Aufgabenserie 2 (Schuljahr 2023/2024)

Einsendungen bitte bis 11.11.2023 an Prof. Cordula Bernert, Neusorger Str. 10, 09648 Altmittweida oder cbernert@hs-mittweida.de (Jede Zusendung wird nach Empfang elektronisch bestätigt. Sollte diese Antwort ausbleiben, fragen Sie bitte elektronisch nach, um Datenverluste zu vermeiden.)

Aufgabe 2-1.
Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n, bei der sowohl deren Quersumme $Q(n)$ als auch die Quersumme $Q(n+1)$ des Nachfolgers $(n+1)$ durch 11 teilbar ist.

(5 Punkte)

Aufgabe 2-2.
Jemand hat für einen Einkauf die Hälfte seines verfügbaren Geldes ausgegeben und danach genauso viele Cent wie vorher Euro und halb so viele Euro wie vorher Cent in seinem Portemonnaie. Wie viel Geld hat er nach dem Einkauf?

(5 Punkte)

Aufgabe 2-3.
Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ mit dem Flächeninhalt $A_{\triangle ABC} = 1$. Es sei M der Mittelpunkt von $\overline{BC}$ und P der Mittelpunkt von $\overline{AM}$. Weiter schneide die Gerade $\overline{BP}$ die Seite $\overline{AC}$ in einem Punkt Q. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $\square MCQP$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2-4.
Gegeben seien ein Dreieck $\triangle ABC$ und auf $\overline{AB}$ ein Punkt D. Man konstruiere einen Punkt E auf einer der beiden anderen Dreieckseiten so, dass $\overline{DE}$ die Dreieckfläche in zwei flächengleiche Teile zerlegt. Die Konstruktion ist zu beschreiben, zu begründen und zu diskutieren.

(6 Punkte)

Aus den beiden folgenden Aufgaben können Sie eine auswählen. Für die Aufgabenteile (a) und (b) werden maximal je 2 Punkte vergeben, für (c) 4 Punkte, so dass sich insgesamt 8 Punkte pro Aufgabe erreichen lassen. Bearbeiten Sie beide Aufgaben, so wird nur die Aufgabe mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Ist jedoch die Punktesumme für beide Aufgaben größer als 8, erhalten Sie einen Zusatzpunk, ist sie größer als 12, gibt es zwei Zusatzpunkte. Für die gesamte Aufgabenserie kann man also maximal 32 Punkte erreichen.

Aufgabe 2-5A.

(a) Man untersuche, ob es keine, endlich viele oder unendlich viele Zahlentripel (k, m, n) mit $n > m > 1$; $k, m, n \in \mathbb{N}$ gibt, die die Gleichung $m! \cdot n! = k^2$ erfüllen.

(b) Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 24$ endet die Zahl $n!$ auf mindestens $\frac{n}{5}$ Nullen.

(c) Man zeige, dass die Dezimalzahl $0,1!\ 2!\ 3!...$ (also nach dem Komma die Aneinanderreihung der Ziffern der Fakultäten, d.h. $0,1\ 2\ 6\ 24\ 120...$) irrational ist.
(Hinweis: Eine rationale Zahl hat entweder eine abbrechende oder eine periodische Dezimaldarstellung.)

Bitte wenden!

Aufgabe 2-5B.
In der Ebene seien endlich viele Punkte gegeben. Jeden von diesen verbinde man mit seinem nächstgelegenen Punkt durch eine Gerade. Alle Abstände seien verschieden, daher ist es eindeutig, welcher Punkt jedem Punkt am nächsten liegt.

(a) Man zeige, dass die entstehende Figur keine sich schneidende Strecken enthält.

(b) Man zeige, dass die entstehende Figur kein geschlossenes Polygon enthält.
(Hinweis: Ein ebenes Polygon stellt einen Streckenzug $\overline{P_1, P_2, \ldots, P_n}$ dar. Ist $P_1 = P_n$, so heißt das Polygon geschlossen)

(c) Man beweise: Bilden je drei Punkte der gegebenen Menge ein Dreieck, dessen Fläche kleiner oder gleich 1 Flächeneinheit (FE) ist, so gibt es ein Dreieck mit der Fläche von 4 FE, das alle gegebenen Punkte enthält.