Aufgabenserie 4 (Schuljahr 2021/2022)

Einsendungen bitte bis 14.02.2024 an Prof. Cordula Bernert, Neusorger Str. 10, 09648 Altmittweida oder cbernert@hs-mittweida.de (Jede Zusendung wird nach Empfang elektronisch bestätigt. Sollte diese Antwort ausbleiben, fragen Sie bitte elektronisch nach, um Datenverluste zu vermeiden.)

Aufgabe 4-1.
Man bestimme alle Paare $(n;k)$ mit natürlichen Zahlen n und k, die folgender Gleichung genügen:

$$n! - 56k + 10^n = 0.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4-2.
Für welche positiven ganzen Zahlen n gibt es eine Quadratzahl, deren letzte n Ziffern in der Dezimaldarstellung sämtlich gleich 4 sind?

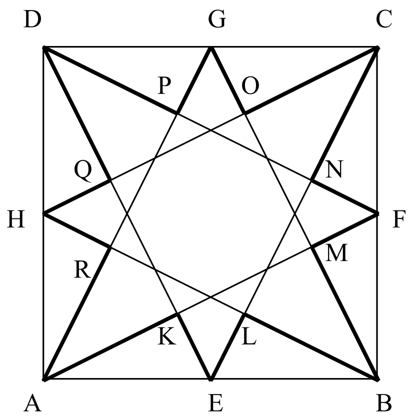
(5 Punkte)

Aufgabe 4-3. .
Man finde alle Paare $(p;q)$ von Primzahlen, für die es ganze Zahlen x und y gibt, sodass folgende Gleichungen gelten:

$$p = x^2 - y \quad \text{und} \quad q = y^2 + 3x - 7.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 4-4.
In einem Quadrat $\square ABCD$ seien die Mittelpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ mit E, F, G bzw. H bezeichnet. In dem Streckenzug $AFDECHBGA$ auftretende Schnittpunkte seien so mit K, L, M, N, O, P, Q, R bezeichnet, dass AKELBMFNCOGPDQHR ein (nichtkonvexes) Sechzehneck ist (s. Skizze). Man ermittle das Verhältnis des Flächeninhaltes dieses Sechzehnecks und des Flächeninhaltes des Quadrates ABCD.



(6 Punkte)

Bitte wenden!

Aus den beiden folgenden Aufgaben können Sie eine auswählen. Für die Aufgabenteile (a) und (b) werden maximal je 2 Punkte vergeben, für (c) 4 Punkte, so dass sich insgesamt 8 Punkte pro Aufgabe erreichen lassen. Bearbeiten Sie beide Aufgaben, so wird nur die Aufgabe mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Ist jedoch die Punktesumme für beide Aufgaben größer als 8, erhalten Sie einen Zusatzpunk, ist sie größer als 12, gibt es zwei Zusatzpunkte. Für die gesamte Aufgabenserie kann man also maximal 32 Punkte erreichen.

Aufgabe 4-5A.
Es sei P ein Polynom vom Grad n ($n > 0$) mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, a_1, ..., a_n$, also

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k = a_n \cdot x^n ... + a_1 \cdot x + a_0.$$

(a) Man zeige, dass nicht gleichzeitig $P(2015) = 2017$ und $P(2019) = 2019$ gelten kann.

(b) Ist x eine rationale Nullstelle von P (also $P(x) = 0$) und gilt $a_n = 1$, so ist x ganzzahlig.

(c) Ist sowohl $P(2019)$ als auch $P(2020)$ ungerade, so besitzt P keine ganzzahlige Nullstelle.

Aufgabe 4-5B.
Es sei n eine beliebige natürliche Zahl, die in der Dezimaldarstellung aus den Ziffern $a_0, a_1, ..., a_k$ bestehe. Unter der Quadratquersumme QQS von n verstehe man die Summe der Quadratzahlen ihrer Ziffern, also den Ausdruck

$$QQS(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i^2.$$

Ausgehend von einer beliebigen Zahl $n = n_0$ erhält man durch wiederholte Anwendung der Bildung der Quadratquersumme die „*Folge der Quadratquersummen von n*", also $n_0, n_1, ...$ mit

$$n_{j+1} = QQS\left(n_j\right); \quad j = 0, 1, 2, ...$$

(a) Man vergleiche die Folgen der Quadratquersummen von 2019 und 2020.

(b) Man gebe vier (wesentlich verschiedene) dreistellige Zahlen an, bei denen in den Folgen der Quadratquersummen die Zahl 1 auftritt!
(Bemerkung: Zwei Zahlen, die sich nur durch die Anordnung ihrer Ziffern unterscheiden, gelten im Sinne der Quadratquersummen nicht als wesentlich verschieden.)

(c) Man beweise: Für jede natürliche Zahl n ist die Folge der Quadratquersummen (ab einem bestimmten Folgenglied) periodisch.

Die Aufgaben 4-2. bis 4-4. sind Mathematik-Olympiadeaufgaben aus verschiedenen Jahrgängen.