Aufgabenserie 1 (Schuljahr 2023/2024)

Einsendungen bitte bis 01.10.2023 an Prof. Cordula Bernert, Neusorger Str. 10, 09648 Altmittweida oder cbernert@hs-mittweida.de (Jede Zusendung wird nach Empfang elektronisch bestätigt. Sollte diese Antwort ausbleiben, fragen Sie bitte elektronisch nach, um Datenverluste zu vermeiden.)

Aufgabe 1-1.
Untersuchen Sie die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} a+b &= 2 && (1)\\ \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b} &= \frac{4}{3} && (2) \end{aligned}$$

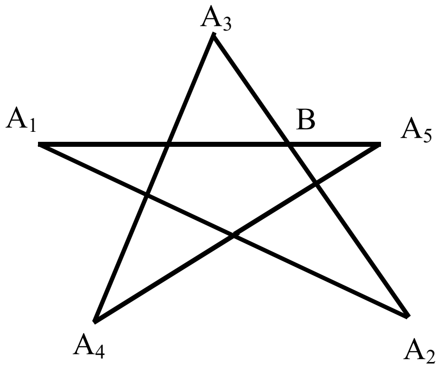
(a) Zeigen Sie, dass das Paar $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ keine gemeinsame Lösung von (1) und (2) ist.

(b) Geben Sie eine gemeinsame Lösung (a, b) beider Gleichungen an.

(c) Bestimmen Sie alle Paare (a, b) rationaler Zahlen, die gemeinsame Lösung beider Gleichungen sind.

(5 Punkte)

Aufgabe 1-2.
Man ermittle die Summe der Größen der Innenwinkel an den fünf Spitzen des dargestellten fünfzackigen Sterns!
(5 Punkte)



Aufgabe 1-3.
Gegeben sind zwei Dreiecke, das Dreieck $\triangle ABC$ mit dem Flächeninhalt A_1 und das Dreieck $\triangle DEF$ mit dem Flächeninhalt A_2. Man weise nach, dass man aus den beiden Dreiecken mit Hilfe geometrischer Grundkonstruktionen ein drittes Dreieck konstruieren kann, das den Flächeninhalt $A_1 + A_2$ hat. (Hinweis: Es ist eine Konstruktionsbeschreibung mit Begründung anzugeben, um nachzuweisen, dass das konstruierte Dreieck die geforderte Eigenschaft hat.)
(6 Punkte)

Aufgabe 1-4.
Man zeige: Es gibt ein rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$, dass sich in 5 untereinander kongruente und jeweils zum Dreieck $\triangle ABC$ ähnliche Dreiecke zerlegen lässt. (D.h. das Dreieck $\triangle ABC$ ist ein sogenanntes fünfteiliges Gerücht). Man gebe die Seitenlängen des Dreiecks und die Zerlegung an. (Hinweis: Es ist begründen, dass die Zerlegung die geforderte Eigenschaft hat.)

(6 Punkte)

Bitte wenden!

Aus den beiden folgenden Aufgaben können Sie eine auswählen. Für die Aufgabenteile (a) und (b) werden maximal je 2 Punkte vergeben, für (c) 4 Punkte, so dass sich insgesamt 8 Punkte pro Aufgabe erreichen lassen. Bearbeiten Sie beide Aufgaben, so wird nur die Aufgabe mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Ist jedoch die Punktesumme für beide Aufgaben größer als 8, erhalten Sie einen Zusatzpunk, ist sie größer als 12, gibt es zwei Zusatzpunkte. Für die gesamte Aufgabenserie kann man also maximal 32 Punkte erreichen.

Aufgabe 1-5A.
Gegeben sei eine Reihe von 9 nummerierten Plätzen (1 bis 9). Schreibt man auf diese Plätze die Ziffern 1 bis 9 in beliebiger Reihenfolge F (jede Ziffer genau einmal) und bezeichnet die Summe aus den neun absoluten Differenzen von Platznummer und Ziffer auf dem Platz mit $U(F)$, so definiert $U(F)$ eine Unordnung von F.

(a) Man finde eine Reihenfolge mit dem Unordnungswert 26.

(b) Man beweise: Der Wert der Unordnung U ist stets eine gerade Zahl.

(c) Man finde den maximalen Wert der Unordnung U, der unter diesen Bedingungen erreichbar ist.

Aufgabe 1-5B.
Für das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen schreibt man $n!$ („n-Fakultät“):

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

(a) Man finde die größte ganze Zahl s, sodass 2019! durch 2019^s teilbar ist.

(b) Man beweise, dass die Summe der Fakultäten zweier verschiedener Zahlen größer 1 keine Fakultätszahl ergibt, dass also die Gleichung $a! + b! = c!$ für $a > b > 1$ keine Lösungen besitzt.

(c) Man finde alle maximal dreistelligen Zahlen, die gleich der Summe der Fakultäten ihrer Ziffern sind.