90^o) + i\sin(90^o) = e^{i\frac{\pi}{2}} = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$

e) $z_5 = 5(\cos 60^o + i\sin 60^o) = 2{,}5 + 4{,}3301i = 5e^{i60^o}$

# Komplexe Zahlen 2

## A) Aufgaben zur Vorbereitung

1. Gegeben seien $z = 3(\cos 30^o + i\sin 30^o)$ und $u = -0.5 + 0.5\sqrt{3}\ i$ . Berechnen Sie
   a) $z + u$ b) $z \cdot u$ c) $z \div u$ d) $z^2$ e) $u^5$

2. Lösen Sie grafisch und rechnerisch die Gleichungen
   a) $z^3 = 1$ b) $z^8 = 256$

3. Lösen Sie die Gleichung $z^2 + 2z + 17 = 0$

## B) Seminaraufgaben

1. Berechnen Sie z:
   a) $z = (1 + i)^8$ b) $z = (\cos x + i \sin x)^2$ c) $z = (-\sqrt{3} + 3i)^4$

2. Lösen Sie die Gleichungen
   a) $z^3 = -2i$ b) $3i \cdot z^5 = -3\sqrt{3} - 3i$ c) $\dfrac{z^4}{8} + i\sqrt{3} = -1$

3. Gegeben sind die folgenden komplexen Zahlen:
   $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = \sqrt{3}e^{i195{,}4°}$, $z_3 = -2 + 3i$, $z_4 = 4e^{-i54{,}3°}$.

   Rechnen Sie die komplexen Zahlen jeweils in die arithmetische bzw. in die Exponentialform um, und berechnen Sie die folgenden Terme!
   a) $z = \dfrac{z_3}{z_4} \cdot z_2 - z_1^3$ b) $z = \dfrac{z_1 + z_2 \cdot z_3}{\bar{z}_1 - z_4} + \sqrt{z_3}$

4. Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungen im Bereich der komplexen Zahlen!
   a) $z^4 - 16 = 0$ b) $z^6 - 4z^3 + 8 = 0$ c) $z^5 - z^4 + z^2 - z = 0$

## C) Aufgaben zur Nachbereitung

1. Berechnen Sie z:

   a) $z = (2 + i\sqrt{12})^5$ b) $z = (-1 - i)^{10}$ c) $z = 5e^{i\cdot 60°} + 8e^{i\cdot 30°}$

   d) $z = z_1 \cdot z_2 + \dfrac{1}{z_2}$ für $z_1 = 3(\cos 60° + i\sin 60°)$, $z_2 = -\dfrac{5}{2}\sqrt{3} + \dfrac{5}{2}i$

2. Berechnen Sie mit den Zahlen aus Aufgabe B3) folgende Zahlen z:

a) $z = \sqrt[4]{z_3 \cdot z_1^2 - 2z_4}$ b) $z = \dfrac{z_2^3 - 2z_1 + z_3}{\sqrt{z_2}} - z_2^2$

3. Lösen Sie die Gleichungen im Bereich der komplexen Zahlen:

a) $2z^4 + 9 = 9\sqrt{3}i$ b) $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$ c) $x^4 + x^3 - x^2 + x = 2$

## Lösungen zum Teil A

1. a) 2,098 + 2,366i b) -2,598 + 1,5i c) -3i
d) 4,5 + 7,794i e) -0,5 –0,866i

2. a) $z_0 = 1$ $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$ $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$

b) $z_0 = 2$ $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ $z_2 = 2i$ $z_3 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
$z_4 = -2$ $z_5 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ $z_6 = -2i$ $z_7 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

3. $z_{1/2} = -1 \pm 4i$

## Lösungen zum Teil C

1. a) $512 - 886{,}8i$ b) -32i c) 9.4282 + 8.3301i

d) -20.8730 - 3.1122i

2. a) $z_1 = 2{,}55 - 1{,}704i$; $z_2 = 1{,}704 + 2{,}55i$; $z_3 = -2{,}55 + 1{,}704i$
$z_4 = -1{,}704 - 2{,}55i$

b) $z_1 = -10{,}3436 + 6{,}3038i$; $z_2 = 5{,}1911 - 9{,}378i$

3. a) $z_0 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$; $z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

b) $z_1 = 2$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ $z_3 = -1 - i\sqrt{3}$

$z_4 = 1$ $z_5 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ $z_6 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

c) $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = i$; $x_4 = -i$;

# Matrizen

## A) Aufgaben zur Vorbereitung

1. Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie A + B, A - B, 5A, 3A - 4B

2. Gegeben sind die Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den jeweiligen Typ der Matrizen und prüfen Sie ob folgende Produkte berechnet werden können: AB, BA, AC, CA, BC, CB, $A^TC$, $C^TA$, ABC, CBA. Falls eine Berechnung möglich ist, führen Sie sie aus.

3. Lösen Sie die folgenden Matrizengleichungen nach A auf!

a) $A(B+E) = E+B$ b) AB+EA=B+E c) $\frac{1}{2}CA + 2A - B = 3D$

## B) Seminaraufgaben

1. Lösen Sie die folgenden Matrizengleichungen nach X auf!

a) $(AX)^{-1} + B = C$ b) $AX - BCX = (AB)^{-1}$

c) $AXB + C = ACB$ d) $AX - X(B-A) = AB$

e)* $[(X^{-1})^T A]^T = AB$ e) $(X^T + A)B = CB$

2. Bestimmen Sie die Lösung folgender Matrizengleichungen!

a) AE + X = A(E + B) mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

b) A + (X - E)B = B mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Gegeben: $A = \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 3-2i \\ 3+2i & 7 \end{pmatrix}$ $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie, falls möglich, AB, $A\underline{b}$, $\underline{b}A$, A*, B*, $\underline{b}$*.
b) Sind A und B hermitesch?
c) Berechnen Sie $\underline{x}$, so daß $A\underline{x} = \underline{b}$ gilt.

## C) Aufgaben zur Nachbereitung

1. Typ(A) = (m, n), Typ($\underline{x}$) = (n, 1),Typ($\underline{y}$) = (m, 1) - Matrix; $n \neq m$, $m > 1$, $n > 1$.

a) Welche der folgenden Ausdrücke sind definiert? Welchen Typ haben sie?
Zwischen welchen Ausdrücken kann man das Gleichheitszeichen setzen?

$A^T \underline{y}\underline{x}^T$, $\underline{x}\underline{y}^T A$, $\underline{y}A\underline{x}$, $\underline{y}^T A\underline{x}$, $\underline{x}^T A\underline{y}$, $\underline{x}^T A^T \underline{y}$,
$(A\underline{x})^T \underline{y}$, $A\underline{x}\underline{y}$, $A\underline{x}\underline{y}^T$, $\underline{y}\underline{x}^T A^T$

b) Berechnen Sie die Ausdrücke für:

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. Lösen Sie folgende Matrizengleichungen nach B auf!

a) $\frac{1}{2}CA + 2A - B = 3D$ b) $AB + EA = B + F$

c) $B(A + X^{-1}) = BC + E$ d) $ABX^{-1} = X^{-1} + A + B$

3. Bestimmen Sie die Lösung folgender Matrizengleichungen!

a) $A + 3(X - A - E) = 2B + X - E$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

b) $X - B(E + A) = A^2$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

# Lösungen zum Teil A

1. $A + B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ $A - B = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 5 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$5A = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 15 \\ 25 & 0 & 30 \end{pmatrix} \qquad 3A - 4B = \begin{pmatrix} 15 & -34 & 17 \\ 15 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Typ(A) = (2,3), Typ(B) = (3,2), Typ(C) = 2,2)

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} -6 & 8 & -12 \\ -9 & 12 & -18 \\ -3 & 4 & -6 \end{pmatrix} \qquad AC \text{ n. d.}$$

$$CA = \begin{pmatrix} -4 & 7 & -13 \\ -6 & 9 & -15 \end{pmatrix} \qquad BC = \begin{pmatrix} -4 & 14 \\ -6 & 21 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad CB \text{ n. d.}$$

$$ABC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad CBA \text{ n.d.} \qquad A^T C = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 4 & 7 \\ -8 & -11 \end{pmatrix} \qquad C^T A = \left(A^T C\right)^T$$

3. a) $A = E$ b) $A = E$ c) $A = \left(\frac{1}{2}C + 2E\right)^{-1}(3D + B)$

## Lösungen zum Teil C

1. n.d.: $\underline{y}A\underline{x}$, $\underline{x}^T A \underline{y}$, $A\underline{x}\underline{y}$,

| | $A^T \underline{y}\underline{x}^T$ | $\underline{x}\underline{y}^T A$ | $\underline{y}^T A \underline{x}$ | $\underline{x}^T A^T \underline{y}$ | $(A\underline{x})^T \underline{y}$ | $A\underline{x}\underline{y}^T$ | $\underline{y}\underline{x}^T A^T$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Typ | (n, n) | (n, n) | (1, 1) | (1, 1) | (1, 1) | (m, m) | (m, m) |

$$A^T \underline{y}\underline{x}^T = \underline{x}\underline{y}^T A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -8 & 8 & -8 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \qquad (A\underline{x})^T \underline{y} = \underline{x}^T A^T \underline{y} = \underline{x}^T (\underline{y}^T A)^T = 5$$

$$\left(A\underline{x}\underline{y}^T\right)^T = \underline{y}\underline{x}^T A^T = \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^T \qquad \underline{y}^T A \underline{x} = 5$$

2. a) $B = \frac{1}{2}CA + 2A - 3D$ b) $B = (E - A)^{-1}(A - F)$

c) $B = (A + X^{-1} - C)^{-1}$ d) nicht möglich

3. a) $X = B + A + E = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $X = (B + A)A + B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$

# Determinanten

## A) Aufgaben zur Vorbereitung

1. Berechnen Sie die folgenden Determinanten!

a) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$   b) $\begin{vmatrix} 1 & x \\ 3 & y \end{vmatrix}$   c) $\begin{vmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ -\cos(x) & \sin(x) \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$   e) $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

2. Berechnen Sie die Normen, die normierten Vektoren, die Skalarprodukte $\vec{a}\cdot\vec{b}, \vec{a}\cdot\vec{c}, \vec{b}\cdot\vec{c}$, die Vektorprodukte $\vec{a}\times\vec{b}, \vec{a}\times\vec{c}, \vec{b}\times\vec{c}$ und das Spatprodukt $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ mit den folgenden Vektoren:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$   b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

c) Es sei Typ(A) = (3,3). Was sagt det A = 0 über die 3 Spalten- bzw. Zeilenvektoren, die in A enthalten sind, aus? Berechnen Sie die entsprechende Determinante für die Vektoren aus a) und b) und treffen Sie Ihre Aussage.

## B) Seminaraufgaben

1. Berechnen Sie unter Ausnutzung von bestimmten Eigenschaften der Determinanten und dem Entwicklungssatz die folgenden Determinanten möglichst einfach!

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$   b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$   c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

2. Berechnen Sie x !

a) $\begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix} = 27$   b) $\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 2 \\ 2 & 2-x & 2 \\ 2 & 2 & 5-x \end{vmatrix} = 0$

3. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit der Cramerschen Regel!

a) $\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$

b) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \end{array}$

c) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ x & - & 4y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 6y & - & 9z & = & 0 \end{array}$

d) $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -6 \end{array}$

4. Sind die folgenden Systeme aus 3 Vektoren eine Basis im $\mathbb{R}^3$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Wert x, für den das zutrifft.

a) $\begin{aligned} \vec{a} &= 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \\ \vec{b} &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{c} &= -\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \end{aligned}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2x \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ x \end{pmatrix}$

5. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren, die Fläche, die sie aufspannen, einen Vektor, der senkrecht dazu steht, und das Volumen des damit aufgespannten Spates.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

**C) Aufgaben zur Nachbereitung**

1. Berechnen Sie möglichst einfach folgende Determinanten!

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & -8 & -6 \\ 7 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

d)* $\begin{vmatrix} 1 & i & -i & -1 \\ 0 & 1 & i & -i \\ i & 0 & 1 & i \\ -i & i & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung detA = 0 mit

a) $A = \begin{pmatrix} 1-x & -1 & -1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 3 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & 3-\lambda & 1 \\ -3 & 8 & 1-\lambda \end{pmatrix}$.

3. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit der Cramerschen Regel !

a) $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 9 \end{array}$ b) $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 8 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 16 \\ 9x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 24 \end{array}$

4. Sind die folgenden Systeme aus 3 Vektoren eine Basis im $\mathbb{R}^3$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Wert x, für den das zutrifft. Die Vektoren $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$ seien linear unabhängig.

a) $\vec{a} = 2\vec{y}_1 + \vec{y}_2$, $\vec{b} = \vec{y}_1 - \vec{y}_2$, $\vec{c} = \vec{y}_3$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ x \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. Berechnen Sie den Winkel $\alpha$ zwischen den Vektoren, die Fläche A des Parallelogramms, welche sie aufspannen, einen Vektor $\vec{c}$, der senkrecht zu dieser Fläche steht, und das Volumen V des mit diesem Vektor aufgespannten Spates.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

## Lösungen zum Teil A

1. a) -7 b) y - 3x c) 1 d) 39 e) $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 7\lambda - 5$

2. a) $|\vec{a}| = 3{,}16$ $|\vec{b}| = 4{,}12$ $|\vec{c}| = 5{,}83$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = -1$ $\vec{a}\cdot\vec{c} = 15$ $\vec{b}\cdot\vec{c} = 12$

$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{a}\times\vec{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b}\times\vec{c} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 11$

b) $|\vec{a}| = 3{,}74$ $|\vec{b}| = 7{,}28$ $|\vec{c}| = 10{,}63$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$ $\vec{a}\cdot\vec{c} = 29$ $\vec{b}\cdot\vec{c} = 55$

$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ 17 \\ -16 \end{pmatrix}$ $\vec{a}\times\vec{c} = \begin{pmatrix} 14 \\ 17 \\ -16 \end{pmatrix}$ $\vec{b}\times\vec{c} = \begin{pmatrix} -28 \\ -34 \\ 32 \end{pmatrix}$ $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 0$

c) detA = 0 heißt, dass die Spalten bzw. Zeilen von A linear abhängig sind, anderenfalls sind sie linear unabhängig und bilden eine Basis. In Aufgabe 2a) gilt det A=11➔ Basis, in Aufgabe 2b) gilt detA=0 ➔ keine Basis

## Lösungen zum Teil C

1. a) -9 b) 0
   c) -68 d) 1-6i

2. a) $x_1 = 1,\ x_{2,3} = 1 \pm 2i$ b) $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 5$

3. $x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = -2$ b) $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 5$

4. a) linear unabhängig, da detA = -3
   b) linear abhängig, da detA = 0

5. a) $\alpha = 60^\circ,\ A = 1,73FE,\ \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ V = 3VE$

   b) $\alpha = 101,1^\circ,\ A = 5,1FE,\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix},\ V = 26VE$

# Lineare Gleichungssysteme 1

## A) Aufgaben zur Vorbereitung

1. Finden Sie mittels Gaußalgorithmus den Lösungsvektor folgender eindeutig lösbarer linearer Gleichungssysteme:

a) $\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 9 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$

2. Bestimmen Sie die Ränge folgender Matrizen!

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Erstellen Sie eine Übersicht über die Lösbarkeitskriterien für LGlS.

## B) Seminaraufgaben

1. Finden Sie mittels Gaußalgorithmus den Lösungsvektor folgender eindeutig lösbarer linearer Gleichungssysteme:

a) $\begin{aligned} x_1 + 3x_3 - 2x_4 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 &= -6 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 4x_2 - 5x_3 + x_4 &= -3 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_4 &= -5 \\ -x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$

2. Wenden Sie die Lösbarkeitskriterien für lineare Gleichungssysteme an, und lösen Sie die folgenden Systeme.

a) $\begin{aligned} 5x_1 - 5x_2 + 5x_3 &= 50 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -20 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 &= 5 \\ 7x_1 - 5x_2 - 8x_3 &= 15 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= -2 \\ -5x_1 + 8x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - y + z &= 0 \\ 5x - y + 3z &= 1 \\ x - 2y &= -1 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 5 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 8 \end{aligned}$

**C) Aufgaben zur Nachbereitung**

1. Bestimmen Sie die Ränge folgender Matrizen:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \mu \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

2. Lösen Sie mittels Gaußalgorithmus und Rangbetrachtung die folgenden Gleichungssysteme!

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ x - y - z &= 1 \\ -x + y + z &= -1 \\ x - y + z &= 1 \\ x + x + z &= 2 \end{aligned}$$

## Lösungen zum Teil A

1. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

2. a) Rang(A)=1 b) Rang(B)=1 c) Rang(C )=2

## Lösungen zum Teil C

1. a) Rang(B) = 2

b) Rang(C) = 3 für $\lambda \neq -\mu$ , Rang(C) = 2 für $\lambda = -\mu$

2. a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{s}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad t, s \in \mathbb{R}$ b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

# Lineare Gleichungssysteme 2

## A) Aufgaben zur Vorbereitung

1. Wenden Sie die Lösbarkeitskriterien für LGlS in Abhängigkeit von c an und lösen Sie das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x+y+z&=0 \\ x+2y+3z&=1 \quad ; \; c\in\mathbb{R} \\ 2x+3y+cz&=1 \end{aligned}$$

## B) Seminaraufgaben

1. Bestimmen Sie die Werte $\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, für die das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, unendlich viele Lösungen besitzt, bzw. nicht lösbar ist.

a)
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=\lambda \\ x_1-x_3&=1 \\ x_1-x_2+\lambda x_3&=5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+\lambda x_3&=5 \\ x_1+3x_2-x_3&=1 \\ 2x_1-5x_2+3x_3&=3 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} -6x_1+x_2+12x_3&=0 \\ 2x_1+7x_2+5x_3&=4\lambda \\ 6x_1-x_2+\lambda x_3&=0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3&=0 \\ -2\lambda x_1+\lambda x_2+9x_3&=6 \\ 2x_1+2x_2+\lambda x_3&=1 \end{aligned}$$

2. Invertieren Sie, falls möglich, folgende Matrizen mittels des Gauß-Jordan-Verfahrens!

a) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $F=\begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} \\ \frac{a-b}{2} & \frac{b-c}{2} & \frac{c-a}{2} \\ a & b & c \end{pmatrix}$

## C) Aufgaben zur Nachbereitung

1. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von den Parametern, ob die folgenden LGLS eindeutig, mehrdeutig oder nicht lösbar sind. Falls Sie noch Schwierigkeiten beim Lösen der LGlS haben, dann lösen Sie die LGlS aus den Aufgaben ...

a) $$\begin{aligned} x+2y-z&=-2\\ 2x+6y+2z&=-2\\ x+\alpha y+4z&=\alpha \end{aligned} \quad ,\alpha\in\mathbb{R}$$

b) $$\begin{aligned} x_1+x_2&=0\\ 2x_2+2x_3&=10\\ 4x_3+4x_4&=-16\\ 4x_1+\alpha x_4&=-36 \end{aligned} \quad ,\alpha\in\mathbb{R}$$

c)* $$\begin{aligned} x_1-5x_2+rx_3&=s\\ 2x_1+x_2+sx_3&=r\\ x_1+x_2+x_3&=0 \end{aligned} \quad ;r,s\in\mathbb{R}$$

2. Invertieren Sie, falls möglich, folgende Matrizen mittels des Gauß-Jordan-Verfahrens!

a) $C=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$ b) $D=\begin{pmatrix}1&a&a^2\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}$

3. Aus dem Knotenspannungsverfahren erhalten Sie für einen Stromkreis folgendes Gleichungssystem. Lösen Sie dieses mit einem Verfahren Ihrer Wahl!

$$\begin{pmatrix}3-\mathrm{i}&-1+\mathrm{i}\\-1+\mathrm{i}&5-\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\mathrm{V}\\20\mathrm{V}\end{pmatrix}.$$

## Lösungen zum Teil A

1. $c\neq 4: x=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix};\quad c=4: x=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}$

## Lösungen zum Teil C

1. a) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9-2\alpha} \begin{pmatrix} -16+8\alpha \\ 1-2\alpha \\ 4 \end{pmatrix}$ für $\alpha \neq 4.5$, anderenfalls unlösbar

b) $\alpha \neq 4$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha = 4$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 49 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$

c)*

$s = \frac{66}{35}$ *und* $r = \frac{11}{35}$: Lösung mit einem Parameter

$11 + r - 6s = 0$ *und* $s \neq 6r$: keine Lösung

$11 + r - 6s \neq 0$ *und* $s \in \mathbb{R}$: eindeutige Lösung

2. a) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 2,5 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\varphi_1 = \varphi_2 = 5V$

**Grenzwerte, Stetigkeit und Logarithmus**

## A) Aufgaben zur Vorbereitung

1. Finden Sie Beispiele für
   a) eine konvergente Folge mit dem Grenzwert 1,
   b) eine monoton wachsende, divergente Zahlenfolge,
   c) eine konvergente, nicht monotone Zahlenfolge mit dem Grenzwert 5,
   d) eine bestimmt divergente Zahlenfolge.
   e) eine alternierende Zahlenfolge

2. Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n}$ der Zahlenfolgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, wenn $a_n$ gegeben ist durch:

   a) $\dfrac{\mathbf{5}\boldsymbol{n}-\mathbf{8}}{\mathbf{3}\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}}$ b) $\dfrac{\mathbf{1}-\mathbf{5}\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{4}\boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}}$ c) $\dfrac{\mathrm{n}^3+4\mathrm{n}^2-2\mathrm{n}}{\mathrm{n}^2-2\mathrm{n}+4}$

   d) $\dfrac{2\mathrm{n}+1}{3\mathrm{n}}+\dfrac{3\mathrm{n}}{2\mathrm{n}-1}$ e) $\left(100+\dfrac{1}{\mathrm{n}}\right)^2$

3. Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen stetig sind. Bestimmen Sie an der Unstetigkeitsstelle die rechts- und linksseitigen Grenzwerte und die Art der Unstetigkeit. Geben Sie bei hebbarer Unstetigkeit die Ersatzfunktion an.

   a) $\boldsymbol{y} = \dfrac{|\boldsymbol{x}|}{\boldsymbol{x}}$ b) $\boldsymbol{y} = \dfrac{\ln(\boldsymbol{x}^2)}{\boldsymbol{x}}$ c) $\boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{x}^2-\mathbf{2}\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}\boldsymbol{x}}$

4. Berechnen Sie ohne Taschenrechner die folgenden Werte bzw. x:

   a) $\log_5 125$ b) $\log_6 1$ c) $\log_4 \dfrac{1}{64}$

   d) $\log_3 x = 4$ e) $\log_8 x = \dfrac{2}{3}$ f) $\log_x 144 = 2$

## B) Seminaraufgaben

1. Berechnen Sie, auch unter Verwendung der im Skript angegebenen speziellen Grenzwerte, die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n}$ der Zahlenfolgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, wenn $a_n$ gegeben ist durch:

   a) $\dfrac{\mathbf{2}\boldsymbol{n}+(\mathbf{-1})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}}$ b) $\left(3^{\mathrm{n}}+(-2)^{\mathrm{n}}\right)$ c) $2^{-\mathrm{n}}\left(2^{\mathrm{n}}+(-2)^{\mathrm{n}}\right)$

   d) $\dfrac{(2n+3)(n-1)}{n^2+n-4}$ e) $\dfrac{n^2-1}{n+3}-\dfrac{n^3+1}{n^2+1}$ f) $\left(\sqrt{\boldsymbol{n}+\sqrt{\boldsymbol{n}}}-\sqrt{\boldsymbol{n}}\right)$

   g) $\sqrt[n]{7n}$ h) $\left(\dfrac{5n}{2n+1}\right)^4$ l)* $\left(1+\dfrac{5}{n-3}\right)^n$

2. Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen, auch unter Verwendung der im Skript angegebenen speziellen Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x+4}{2x-4}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+4}{2x-4}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+4}{x^2+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 6x}{3x}$ e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ f)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{5x}\right)^{7x}$

3. Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen stetig sind. Bestimmen Sie an der Unstetigkeitsstelle die rechts- und linksseitigen Grenzwerte und die Art der Unstetigkeit. Geben Sie bei hebbarer Unstetigkeit die Ersatzfunktion an.

a) $y = \dfrac{\sin x}{x}$ b) $y = \dfrac{1}{\sin x}$ c) $y = \dfrac{1}{|\sin x|}$

4. Vereinfachen oder fassen Sie zusammen mittels Logarithmengesetzen bzw. bestimmen Sie x.

a) $\ln\dfrac{b}{a} - \ln\dfrac{a}{b}$ b) $\ln\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^{\frac{3}{2}}$ c) $\ln a + \ln b - \ln c - \ln d$

d) $-2\ln a - 0.5\ln b$ e) $4 + 3\lg x = 5{,}2$ f) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^5$

## C) Aufgaben zur Nachbereitung

1. Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n$ der Zahlenfolgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, wenn $a_n$ gegeben ist durch:

a) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ b) $(-2)^n$ c) $\dfrac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1}$

d) $\sqrt[n]{n+2}$ e) $3\sqrt[n]{r} \quad r \in \mathbb{R}$ f) $\dfrac{(2n)^n}{(2n+1)^n}$

2. Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen, auch unter Verwendung der im Skript angegebenen speziellen Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^3-3x+6}{4x^2+2x-12}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^3+4x+6}{2x^2+8x+1}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$

d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{5x+1}{5x-1}\right)^{3x}$ f) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}$

3. Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen stetig sind. Bestimmen Sie an der Unstetigkeitsstelle die rechts- und linksseitigen Grenzwerte und die Art der Unstetigkeit. Geben Sie bei hebbarer Unstetigkeit die Ersatzfunktion an.

a) $y = 3\dfrac{\sin 2x}{10x}$ b) $y = \dfrac{e^x}{|\sin(x)|}$ c) $y = \dfrac{|x|+x}{2x}$

4. Vereinfachen oder fassen Sie zusammen mittels Logarithmengesetzen bzw. bestimmen Sie x.

a) $\ln\frac{b}{a} - \ln\frac{a}{b}$ b) $\frac{3}{2}\ln\left(a^2\right) - 2\ln(a)$

c) $5 - 2\ln(3x) = 1$ d) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3x+7} = \left(\frac{9}{7}\right)^{2x-5}$

## Lösungen zu A

1. a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ b) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $b_n = n^2$

c) $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $c_n = \frac{5n + (-1)^n}{n}$ d) siehe b) e) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $e_n = \cos(n\pi)$

2. a) 0 b) $-\frac{5}{4}$ c) $\infty$ d) $\frac{13}{6}$ e) 10000

3. a) Sprung an der Stelle $x_U = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$

b) Polstelle $x_P = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \infty$

c) Hebbare Unstetigkeit = Lücke $x_L = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$,

$f_E(x) = \frac{1}{2}x - 1$

4. a) 3 b) 0 c) -3 d) x=81 e) x=4 f) x=12

## Lösungen zu C

1. a) 0 b) unbestimmt divergent c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ d) 1

e) 3 f) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

2. a) $\frac{1}{2}$ b) $\infty$ c) 1 d) -2 e) $e^{\frac{6}{5}}$ f) –sin(x)

3. a) Hebbare Unstetigkeit = Lücke in $x_0 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \frac{3}{5}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \frac{3}{5}$,

$$f_E(x) = \begin{cases} 3\frac{\sin(2x)}{10x}, & if\ x \neq 0 \\ \frac{5}{3}, & else \end{cases}$$

b) Polstellen für alle $x \in \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \infty,\ \forall x \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

c) Sprung in $x_0 = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$

4. a) $\ln\left(\dfrac{b^2}{a^2}\right)$ b) $\ln(a)$ c) $\dfrac{e^2}{3}$ d) $-\dfrac{2}{5}$

# Übung zur Differentialrechnung 1

## A) Aufgaben zur Vorbereitung

1. Bestimmen Sie $D_f$ und die erste Ableitung von:

a) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + 5$ b) $y = 5\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt{x^5} + \frac{2}{x}$

c) $y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ d) $y = \frac{x^2 - 1}{(x-2)^2}$

e) $f(x) = x^3 \ln x$ f) $f(x) = x^2 e^x$

g) $f(x) = \ln(-x^2 + x + 2)$ h) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+5}}$

2. Was ist die geometrische Interpretation der 1. Ableitung einer Funktion f(x) an der Stelle $x_0$? Schreiben Sie diese Beziehung in einer Formel auf.

3. Unter welchem Winkel schneidet $y = 10e^{2x-1} - 10$ die x – Achse?

4. Bestimmen Sie das Polynom 2. Grades $P(x) = ax^2 + bx + c$ , für das gilt:
P(-1) = - 5 P(1) = - 1 P'(1) = - 4

## B) Seminaraufgaben

1. Bestimmen Sie $D_f$ und die erste Ableitung von:

a) $f(x) = x \sin x + x^2 \cos x$ b) $y = e^{-x}(\sin x + \cos x)$

c) $y = \sqrt{x} \cdot \sin(2x)$ d) $f(x) = x \cdot \arctan x^2$

e) $f(x) = \ln(\sin\sqrt{x})$ f) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$

g) $f(x) = \ln\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$ h) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^x \cdot \ln x$

2. a) Der Radius einer Kugel wird mit $x = (5 \pm 0{,}01)$ cm gemessen. Geben Sie eine Abschätzung für den absoluten und relativen Fehler des Kugelvolumens an.
b) Mit welchem relativen Fehler muß man den Radius der Kugel messen, damit man den relativen Fehler des Volumens auf 1% schätzen kann?

3. Bestimmen Sie mittels logarithmischer Differentiation die erste Ableitung der folgenden Funktionen (x > 0, falls nicht anders angegeben):

a) $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ b) $y = (\ln x)^x$ für x > 1

c) $y = x^a a^x$ , a > 0 d) $y = x^{\frac{1}{x}}$

## C) Aufgaben zur Nachbereitung

1. Bestimmen Sie die erste Ableitung von:

a) $f(x) = \sqrt[5]{x^8} + 2x^4 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \ln(e) \cdot x$ b) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$

c) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ d) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

e) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$ f) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{2px}}$

g) $f(x) = x^{\cos x}$ h) $f(x) = (2x)^{\sin x}$

2. a) Die Kanten eines Würfels werden mit $\mathrm{x} = (5 \pm 0,01)$ cm gemessen. Geben Sie eine Abschätzung für den absoluten und relativen Fehler des Volumens an. b) Mit welchem relativen Fehler muss man die Kantenlänge des Würfels messen, um den relativen Fehler des Volumens auf 1 % schätzen zu können?

## Lösungen zum Teil A

1. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\};\ f'(x) = x^2 - 4x - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3}$ b) $\mathrm{D_f} = \mathbb{R}^+;\ \mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{10}{3\sqrt[3]{\mathrm{x}}} - \frac{15}{2}\sqrt{\mathrm{x}^3} - \frac{2}{\mathrm{x}^2}$

c) $\mathrm{D_f} = \mathbb{R} \setminus \{2\pi\mathrm{k}; \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\};\ \mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{\cos \mathrm{x} - 1}$ d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\};\ f'(x) = \frac{2-4x}{(x-2)^3}$

e) $D_f = \mathbb{R}^+;\ f'(x) = x^2(3\ln(x)+1)$ f) $D_f = \mathbb{R};\ f'(x) = x(x+2)e^x$

g) $D_f = (-1;2);\ f'(x) = \frac{-2x+1}{-x^2+x+2}$ h) $D_f = \mathbb{R};\ f'(x) = \frac{xe^{\sqrt{x^2+5}}}{\sqrt{x^2+5}}$

2. s. Skript
3. $\alpha \approx 87{,}14°$
4. $\mathrm{P}(\mathrm{x}) = -3\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{x}$

## Lösungen zum Teil C

1. a) $f'(x) = \frac{8}{5}\sqrt[5]{x^3} + 8x^3 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} + 1$ b) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\ln(x) + 1\right)$

c) $f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$ d) $f'(x) = \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$

e) $f'(x) = -\frac{4x}{x^4 - 1}$ f) $f'(x) = \frac{p}{2\sqrt{1+\sqrt{2px}}\sqrt{2px}}$

g) $f'(x) = x^{\cos(x)}\left(-\sin(x)\ln(x) + \frac{\cos(x)}{x}\right)$ h) $f'(x) = \left(2x\right)^{\sin(x)}\left(\cos(x)\ln(2x) + \frac{\sin(x)}{x}\right)$

# Übung zur Differentialrechnung 2

## A) Aufgaben zur Vorbereitung

1. Bestimmen Sie die Intervalle, in denen $y = f(x)$ monoton ist:

   a) $y = x^4 - 4x^3$  b) $y = \dfrac{3x}{1+2x^2}$

2. Berechnen Sie nach der Regel von L'Hospital:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$  b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x-a}$

3. Führen Sie für folgende Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

   a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$  b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x-3}$

## B) Seminaraufgaben

1. Berechnen Sie folgende Grenzwerte mit der Regel von L' HOSPITAL:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$  b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\tan 3x}$  c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x}{\ln x}$

   d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$  e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 8}$  f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan x}{\tan(3x)}$

   g) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$  h) $\lim\limits_{x\to +0} (x \ln x)$  i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$

2. Führen Sie für folgende Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

   a) $y = x \ln^2 x$  b) $f(x) = e^x \left(x^2 - 2x + 2\right)$

3. Bestimmen Sie $D_f$ und alle 1. partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen

   a) $f(x,y) = x^5 + y^3 + x^2y^3 + (x^2 + y)^3$  b) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^4)$

   c) $f(x,y) = y^x$  d) $f(x,y) = (x^2 - y)e^{x+y}$

## C) Aufgaben zur Nachbereitung

1. Berechnen Sie folgende Grenzwerte mit der Regel von L' HOSPITAL:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$  b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$  c) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\ln x$

   d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 \ln x$  e) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x};\quad n \in \mathbb{N}$  f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$

2. Führen Sie für folgende Funktionen eine Kurvendiskussion durch:

a) $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$ b) $y = \ln(x^2 - 4x + 5)$

3. Bestimmen Sie $D_f$ und alle 1. partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen

a) $f(x,y) = x^3 + xy^5 + x^2y + y^3$ b) $f(x,y) = \sqrt{1+2x^2-3y^2}$

c) $f(x,y) = x^y$ d) $f(x,y) = \ln\dfrac{x^2y}{x-y}$

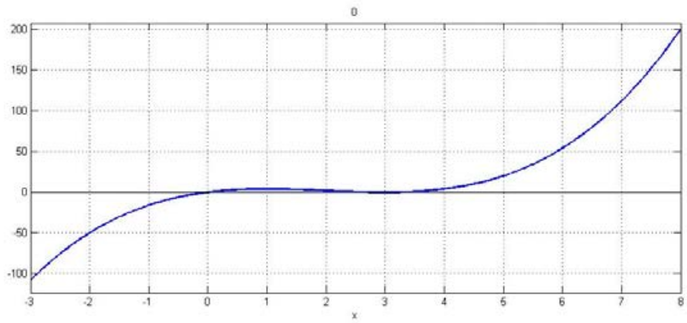
## Lösungen zum Teil A

1. a) monoton wachsend für $x \geq 3$, monoton fallend für $x \leq 3$

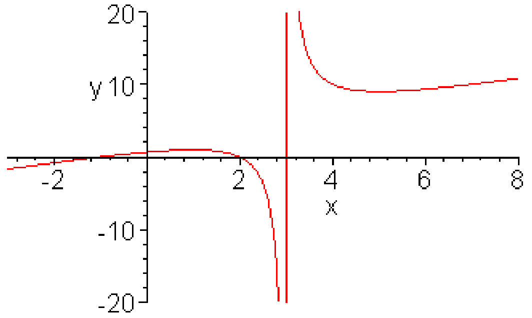
b) monoton wachsend für $|x| \leq \sqrt{\frac{1}{2}}$, monoton fallend für $|x| \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$

2. a) 1 b) $n\,a^{n-1}$

3. a) Db: $\mathbb{R}$
Nullstellen: $N_1(0,0)$, $N_2(3,0)$
Unstetigkeit: keine
Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$,
Extrema: Max(1; 4), Min $(3;0)$
Wendepunkte: W(2; 2)
Wb: $\mathbb{R}$




b) Db: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
Nullstelle: N(-1,0)
Unstetigkeit: x = 3: ungerader Pol,
Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $y_A = x + 2$
Extrema: Min(5,9) Max $(1,1)$
Wendepunkte: keine
Wb: $\mathbb{R} \setminus (1,9)$




## Lösungen zum Teil C

1. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{7}{4}$ c),d),e) 0 f) 1

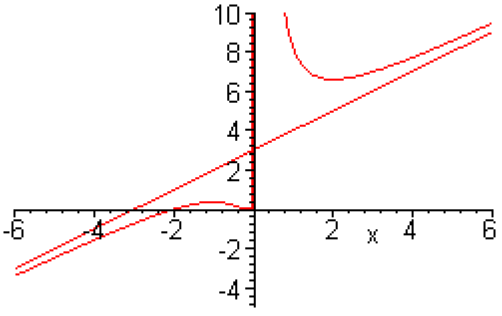
2. a) Db: $R \setminus \{0\}$,
Nullstelle: N(-2,0), Unstetigkeit Pol bei x = 0
Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, Asymptote: $y_A = x+3$

Monotonie: wachsend $(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$, da $y' = e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{x+2}{x^2}\right) > 0$

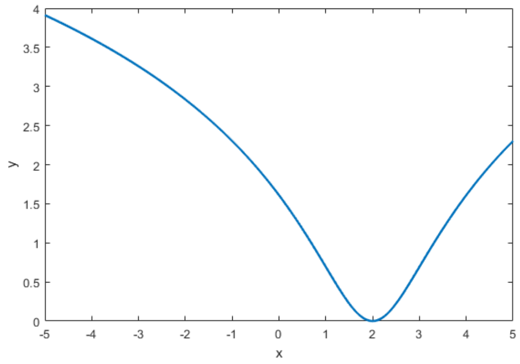
fallend $[-1,0)\cup(0,2]$, da $y' < 0$

Extrema: $(-1;0,37)$ lok. Max $(2;6,6)$ lok. Min

Wendepunkte: $(-0,4;0,13)$, für $x > -0,4$ ist $f''(x) > 0 \Rightarrow$ konvex
Für $x < -0,4$ ist $f''(x) < 0 \Rightarrow$ konkav




b) Df: $\mathbb{R}$
Nullstelle: $x_N = 2$
keine Unstetigkeiten, keine Asymptoten
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \infty$
Extrema: Minimum in (2;0)
Wendepunkte: $x_{W1} = 1$; $x_{W2} = 3$




3. a) $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 3x^2 + y^5 + 2xy$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 5xy^4 + x^2 + 3y^2$, $D_f = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

b) $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{2x}{\sqrt{1+2x^2-3y^2}}$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -\frac{3y}{\sqrt{1+2x^2-3y^2}}$

$$D_f = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, 2x^2 - 3y^2 \geq -1$$

c) $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = yx^{y-1}$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \ln(x)x^y$, $D_f = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x > 0$

d) $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{x-2y}{x^2-xy}$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{x}{xy-y^2}$,

$$D_f = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \left( x > 0 \wedge x < y < \frac{x}{x^2+1} \right) \vee \left( x < 0 \wedge \frac{x}{x^2+1} < y < x \right)$$

# Übung Integrationstechniken

## A) Aufgaben zur Vorbereitung

1. Prägen Sie sich die Grundintegrale ein.
2. Integrieren Sie unter Verwendung bekannter Grundintegrale:

a) $\int\left(x^4+2x^2+3x+\frac{1}{x}\right)dx$ b) $\int\left(\sqrt{x^3}+\sqrt[7]{x^3}\right)dx$

c) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ d) $\int\left(\frac{5}{1+x^2}+3^x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

e) $\int\left(\frac{1}{2x}+\frac{2}{x^2}+\frac{x^3}{x^{10}}\right)dx$ f) $\int\frac{10x^8+3}{x^4}\,dx$

g) $\int\left(\frac{\ln t}{a}+\log(10)\right)dx$ h) $\int\left(\frac{1}{5}\sin x+\cos x+\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$

i) $\int\left(e^{-2x}+7t\right)dt$ j) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx$

3. Integrieren Sie mittels linearer Substitution:

a) $\int e^{2x+3}dx$ b) $\int\sqrt{-3-2x}\,dx$ c) $\int e^{-ax}dx$ d) $\int\sin(5x)dx$

## B) Übungsaufgaben

1. Integrieren Sie durch Umformen des Integranden:

a) $\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx$ b) $\int\frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$ c) $\int\frac{\sqrt{x}-1}{x}dx$ d) $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$

2. Integrieren Sie durch Substitution:

a) $\int\frac{3}{\cos^2(6x-1)}dx$ b) $\int x^3\sqrt{4-x^2}\,dx$ c) $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

d) $\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$ e) $\int\frac{2x-5}{x^2-5x+7}dx$ f) $\int(6x+3)e^{x^2+x+5}\,dx$

3. Lösen Sie durch partielle Integration:

a) $\int\sqrt{x}\ln x\,dx$ b) $\int x\cos x\,dx$ c) $\int x^3e^x\,dx$ d) $\int\ln x\,dx$ e)* $\int e^x\sin x\,dx$

**4.** Erstellen Sie eine Tabelle mit folgenden Integralen:

a) $\int (ax+b)dx$  b) $\int (ax+b)^2 dx$  c) $\int \sin(cx)dx$

d) $\int \cos(cx)dx$  e) $\int e^{cx}dx$  f) $\int (ax+b)\sin(cx)dx$

g) $\int (ax+b)\cos(cx)dx$  h) $\int (ax+b)e^{cx}dx$  i) $\int x^2\sin(cx)dx$

j) $\int x^2\cos(cx)dx$  k) $\int x^2 e^{cx}dx$

## C) Aufgaben zur Nachbereitung

Lösen Sie die folgenden Integrale! ((P)➔ partielle Integration, (U)➔Umformung des Integranden und Grundintegral, (S)➔Substitution)

a) $\int \arctan x\, dx$ (P)  b) $\int (4x-9)^{10}\, dx$ (S)  c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ (S)

d) $\int x^2 \sin x\, dx$ (P)  e) $\int \sqrt{1-x}\, dx$ (S)  f) $\int 3e^x\sqrt{e^x+1}\, dx$

g)* $\int e^x \cos x\, dx$  h) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\, dx$  i) $\int x\sqrt{1+x}\, dx$

j) $\int \cos^2 5x\, dx$  k) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$  l) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$

m) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$  n) $\int \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$  o) $\int x^3\sqrt{x^2+1}\, dx$

p) $\int (18x^3+3x)\sqrt{3x^4+x^2}\,dx$  q) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\, dx$  r) $\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx$

## Lösungen zum Teil A

1. a) $\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\ln|x|+C$  b) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{7}{10}\sqrt[7]{x^{10}}+C$

c) $2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}+C$  d) $5\arctan x+\frac{3^x}{\ln 3}+\tan x+C$

e) $\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{2}{x}-\frac{1}{6x^6}+C$  f) $2x^5-\frac{1}{x^3}+C$

g) $\frac{\ln t}{a}x+x+C$  h) $-\frac{1}{5}\cos x+\sin x-3\cot+C$

i) $te^{-2x}+\frac{7}{2}t^2+C$  j) $-\cot x-\tan x+C$

2. a) $\frac{1}{2}e^{2x+3}+C$  b) $-\frac{1}{3}\sqrt{(-3-2x)^3}+C$

c) $-\frac{1}{a}e^{-ax}+C$  d) $-\frac{1}{5}\cos(5x)+C$

**Lösungen zum Teil C**

a) $x\arctan x-\dfrac{\ln(1+x^2)}{2}+C$

b) $\dfrac{1}{44}(4x-9)^{11}+C$

c) $2\arctan\sqrt{x}+C$

d) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$

e) $-\dfrac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}+C$

f) $2\sqrt{(e^x+1)^3}+C$

g) $\dfrac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)+C$

h) $-\cot x+\tan x+C$

i) $\dfrac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5}-\dfrac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+C$

j) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin 10x}{10}+x\right)+C$

k) $\ln\left|\ln x\right|+C$

l) $\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C$

m) $\dfrac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$

n) $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}+C$

o) $\dfrac{1}{5}(x^2+1)^{\frac{5}{2}}-\dfrac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C$

p) $\sqrt{(3x^4+x^2)^3}+C$

q) $\arctan\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+C$

r) $\ln\sqrt{e^{2x}+1}+C$