

**Korrespondenzzirkel Mathematik**

**Arbeitsmaterial für Klasse 8**

<b>Inhalt</b>	<b>Seite</b>
1. Grundlagen aus Logik und Mathematik	1
1.1. Das Dirichletsche Schubfachprinzip	2
1.2. Indirekte Beweise	3
1.3. Aussageformen und Mengen	5
2. Geometrie	7
2.1. Einige Begriffe und Sätze aus der Stereometrie	7
2.2. Die algebraische Methode bei Konstruktionsaufgaben	10
3. Zahlentheorie	12
3.1. Lineare Kongruenzen	12
3.2. Lineare diophantische Gleichungen	14
4. Gleichungen, Ungleichungen und Funktionen	16
4.1. Einige wichtige Ungleichungen	16
4.2. Funktionen und ihre Graphen	16
4.3. Zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen	19
Literaturhinweise	20

## **1. GRUNDLAGEN AUS LOGIK UND MATHEMATIK**

### **1.1. Das Dirichletsche Schubfachprinzip**

Es gilt folgende einfache Aussage:

Werden mehr als  $n$  Elemente in  $n$  Schubfächer verteilt, dann muss - unabhängig von der Verteilung - mindestens ein Schubfach mehr als ein Element enthalten ( $n \geq 1$  - beliebige natürliche Zahl) .

Mit diesem Prinzip kann man Aufgaben aus allen Bereichen der Mathematik lösen.

Versuche, die folgenden einfachen Aufgaben selbst zu lösen:

*Aufgabe 1):* Beweise: In einer Schule mit 400 Schülern gibt es mindestens zwei, die am gleichen Tag Geburtstag haben.

Für welche Zahl von Schülern bleibt diese Behauptung richtig?

*Aufgabe 2):* Gibt es eine (hinreichend große) Schüleranzahl, für die man behaupten kann, dass mit Sicherheit an zwei verschiedenen Tagen jeweils mehr als ein Schüler Geburtstag hat? (Nein)

*Aufgabe 3):* Beweise: Unter  $n+1$  ganzen Zahlen kann man stets mindestens zwei finden, deren Differenz durch  $n$  teilbar ist ( $n \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) .

(Hinweis: Betrachte die Reste der  $n+1$  Zahlen bei Division durch die Zahl  $n$  .)

**Aufgabe 4):** Eine Schießscheibe habe die Form eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge  $2$ . Sie werde fünfmal getroffen. Zeige, dass es dann stets mindestens zwei Einschusslöcher gibt, deren Abstand kleiner oder gleich  $1$  ist.

(Hinweis: Zerlege das Dreieck in vier kongruente Dreiecke mit der Seitenlänge  $1$ .)

Wir betrachten nun zwei etwas schwerere Aufgaben:

**Aufgabe 5):** In einem Saal seien  $n$  ( $\geq 2$ ) Personen anwesend. Zeige, dass es unter ihnen stets mindestens zwei Personen gibt, die im Saal dieselbe Anzahl von Bekannten haben.

**Lösung:** Wir ordnen einer Person, die im Saal genau  $i$  Bekannte hat, das Schubfach mit der Nummer  $i$  zu.

Die  $n$  Personen verteilen sich also auf die Schubfächer  $0, 1, \dots, n-1$ . Eines der beiden Schubfächer mit der Nummer  $0$  oder der Nummer  $n-1$  muss aber frei bleiben, weil es nicht möglich ist, dass eine Person niemanden im Saal kennt, eine andere dagegen alle. Folglich werden die  $n$  Personen auf nur  $n-1$  Schubfächer verteilt; folglich gibt es mindestens ein Schubfach, dem mindestens zwei Personen zugeordnet sind.

**Aufgabe 6):** Gegeben seien  $n$  nicht notwendig verschiedene ganze Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Zeige, dass es stets mindestens eine Teilmenge dieser Zahlen gibt, deren Summe durch  $n$  teilbar ist ( $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ ).

**Lösung:** Wir betrachten die  $n$  Zahlen  $a_1, (a_1+a_2), (a_1+a_2+a_3), \dots, (a_1+a_2+\dots+a_n)$ .

Falls eine dieser Zahlen durch  $n$  teilbar ist, gilt die Behauptung. Anderenfalls lassen mindestens zwei dieser Zahlen bei Division durch  $n$  den gleichen Rest. (Man wähle die  $n-1$  Reste  $1, 2, \dots, n-1$  als Schubfächer.) Dann ist aber die Differenz dieser beiden Zahlen durch  $n$  teilbar. Daraus folgt leicht die Behauptung.

Eine erste *Verallgemeinerung des Dirichletschen Schubfachprinzips* lautet:

Werden  $nk+1$  Elemente in  $n$  Schubfächer verteilt, so enthält mindestens ein Schubfach mehr als  $k$  Elemente, d.h. mindestens  $k+1$  Elemente.

(Mache dir diese Aussage zunächst für die Spezialfälle  $k=3$  und  $k=4$  klar! Beachte, dass man  $nk$  Elemente stets so in  $n$  Schubfächer verteilen kann, dass in jedem Schubfach genau  $k$  Elemente liegen.)

**Aufgabe 7):** Wie viele Schüler muss eine Schule mindestens haben, damit mit Sicherheit mindestens fünf von ihnen am gleichen Tag Geburtstag haben?

**Lösung:** Es gilt hier  $n = 365$  (Anzahl der Tage eines Jahres) sowie  $k+1 = 5$ , also  $k = 4$  und somit  $nk+1 = 1461$ . Folglich muss die Schule mindestens  $1461$  Schüler haben, damit die genannte Bedingung erfüllt ist.

Wenn man weiß, dass eine Aufgabe mit dem Schubfachprinzip lösbar ist, dann kommt es nur darauf an, die "Elemente" und die "Schubfächer" geschickt zu bestimmen. Hierin kann die Hauptschwierigkeit einer solchen Aufgabe liegen.

Wie sieht man einer Aufgabe an, dass sie mit dem Schubfachprinzip lösbar ist?

Hier kann man folgende Faustregel benutzen: Eine Aufgabe lässt sich mit dem Schubfachprinzip lösen, wenn in der Aufgabenstellung eine Menge beschrieben wird, in der zwei oder mehr Elemente gleich sein oder eine gewisse Bedingung erfüllen sollen. Dabei kommt in der Aufgabenstellung häufig die Formulierung "mindestens" vor. Im allgemeinen sind Existenzaussagen über endliche Mengen mit dem Schubfachprinzip beweisbar.

Häufig kann der Aufgabentext so umformuliert werden, dass diese äußeren Merkmale sichtbar werden.

## 1.2. Indirekte Beweise

(1) Sei  $A$  ein beliebiger Ausdruck (d.h. eine Aussage  $A$  oder eine Aussageform  $H(x,y,\dots,z)$ ). Dann wollen wir  $(A \wedge \text{nicht } A)$  *Widerspruch* nennen und mit  $\zeta$  bezeichnen.

Wenn man zeigen kann, dass  $A \Rightarrow \zeta$  gilt, dann ist die Aussage  $A$  falsch.

Wenn man zeigen kann, dass  $H(x,y,\dots,z) \Rightarrow \zeta$  gilt, dann ist die Aussageform  $H(x,y,\dots,z)$  kontradiktorisch, d.h. ihre Lösungsmenge ist leer.

(2) *Die logische Struktur indirekter Beweise:*

Satz (S) :  $V \Rightarrow B$  . Gegenannahme GA: "nicht B"

Indirekter Beweis von (S) :

Man zeigt, dass  $(V \wedge \text{nicht } B) \Rightarrow \zeta$  gilt.

Folglich ist (nicht B) falsch, da  $V$  als wahr angenommen wird.

Folglich ist  $B$  wahr und (da  $V$  als wahr angenommen wird) ist auch der Satz  $V \Rightarrow B$  wahr, w.z.b.w. .

Den Nachweis, dass  $(V \wedge \text{nicht } B \Rightarrow \zeta)$  gilt, kann man in Form des für direkte Beweise verwendeten Beweisschemas führen.

(3) *Bei indirekten Beweisen können Widersprüche auftreten zu*

- (a) einer Voraussetzung des Satzes ;
- (b) der Gegenannahme des Satzes ;
- (c) bereits abgeleiteten Feststellungen, zu bewiesenen Sätzen oder zu Axiomen.

(4) *Indirekte Beweise werden in folgenden Fällen häufig angewendet:*

- (a) Beweis von Umkehrungen bereits bewiesener Sätze ;
- (b) Beweis von Aussagen der Form "Es gibt kein  $x$  mit der Eigenschaft  $H(x)$ " ;
- (c) Beweis von Aussagen der Form "Es gibt höchstens ein  $x$  mit der Eigenschaft  $H(x)$ ".

(5) *Beim indirekten Beweis einer Umkehrung eines Satzes kann man oft*

- (a) auf Beweisgedanken zurückgreifen, die beim direkten Beweis des Ausgangssatzes verwendet wurden ;
- (b) den Ausgangssatz als Hilfsmittel verwenden .

Satz: "Wenn das Quadrat einer Zahl gerade ist, dann ist auch die Zahl selbst gerade. "

$V : 2|x^2, x \in \mathbb{N}$  ; Beh.:  $2|x$  ; GA : nicht  $2|x$  .

*Beweis (indirekt) :*

GA  $\Rightarrow$  (1) Es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $x = 2n+1$  ; [ Definition von  $2|x$  ; jede natürliche Zahl ist entweder gerade oder ungerade ] .

(1)  $\Rightarrow$  (2)  $x^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2+2n) + 1$  ; [ binomische Formel; Umformung] .

(2)  $\Rightarrow$  (3) Es gibt ein  $m \in \mathbb{N}$ , so dass  $x^2 = 2m+1$  ; [wenn  $n \in \mathbb{N}$ , dann auch  $(2n^2+2n) \in \mathbb{N}$ ]

(3)  $\Rightarrow$  (4) nicht  $2|x^2$  ; [ Definition der Teilbarkeit; jede natürliche Zahl ist entweder gerade oder ungerade ] .

(4),  $V \Rightarrow \zeta$  . [Die Feststellung (4) widerspricht der Voraussetzung des Satzes ] .

Damit ist gezeigt, dass  $V \Rightarrow \text{Beh.}$  gilt, w.z.b.w.

(Unser Satz ist die *Umkehrung* des Satzes  $2|x \Rightarrow 2|x^2$  . Beim direkten Beweis des Ausgangssatzes wird dieselbe Beweisidee verwendet.. Beim indirekten Beweis der Irrationalität von  $\sqrt{2}$  werden diese beiden Sätze als Hilfsmittel verwendet.)

**Satz:** Wenn  $a, b, c$  von Null verschiedene natürliche Zahlen sind, dann *gibt es höchstens* eine natürliche Zahl  $x$ , die Lösung der folgenden Gleichung ist:

$$a^x + b^x = c^x .$$

GA: Es gibt zwei natürliche Zahlen  $m, n$  mit  $m \neq n$ , die Lösung der obigen Gleichung sind.

**Beweis:** Es kann o.B.d.A. angenommen werden, dass  $m < n$  gilt.

GA  $\Rightarrow$  (1)  $a^m + b^m = c^m$  und  $a^n + b^n = c^n$  mit  $m < n$  .

(1)  $\Rightarrow$  (2)  $a < c$  und  $b < c$  ; [ weil  $b > 0$  und  $a > 0$  ].

(2)  $\Rightarrow$  (3)  $0 < \frac{a}{c} < 1$  und  $0 < \frac{b}{c} < 1$  ; [ weil  $c > 0$  ].

(3)  $\Rightarrow$  (4)  $0 < \left(\frac{a}{c}\right)^n < \left(\frac{a}{c}\right)^m$  und  $0 < \left(\frac{b}{c}\right)^n < \left(\frac{b}{c}\right)^m$  ; [ weil  $n > m > 0$  ].

(4)  $\Rightarrow$  (5)  $0 < \left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n < \left(\frac{a}{c}\right)^m + \left(\frac{b}{c}\right)^m$  ; [ Umformung ].

(1)  $\Rightarrow$  (6)  $\left(\frac{a}{c}\right)^n + \left(\frac{b}{c}\right)^n = \left(\frac{a}{c}\right)^m + \left(\frac{b}{c}\right)^m = 1$  ; [ weil  $c > 0$  ].

(5),(6)  $\Rightarrow \zeta$  . (*Widerspruch zwischen zwei abgeleiteten Feststellungen*)

Daraus folgt, dass die Gegenannahme falsch, die Behauptung und damit auch der zu beweisende Satz wahr ist, w.z.b.w.

**Satz:** Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Wir formen zunächst so um, dass eine *negierte Existenzaussage* entsteht.

**Satz:** Es gibt keine Primzahl  $p$ , so dass für alle anderen Primzahlen  $q$  gilt:  $p > q$  .

GA: Es gibt eine Primzahl  $p$ , so dass für alle anderen Primzahlen  $q$  gilt:  $p > q$  .

**Beweis:** Sei  $2, 3, 5, \dots, p_i, \dots, p$  die Folge der Primzahlen, die mit der angeblich größten Primzahl  $p$  endet.

Man bilde die Zahl  $P_n = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p_i \cdot \dots \cdot p) + 1$ , wobei  $n$  die Anzahl der Faktoren angibt.

Dann gilt (1)  $P_n$  lässt bei Division durch jedes der  $p_i$  stets den Rest 1 ; [ offensichtlich ] .

(1)  $\Rightarrow$  (2)  $P_n$  ist durch keine der Primzahlen  $p_i$  teilbar ; [Definition der Teilbarkeit].

Dann gilt (3)  $P_n > p$  ; [ das folgt aus der Definition von  $P_n$  ] .

(2),(3)  $\Rightarrow$  (4)  $P_n$  ist eine Primzahl, die größer als  $p$  ist, oder  $P_n$  ist in Primzahlen zerlegbar, die sämtlich größer als  $p$  sind .

GA,(4)  $\Rightarrow \zeta$  . (*Widerspruch zur Gegenannahme*)

Daraus folgt, dass die Gegenannahme falsch, die Behauptung und damit auch der zu beweisende Satz wahr ist, w.z.b.w.

(Bei diesem Beweis wird oft der Fehler begangen, dass aus (2) und (3) geschlussfolgert wird, dass  $P_n$  eine Primzahl sein muss. Folgendes Gegenbeispiel zeigt, dass das nicht stimmt:  $P_6 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$  .)

**Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes:**

$V_1$ :  $\sphericalangle APB$  ist Peripheriewinkel von  $k(M;r)$  über dem Bogen  $AB$  ;

$V_2$ :  $\sphericalangle AQB = \sphericalangle APB$  (wobei  $Q$  auf derselben Seite von  $AB$  liegt wie  $P$ ) ;

Beh.:  $\sphericalangle AQB$  ist Peripheriewinkel von  $k(M;r)$ , d.h.  $Q \in k(M;r)$  .

GA<sub>1</sub>:  $Q$  liegt außerhalb des Kreises  $k(M;r)$  ;

GA<sub>2</sub>:  $Q$  liegt innerhalb des Kreises  $k(M;r)$  ;

GA  $\Leftrightarrow (GA_1 \vee GA_2)$

(Bei indirekten Beweisen kommt es recht oft vor, dass eine *Fallunterscheidung* vorgenommen werden muss. In unserem Fall muss zweierlei gezeigt werden:

$$V_1 \wedge V_2 \wedge GA_1 \Rightarrow \text{↯} \quad \text{und} \quad V_1 \wedge V_2 \wedge GA_2 \Rightarrow \text{↯} .$$

Merke: Beim *indirekten Beweis einer Umkehrung* eines Satzes wird oft der *Ausgangssatz als Beweismittel* verwendet. )

*Beweis:*

Gelte  $\sphericalangle APB = \varphi$  und  $\sphericalangle AQB = \psi$  .

Aus  $GA_1$  folgt, dass es genau einen Punkt  $P'$  der Strecke  $\overline{AQ}$  gibt, der auf dem Kreis  $k(M;r)$  liegt.

Wegen  $V_2$  liegt  $P'$  auf derselben Seite von  $AB$  wie der Punkt  $P$  .

Also ist  $\sphericalangle AP'B$  ein Peripheriewinkel von  $k(M;r)$ , der über demselben Bogen liegt wie der Peripheriewinkel  $\sphericalangle APB$  .

Nach dem Peripheriewinkelsatz folgt hieraus

$$(1) \sphericalangle AP'B = \sphericalangle APB = \varphi .$$

Da  $P'$  auf der Strecke  $\overline{AQ}$  liegt, ist  $\sphericalangle AP'B$  ein Außenwinkel und  $\sphericalangle AQB = \sphericalangle P'QB = \psi$  ein nichtanliegender Innenwinkel im Dreieck  $P'BQ$  .

Nach dem Außenwinkelsatz folgt hieraus

$$(2) \sphericalangle AQB < \sphericalangle AP'B .$$

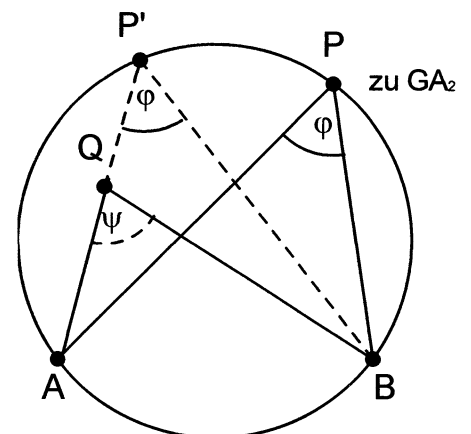
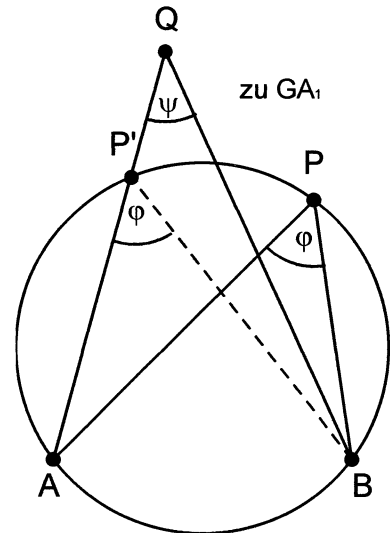
Aus (1) und (2) folgt dann  $\sphericalangle AQB < \sphericalangle APB$  , was der Voraussetzung  $V_2$  widerspricht.

Damit ist gezeigt, dass  $GA_1$  falsch sein muss.

Analog folgt aus  $GA_2$  , dass es genau einen Punkt  $P'$  auf dem Kreis  $k(M;r)$  gibt, für den  $Q$  auf der Strecke  $\overline{AP'}$  liegt.

Analog lässt sich dann mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes und des Außenwinkelsatzes herleiten, dass  $\sphericalangle AQB > \sphericalangle APB$  gelten würde, was ebenfalls der Voraussetzung  $V_2$  widerspricht.

Also muss außer  $GA_1$  auch  $GA_2$  falsch sein, woraus die Falschheit von  $GA$  folgt und damit ein indirekter Beweis unseres Satzes erbracht ist.



### 1.3. Aussageformen und Mengen

(Wiederhole in diesem Zusammenhang die Abschnitte 1.3. und 1.1. aus dem "Arbeitsmaterial für Klasse 7" .)

Mit  $\mathbb{R}$  bezeichnen wir die *Menge der reellen Zahlen* (das ist die Gesamtheit der rationalen Zahlen und der irrationalen Zahlen) . (Näheres hierüber erfährst du in Klasse 9.)

Die reellen Zahlen lassen sich umkehrbar eindeutig abbilden auf die Punkte der *Zahlengeraden* (d.h. zu jeder reellen Zahl gehört genau ein Punkt der Zahlengeraden und zu jedem solchen Punkt gehört genau eine reelle Zahl).

*abgeschlossenes Intervall*  $\langle a;b \rangle$  =<sub>Def</sub> Menge aller reellen Zahlen zwischen  $a$  und  $b$ , die Randpunkte eingeschlossen, wobei  $a < b$  gilt.

*offenes Intervall*  $(a;b)$  =<sub>Def</sub> Menge aller reellen Zahlen zwischen  $a$  und  $b$  , die Randpunkte ausgeschlossen.

halboffene Intervalle:  $\langle a;b \rangle$ ,  $(a;b)$

unendliche Intervalle:  $(-\infty;b)$ ,  $(a;\infty)$ ,  $(-\infty;\infty) = \mathbb{R}$

Jede Aussageform  $H(x)$ ;  $x \in X$  bestimmt eindeutig eine (Erfüllungs-) Menge  $M = \{x \in X \mid H(x)\}$  und damit eine Eigenschaft der Elemente des Grundbereichs  $X$ .

$x \in M$  ist gleichbedeutend mit  $H(x)$ .

Aussageform $H(x)$ , $x \in \mathbb{R}$	zugehörige Menge	Eigenschaft (reeller Zahlen)
$x > 0$	$(0;\infty)$	positiv sein
$x \geq 0$	$\langle 0;\infty)$	nicht negativ sein
$x < 0$	$(-\infty;0)$	negativ sein
$2 < x < 5$	$(2;5)$	zwischen 2 und 5 liegen
$x \neq x$	$\{\}$	

$\emptyset$  oder  $\{\}$  bezeichnet die *leere Menge*, die kein Element enthält.

Verknüpfung von Aussageformen:

Konjunktion:  $H_1(x) \wedge H_2(x)$  gelesen:  $H_1(x)$  und  $H_2(x)$

Alternative:  $H_1(x) \vee H_2(x)$  gelesen:  $H_1(x)$  oder  $H_2(x)$

Implikation:  $H_1(x) \Rightarrow H_2(x)$  gelesen: Wenn  $H_1(x)$ , dann  $H_2(x)$

Äquivalenz:  $H_1(x) \Leftrightarrow H_2(x)$  gelesen:  $H_1(x)$  genau dann, wenn  $H_2(x)$

Negation:  $\sim H(x)$  gelesen: nicht  $H(x)$

Verknüpfung von (Operationen mit) Mengen:

Durchschnitt:  $M \cap N =_{\text{Def}} \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$  gelesen:  $M$  geschnitten  $N$

Vereinigung:  $M \cup N =_{\text{Def}} \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$  gelesen:  $M$  vereinigt  $N$

Differenz:  $M \setminus N =_{\text{Def}} \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$  gelesen:  $M$  minus  $N$

Beziehungen (Relationen) zwischen Mengen:

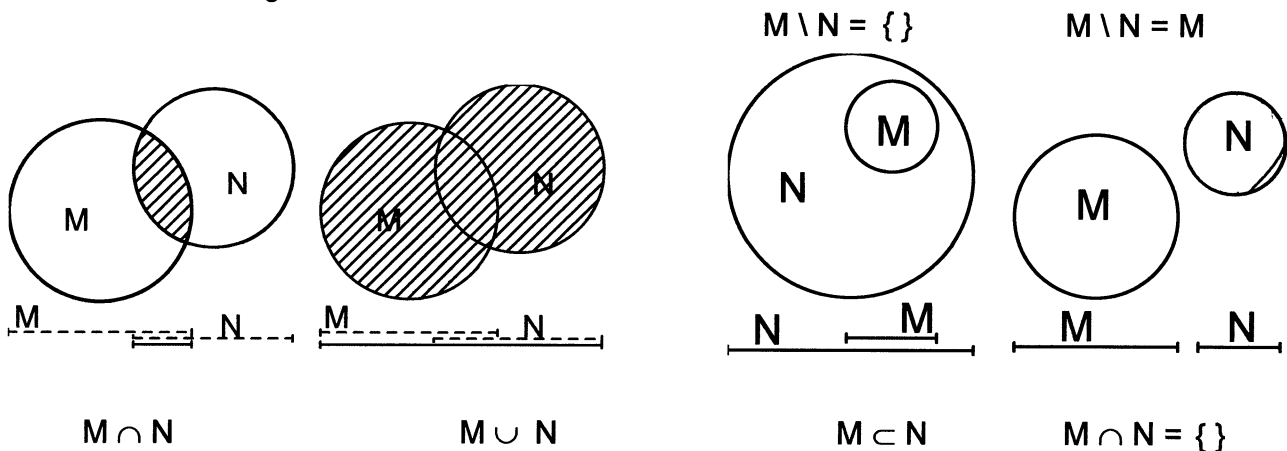
Teilmengenbeziehung:  $M \subseteq N =_{\text{Def}} \text{Wenn } x \in M, \text{ dann } x \in N$

Gleichheit:  $M = N =_{\text{Def}} x \in M \text{ genau dann, wenn } x \in N$

echte Teilmengenbeziehung:  $M \subset N =_{\text{Def}} M \subseteq N \text{ und } M \neq N$

(Achte auf die Beziehungen zwischen  $\wedge$ ;  $\vee$ ,  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$  bei Aussageformen sowie zwischen  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $\subset$ ,  $=$  bei den zugehörigen Mengen!)

Veranschaulichungen:



Veranschauliche folgende Sätze:  $M \subseteq N$  genau dann, wenn  $M \cap N = M$  ;  
 $M \subseteq N$  genau dann, wenn  $M \cup N = N$  .

Veranschauliche auf der Zahlengeraden:

$$\begin{aligned} (-3;2) \cap (0;3) &= (0;2) ; & (-3;2) \cup (0;3) &= (-3;3) ; & (-3;2) \setminus (0;3) &= (-3;0) ; \\ (1;4) \cap (5;6) &= \{ \} ; & (1;4) \cap (4;5) &= \{4\} ; & (1;2) \subset (1;3) &. \end{aligned}$$

Es gilt:  $\{ \text{gerade Zahl} \} \cup \{ \text{ungerade Zahl} \} = \{ \text{ganze Zahl} \} = \mathbb{Z}$  ;  
 $\{ \text{gerade Zahl} \} \cap \{ \text{ungerade Zahl} \} = \{ \}$  ;  
 $\{ \text{Rhombus} \} \cap \{ \text{Rechteck} \} = \{ \text{Quadrat} \}$  ;  
 $\{ \text{Quadrat} \} \subset \{ \text{Rechteck} \} \subset \{ \text{Parallelogramm} \} \subset \{ \text{Trapez} \} \subset \{ \text{Viereck} \}$  ;  
 $\{ \text{Vielfaches von } 2 \} \cap \{ \text{Vielfaches von } 3 \} = \{ \text{Vielfaches von } 6 \}$  ;  
 $\{ \text{Vielfaches von } 6 \} \subset \{ \text{Vielfaches von } 3 \} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  .

Bilde weitere Beispiele für Durchschnitt und Vereinigung von Mengen sowie für die Teilmengenbeziehung!

*Merke:* Zur *Konjunktion* von Aussageformen gehört der *Durchschnitt* ihrer Erfüllungsmengen.

Wiederhole in diesem Zusammenhang die Ausführungen über die Methode der geometrischen Örter und über das Lösen von Bestimmungsaufgaben im Arbeitsmaterial für Klasse 7, Abschnitt 2.1. und 5.1. .

Aussageformen (speziell Ungleichungen)	Erfüllungsmengen (speziell Lösungen)
$x > 1$ und $x < 2$	$L = (1;\infty) \cap (-\infty;2) = (1;2)$
$x < 1$ und $x > 2$	$L = (-\infty;1) \cap (2;\infty) = \{ \}$
$2 < x < 5$ oder $3 < x < 6$	$L = (2;5) \cup (3;6) = (2;6)$

Veranschauliche dir dies auf der Zahlengeraden!

## 2. GEOMETRIE

### 2.1. Einige Begriffe und Sätze aus der Stereometrie

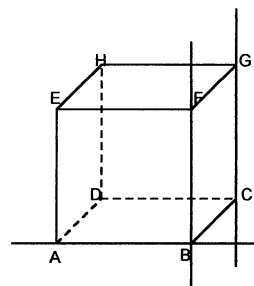
*Lagebeziehungen zwischen geometrischen Gebilden im Raum:*

#### 1. Gerade - Gerade

- |   |  |  |
|---|--|--|
| (a <sub>1</sub> ): Die beiden Geraden fallen zusammen.  |  | $g \equiv h$   |
| (a <sub>2</sub> ): Die beiden Geraden liegen in derselben Ebene $\varepsilon$<br>und haben keinen Punkt gemeinsam.  |  | $g \cap h = \{ \}$<br>mit $g, h \subset \varepsilon$                         |
| In diesen beiden Fällen nennt man die Geraden <i>parallel</i>   |  | $g \parallel h$  |
| (b): Die beiden Geraden haben genau einen Punkt gemeinsam;<br>man spricht von einander <i>schneidenden</i> Geraden.   |  | $g \cap h = \{ S \}$   |
| (c): Die beiden Geraden liegen nicht in ein und derselben Ebene,<br>und sie haben keinen Punkt gemeinsam;<br>man spricht von <i>windschiefen</i> Geraden.<br>und $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ |  | $g \cap h = \{ \}$ mit<br>$g \subset \varepsilon_1, h \subset \varepsilon_2$ |

Beachte: Der Begriff "*orthogonal*" (aufeinander senkrecht stehend) wird nicht nur für schneidende Geraden, sondern auch für windschiefe Geraden angewendet.

So bezeichnet man etwa in dem nebenstehend gezeichneten Quader nicht nur die einander schneidenden Geraden AB und BF als orthogonal, sondern etwa auch die windschiefen Geraden AB und CG . (Vgl. auch den untenstehenden Satz S3 .)

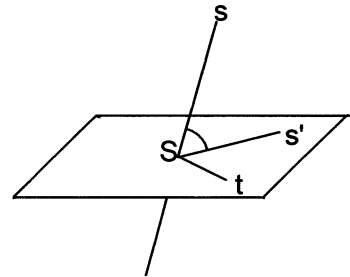


## II. Gerade - Ebene

(a <sub>1</sub> ): Die Gerade liegt in der Ebene $\varepsilon$ (hat mit ihr alle Punkte gemeinsam).		$g \subset \varepsilon$
(a <sub>2</sub> ): Die Gerade hat mit der Ebene $\varepsilon$ keinen Punkt gemeinsam		$g \cap \varepsilon = \{ \}$
In diesen beiden Fällen heißt $g$ <i>parallel</i> zu $\varepsilon$ .		$g \parallel \varepsilon$
(b): $g$ hat mit $\varepsilon$ genau einen Punkt gemeinsam; man sagt, $g$ <i>schneidet</i> $\varepsilon$ .		$g \cap \varepsilon = \{S\}$

Ist  $s$  einer der beiden vom Schnittpunkt  $S$  ausgehenden Strahlen auf  $g$ , dann gibt es in  $\varepsilon$  einen von  $S$  ausgehenden Strahl  $s'$ , für den  $\sphericalangle(s;s') \leq \sphericalangle(s;t)$  für alle in  $\varepsilon$  gelegenen Strahlen  $t$  gilt, die von  $S$  ausgehen.

$\sphericalangle(s;s')$  wird als *Schnittwinkel* zwischen  $g$  und  $\varepsilon$  bezeichnet.

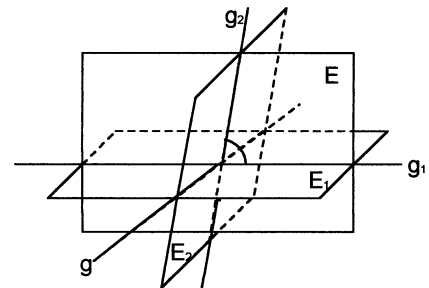


## III. Ebene - Ebene

(a <sub>1</sub> ): Die beiden Ebenen fallen zusammen.		$\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$
(a <sub>2</sub> ): Die beiden Ebenen haben keinen Punkt gemeinsam.		$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \{ \}$
In diesen beiden Fällen heißen die Ebenen <i>parallel</i> .		$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$
(b): Die beiden Ebenen haben genau eine Gerade $g$ gemeinsam; man sagt, dass diese Ebenen einander <i>schneiden</i> .		$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = g$

Jede Ebene  $\varepsilon$ , die auf der Schnittgeraden  $g$  der beiden Ebenen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  senkrecht steht, schneidet die Ebenen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  in zwei Geraden  $g_1$  und  $g_2$ , die einander ebenfalls schneiden.

$\sphericalangle(g_1;g_2)$  bezeichnet man als *Schnittwinkel* zwischen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ .

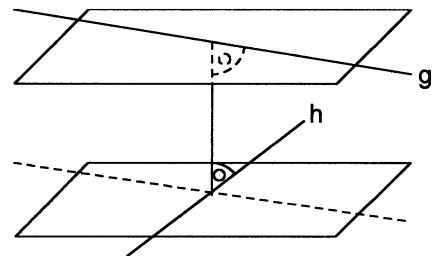


Zwei einander schneidende Geraden sowie zwei nicht zusammenfallende parallele Geraden bestimmen stets genau eine Ebene (sie spannen diese Ebene auf).

Zu zwei windschiefen Geraden gibt es stets genau ein Paar paralleler Ebenen, in denen diese Geraden liegen.

Es gibt auch stets genau eine Strecke, die auf beiden Geraden senkrecht steht und deren Endpunkte zu dieser Geraden gehören. Die Länge dieser Strecke nennt man *Abstand der windschiefen Geraden*; man bezeichnet diesen Abstand mit  $d(g;h)$ .

Entsprechend lässt sich der *Abstand zwischen parallelen Gebilden* als Länge eines "gemeinsamen Lotes" definieren, den man mit  $d(g;h)$ ,  $d(g;\varepsilon)$  bzw.  $d(\varepsilon_1;\varepsilon_2)$  bezeichnet.



Beachte, dass man - in einem erweiterten Sinne - auch davon spricht, dass windschiefe Geraden einen Winkel einschließen. Verschiebt man eine dieser Geraden so im Raum, dass sie die andere schneidet, dann bezeichnet man den Schnittwinkel  $\varphi$  dieser schneidenden Geraden als Winkel zwischen den windschiefen Geraden.

Bei parallelen Gebilden (Geraden oder Ebenen) ist es üblich zu sagen, dass  $\varphi = 0^\circ$  gilt.



## Einige stereometrische Sätze

S1) Die Parallelität zwischen Geraden bzw. Ebenen ist transitiv, d.h. es gilt stets:  $a \parallel b \wedge b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$ ;  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \wedge \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_3$ .

S2) Sind drei verschiedene Geraden paarweise parallel, dann ist jede dieser Geraden parallel zu der von den anderen beiden Geraden aufgespannten Ebene. Speziell:  $a \parallel b \wedge a \parallel c \Rightarrow a \parallel \varepsilon(b;c)$ .

S3) Wenn eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht, dann steht sie auch auf jeder Geraden senkrecht, die in dieser Ebene liegt.

$$g \perp \varepsilon \wedge h \subset \varepsilon \Rightarrow g \perp h.$$

S4) Wenn eine Gerade auf zwei einander schneidenden Geraden senkrecht steht, dann steht sie auch auf der von diesen beiden Geraden aufgespannten Ebene senkrecht.

$$g \perp AB \wedge g \perp AC \Rightarrow g \perp \varepsilon(ABC).$$

S5) Zwei zur selben Ebene orthogonale Geraden sind stets parallel.

$$g \perp \varepsilon \wedge h \perp \varepsilon \Rightarrow g \parallel h.$$

U5) Steht eine von zwei parallelen Geraden auf einer Ebene senkrecht, dann ist dies auch bei der zweiten Geraden der Fall.

$$g \perp \varepsilon \wedge g \parallel h \Rightarrow h \perp \varepsilon.$$

S6) Zwei zur selben Geraden orthogonale Ebenen sind stets parallel.

$$g \perp \varepsilon_1 \wedge g \perp \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2.$$

U6) Steht eine von zwei parallelen Ebenen auf einer Geraden senkrecht, dann ist dies auch bei der zweiten Ebene der Fall.

$$g \perp \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Rightarrow g \perp \varepsilon_2.$$

S7)  $g \perp \varepsilon \wedge g \perp h \Rightarrow h \parallel \varepsilon$ .

U7)  $g \perp \varepsilon \wedge h \parallel \varepsilon \Rightarrow g \perp h$ .

S8) Schneidet eine Ebene zwei parallele Ebenen, dann sind die beiden Schnittgeraden parallel.

$$\varepsilon \cap \varepsilon_1 = g_1 \wedge \varepsilon \cap \varepsilon_2 = g_2 \wedge \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Rightarrow g_1 \parallel g_2.$$

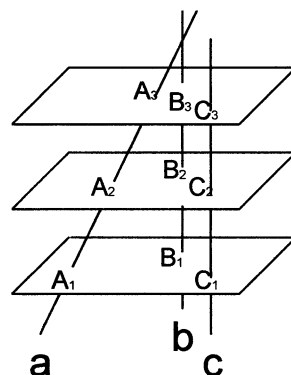
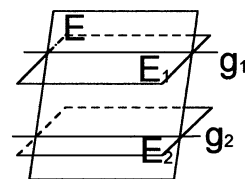
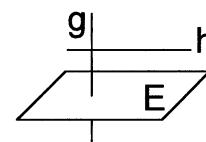
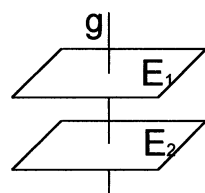
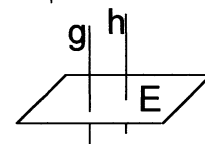
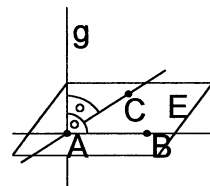
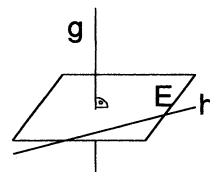
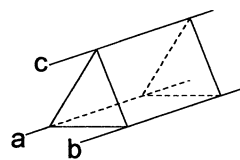
S9) Steht jede von zwei einander schneidenden Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht, dann steht auch ihre Schnittgerade auf dieser Ebene senkrecht.

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon \wedge \varepsilon_2 \perp \varepsilon \wedge \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = g \Rightarrow g \perp \varepsilon.$$

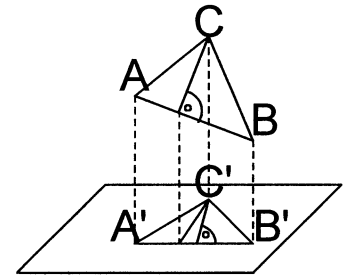
S10) *Räumlicher Strahlensatz:*

Wenn zwei Geraden zwei (oder auch mehrere) parallele Ebenen schneiden, dann verhalten sich die Abschnitte auf der einen Geraden so zueinander wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden.

S11) Ist  $s$  die Länge einer Strecke und  $s'$  die Länge ihrer Projektion auf eine Ebene, dann gilt stets  $s \geq s'$ . Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn die Strecke zur Projektionsebene parallel ist.



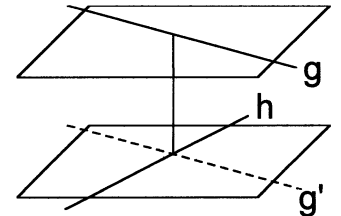
S12) Ist  $J$  der Inhalt eines Vielecks und  $J'$  der Inhalt seiner Projektion auf eine Ebene, dann gilt stets  $J \geq J'$ . Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn das Vieleck zur Projektionsebene parallel ist.



S13) Zwei windschiefe Geraden besitzen stets genau eine Normaltransversale (das ist eine Strecke, deren Endpunkte auf je einer dieser Geraden liegen und die auf beiden Geraden senkrecht steht).

Die Normaltransversale ist die kürzeste aller Strecken, die Punkte zweier windschiefer Geraden verbindet.

(Beachte, dass man erst auf der Grundlage dieses Satzes den Begriff "Abstand windschiefer Geraden" definieren kann!)



Mache dir den Inhalt dieser Sätze anhand von Skizzen klar!

Wiederhole in diesem Zusammenhang aus dem Arbeitsmaterial für Klasse 7 den Abschnitt 1.2.2. (Das Umkehren von Sätzen)!

Fasse die oben angegebenen Sätze nebst Umkehrungen jeweils zu einem "Genau-dann-wenn-Satz" zusammen!

## 2.2. Die algebraische Methode bei Konstruktionsaufgaben

Wiederhole im Arbeitsmaterial für Klasse 7 den Abschnitt 2.1. (Konstruktionsaufgaben)!

Wiederhole in "Einige Regeln" auf Seite 7 die Regeln 3.1, 2.1 und 2.2, d.h. die *Methode der geometrischen Örter* und die *Methode der Hilfselemente* !

*Definition:* Eine *Konstruktion* heißt *elementar* genau dann, wenn sie sich allein mit Hilfe von Zirkel und Lineal (ohne Maßeinteilung) durchführen lässt. Dabei werden folgende *Axiome* zugrunde gelegt:

- (A1) Es ist stets möglich, durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade zu ziehen.
- (A2) Der gemeinsame Punkt zweier nichtparalleler Geraden lässt sich stets eindeutig konstruieren.
- (A3) Es lässt sich stets genau ein Kreis zeichnen, wenn sein Mittelpunkt und mindestens ein Punkt seiner Peripherie gegeben sind.
- (A4) Zu einem gegebenen Kreis und einer gegebenen, diesen Kreis schneidenden Geraden lassen sich stets die beiden Schnittpunkte eindeutig konstruieren.
- (A5) Es ist stets möglich, die beiden Punkte eindeutig zu konstruieren, die zwei einander schneidenden Kreisen gemeinsam sind.

*Hinweis:* Die Lösbarkeit bzw. Unlösbarkeit einer Konstruktionsaufgabe hängt vor allem davon ab, welche Zeichengeräte als Hilfsmittel zugelassen sind. (So gibt es z.B. keine elementare Konstruktion, die es gestattet, einen beliebigen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen. Dieses Problem der Winkeldreiteilung wird aber lösbar, wenn man ein "Einschiebelineal" als Hilfsmittel zulässt.)

Man kann zeigen: Alle geometrischen Konstruktionen, die nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal (d.h. elementar) ausführbar sind, sind auch mit dem Zirkel allein ausführbar. Dabei denkt man sich eine Gerade stets durch irgend zwei ihrer Punkte gegeben. Dagegen lassen sich nicht alle elementaren Konstruktionen allein mit dem Lineal durchführen.

Die bekanntesten *elementar nicht lösbaren Konstruktionsaufgaben* sind:

"Würfelveerdoppelung", "Winkeldreiteilung", "Quadratur des Kreises", "Konstruktion eines regelmäßigen Siebenecks".

**Satz:** Sind  $a$  und  $b$  die Längen zweier gegebenen Strecken (wobei die verwendete Längeneinheit - als Länge einer "Einheitsstrecke" - mit vorgegeben ist), dann kann man Strecken mit den folgenden Längen elementar konstruieren:

$$(a + b) \text{ und } (a - b) \text{ für } a > b ;$$

$$ra, \text{ wobei } r \text{ eine positive rationale Zahl ist ;}$$

$$a \cdot b ; \quad a : b ; \quad \sqrt{a} .$$

Man sagt kurz: Ein Term lässt sich *elementar konstruieren* genau dann, wenn er *nur rationale Rechenoperationen oder Quadratwurzeln* enthält.

*Hinweis auf einen Beweis:*

$(a + b)$  und  $(a - b)$  lassen sich durch "*Streckenabtragung*" konstruieren.

$a \cdot b$  und  $a : b$  lassen sich mit Hilfe des *Strahlensatzes* (der im Unterricht der Klasse 9 behandelt wird) konstruieren.

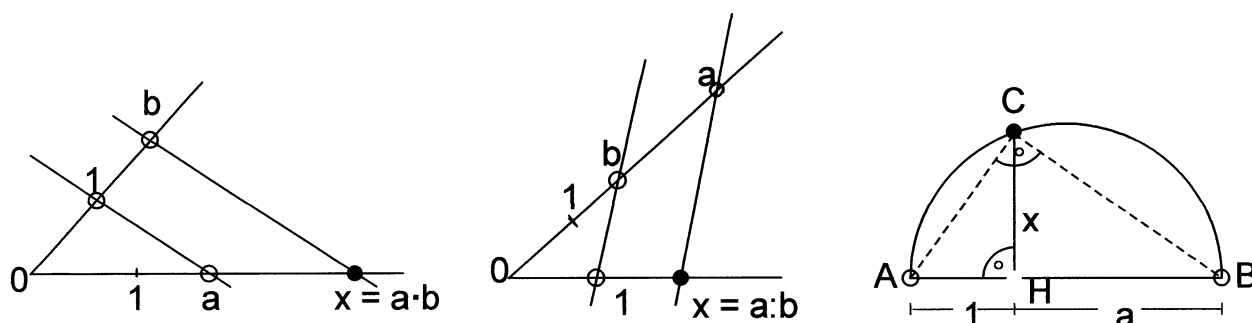
$\sqrt{a}$  lässt sich mit Hilfe des *Höhensatzes* konstruieren.

**Auftrag:** Eigne dir den Inhalt der Strahlensätze an (vgl. "Einige grundlegende planimetrische Sätze", Seite 8, Satz S8) !

Führe die in den untenstehenden Figuren angedeuteten Beweise selbst durch!

Überzeuge dich, dass man diese Konstruktionen tatsächlich allein mit Zirkel und Lineal auf der Grundlage der Axiome (A1) bis (A5) durchführen kann!

Auf die Verwendung eines Zeichendreiecks - etwa zum Konstruieren von Parallelen oder von rechten Winkeln - kann man stets verzichten.



**Satz:**

Ein *regelmäßiges n-Eck* ist genau dann elementar konstruierbar, wenn die ungeraden Primfaktoren von  $n$  untereinander verschiedene "*Fermat-Primzahlen*" der Gestalt

$$F_k = 2^{2^k} + 1 \text{ sind.}$$

Die einzigen bekannten Primzahlen dieser Form sind

$$F_0 = 3, \quad F_1 = 5, \quad F_2 = 17, \quad F_3 = 257, \quad F_4 = 65537 .$$

$F_5 = 2^{32} + 1 = 42949667297 = 6700417 \cdot 641$  ist keine Primzahl, sondern das Produkt zweier Primzahlen, die keine Fermat-Primzahlen sind.

Folglich sind regelmäßige  $n$ -Ecke mit  $n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 23, 25, \dots$  nicht elementar konstruierbar.

*Hinweis:* Findet man mit der Methode der geometrischen Örter oder mit der Methode der Hilfselemente keinen Lösungsweg, dann wende man folgende *algebraische Methode* an:

- Man suche ein Bestimmungsstück (Streckenlänge oder Winkelgröße), das eine "*hinreichende Hilfsgröße*" ist, d.h. mit deren Hilfe sich die gesuchte Größe konstruieren ließe.

- Man drücke diese hinreichende Hilfsgröße durch die Daten aus (wozu in der Regel geometrische Sätze benötigt werden). Erweist sich der so ermittelte Term als elementar konstruierbar, dann hat man einen Lösungsweg gefunden.

Mit Hilfe der algebraischen Methode kann man auch nachweisen, dass eine *Konstruktionsaufgabe nicht elementar lösbar* ist

**Aufgabe:** Zu konstruieren sind alle Dreiecke ABC, die folgende Bedingungen erfüllen:

(a)  $\sphericalangle ACB = 90^\circ$  ; (b)  $\overline{AB} = c$  ; (c)  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = u$  .

**Zur Lösungsfindung:** Die Aufgabe wäre leicht lösbar, wenn man die Höhenlänge  $\overline{CH} = h$  des rechtwinkligen Dreiecks (als eine hinreichende Hilfsgröße) kennen würde.

Es lässt sich zeigen, dass  $h = \frac{u(u-2c)}{2c}$  gilt (falls  $u > 2c$ ). Folglich ist  $h$  aus  $u$  und  $c$  elementar konstruierbar, und man hat einen Lösungsweg gefunden.

**Auftrag:** Leite die genannte Beziehung her und gib an, wie man eine Strecke mit der Länge  $h$  aus zwei Strecken mit den Längen  $u$  und  $c$  konstruieren kann.

### 3. ZAHLENTHEORIE

#### 3.1. Lineare Kongruenzen

Wiederhole im Arbeitsmaterial für Klasse 7 den Abschnitt 3.3. "Das Rechnen mit Kongruenzen" !

Sei  $a, b, m, x \in \mathbb{Z}$  und  $m > 1$  .

Dann nennt man  $ax \equiv b \pmod{m}$  oder kürzer  $ax \equiv b \pmod{m}$  eine *lineare Kongruenz* (nach dem Modul  $m$ ) .

**Lösbarkeitskriterium:**

Eine lineare Kongruenz besitzt Lösungen genau dann, wenn  $\text{ggT}(a; m)$  ein Teiler von  $b$  ist.

**Satz über die Lösungsmenge:**

Gilt  $\text{ggT}(a; m) = 1$  , dann lässt sich die Kongruenz stets auf die vereinfachte Form  $x \equiv c \pmod{m}$  bringen. Sie besitzt dann die Lösungsmenge  $L = \{ c + km, k \in \mathbb{Z} \}$  , die man "*Restklasse nach dem Modul  $m$* " nennt und mit  $[c]_m$  bezeichnet.

Gilt  $\text{ggT}(a; m) = d > 1$  nebst  $d|b$  , dann darf man beide Seiten der Kongruenz und den Modul durch  $d$  dividieren und erhält so die zugehörige "*gekürzte Kongruenz*" .

$a'x \equiv b' \pmod{m'}$  mit  $\text{ggT}(a'; m') = 1$  , wobei  $a = a'd$  und  $b = b'd$  und  $m = m'd$  gelten. Diese Kongruenz hat dann stets eine Restklasse nach dem Modul  $m'$  als Lösungsmenge. Die Kongruenz  $ax \equiv b \pmod{m}$  hat dann genau  $d$  Restklassen nach dem Modul  $m$  als Lösung.

(Dividiert man nur die beiden Seiten der Kongruenz, nicht aber auch den Modul durch  $d$  , dann würde man nur eine Restklasse als Lösung erhalten, d.h. es wären Lösungen "verlorengegangen".)

**Lösungsverfahren:**

Um eine lösbare lineare Kongruenz auf die vereinfachte Form  $x \equiv c \pmod{m}$  zu bringen (deren Lösungsmenge man dann sofort angeben kann), formt man (analog wie bei Gleichungen) äquivalent um. Dabei darf man folgende Umformungen vornehmen:

- I) Ersetzen von  $a$  oder  $b$  durch Zahlen, die ihnen modulo  $m$  kongruent sind.  
(Oft wählt man dazu die absolut oder positiv kleinsten Reste bei Division durch  $m$  .)
- II) Division beider Seiten durch einen gemeinsamen Faktor  $q$  , falls  $q$  und  $m$  teilerfremd sind. (Trifft dies nicht zu, dann geht man zunächst zu der oben genannten "gekürzten Kongruenz" über. )



### 3.2. Lineare diophantische Gleichungen

*Definition:*  $ax + by = c$  heißt *lineare diophantische Gleichung* (mit 2 Variablen) genau dann, wenn  $a, b, c$  ganze Zahlen sind und wenn nur Paare  $(x;y)$  von ganzen Zahlen als Lösungen gesucht werden.

*Lösbarkeitskriterium:*

$ax + by = c$  besitzt Lösungen genau dann, wenn  $\text{ggT}(a;b)$  ein Teiler von  $c$  ist.

*Hinweis:* Gilt  $\text{ggT}(a;b) > 1$  und ist das Lösbarkeitskriterium erfüllt, dann dividiere man beide Seiten der Gleichung durch  $\text{ggT}(a;b)$ , so dass dann  $\text{ggT}(a;b;c) = 1$  gilt. Die so entstandene Gleichung heißt *Normalform* der diophantischen Gleichung.

*Beispiele:*

$2x + 4y = 5$  besitzt wegen  $\text{ggT}(2;4) = 2$  und  $2 \nmid 5$  keine (ganzzahligen) Lösungen.

$2x + 4y = 6$  besitzt wegen  $\text{ggT}(2;4) = 2$  und  $2 \mid 6$  ganzzahlige Lösungen.

$x + 2y = 3$  ist die Normalform dieser lösbaren diophantischen Gleichung.

*Satz über die Lösungsmannigfaltigkeit:*

Jede lösbare diophantische Gleichung besitzt stets unendlich viele Lösungen.

In Anwendungsaufgaben treten oft diophantische Gleichungen auf, bei denen der Grundbereich der Variablen zusätzlich eingeschränkt ist. In solchen Fällen können auch endliche Lösungsmengen auftreten.

*Satz über die Lösungsmenge:* Ist  $(x_0; y_0)$  eine spezielle Lösung der Normalform von  $ax + by = c$ , dann lautet die Lösungsmenge dieser Gleichung:

$$L = \{ (x;y) \mid x = x_0 + bk; y = y_0 - ak; k \in \mathbb{Z} \}.$$

*Lösungsmethoden* (für die Normalform von  $ax + by = c$ ):

- (1) Erraten einer speziellen Lösung und Anwendung des Satzes über die Lösungsmenge.
- (2) Übergang zu einer der beiden zugehörigen linearen Kongruenzen  $ax \equiv c \pmod{b}$  oder  $by \equiv c \pmod{a}$ ; (man wählt in der Regel die Kongruenz mit dem kleineren Modul).
- (3) Anwendung des Eulerschen Reduktionsverfahrens.

*Beispiel zu Methode (2):*

$$\begin{array}{l} \text{Übergang zu} \\ \text{Wegen } -7 \equiv -1 \pmod{3} \text{ und } 5 \equiv -1 \pmod{3} \text{ gilt} \\ \text{und damit} \\ \text{Einsetzen in die Gleichung liefert} \\ \text{und somit} \end{array} \quad \begin{array}{l} 3x - 7y = 5; \\ -7y \equiv 5 \pmod{3} \\ -y \equiv -1 \pmod{3}, \text{ also } y \equiv 1 \pmod{3} \\ y = 1 + 3k \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \\ 3x - 7 - 21k = 5, \text{ also } 3x = 12 + 21k \\ x = 4 + 7k \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Alle geordneten Zahlenpaare  $(x;y) = (4 + 7k; 1 + 3k)$  und nur diese sind Lösungen der Gleichung. Eine Probe durch Einsetzen bestätigt die Richtigkeit. Hätte man die spezielle Lösung  $(x;y) = (4;1)$  erraten, dann würde der Satz über die Lösungsmenge zum selben Resultat führen.

*Das Eulersche Reduktionsverfahren*

*Regeln* (in Kurzform):

1. Löse nach der Variablen mit dem absolut kleineren Koeffizienten auf!  
[Im Beispiel: Auflösen nach  $x$ .]
2. Spalte vom entstandenen Bruch den (absolut größten) "ganzzahligen Teil" ab!  
(Probe nicht vergessen!) [Im Beispiel:  $(-y + 1)$ ]

3. Bezeichne den entstandenen Bruch mit einer Hilfsvariablen; gehe zur zugehörigen diophantischen Gleichung über! [ Im Beispiel:  $55y - 72 = -179u$  ]
4. Führe die Schritte 1., 2., 3. so lange durch, bis eine diophantische Gleichung entsteht, bei der eine der beiden Variablen den Koeffizienten  $+1$  oder  $-1$  besitzt!  
[ Im Beispiel:  $v + 3 = 14k$  ]
5. Drücke (durch schrittweises Einsetzen und Umformen) die Hilfsvariablen und die Variablen der Ausgangsgleichung durch die zuletzt eingeführte Hilfsvariable aus!  
[Im Beispiel in der Reihenfolge  $v = -3 + 14k$ ;  $u = 13 - 55k$ ;  $y = -41 + 179k$   
 $x = 55 - 234k$  .]

*Beispiel für das Eulersche Reduktionsverfahren*

$$179x + 234y = 251$$

$$x = \frac{-234y + 251}{179} = (-y + 1) + \frac{-55y + 72}{179}$$

$$x = (41 - 179k + 1) + (13 - 55k) =$$

$$= \underline{55 - 234k}$$

$$\frac{-55y + 72}{179} = u \quad \text{äq} \quad 55y - 72 = -179u$$

$$y = \frac{-179u + 72}{55} = (-3u + 1) + \frac{-14u + 17}{55}$$

$$y = (-39 + 165k + 1) + (-3 + 14k) =$$

$$= \underline{-41 + 179k}$$

$$\frac{-14u + 17}{55} = v \quad \text{äq} \quad 14u - 17 = -55v$$

$$u = \frac{-55v + 17}{14} = (-4v + 1) + \frac{v + 3}{14}$$

$$u = (12 - 56k + 1) + k = \underline{13 - 55k}$$

$$\frac{v + 3}{14} = k \quad \text{äq} \quad v + 3 = 14k$$

$$v = \underline{-3 + 14k}$$

Folglich lautet die gesuchte Lösungsmenge:

$$L = \{ (x;y) \mid x = 55 - 234k ; y = -41 + 179k ; k \in \mathbb{Z} \} .$$

Beim Lösen eines *diophantischen Gleichungssystems* der Gestalt

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{array} \right|$$

eliminiert man in der üblichen Weise eine der Variablen, löst die so entstandene Gleichung mit zwei Variablen und gewinnt aus deren Lösung die Lösung des Gleichungssystems.

*Beispiel:*

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 5y - z = 4 \\ x - 2y + z = 1 \end{array} \right|$$

$$\hline 3x - 7y = 5 ;$$

Lösung dieser Gleichung siehe oben.

Durch Einsetzen von  $x = 4 + 7k$  und  $y = 1 + 3k$  in die zweite Gleichung des Systems erhält man  $z = 1 - 4 - 7k + 2 + 6m = -1 - k$  .

Folglich lautet die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$L = \{ (x;y;z) \mid x = 4 + 7k ; y = 1 + 3k ; z = -1 - k ; k \in \mathbb{Z} \} .$$

## 4. GLEICHUNGEN , UNGLEICHUNGEN UND FUNKTIONEN

### 4.1. Einige wichtige Ungleichungen

Wiederhole aus dem Arbeitsmaterial für Klasse 7 den Abschnitt 4.3. (Einige wichtige Gleichungen und Ungleichungen) . Wiederhole in "Einige Regeln" auf Seite 14 die Regeln 2.2.1 und 2.2 .

*Satz über das quadratische, arithmetische, geometrische und harmonische Mittel:*

Für alle positiven reellen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  und für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 2$  gilt:

$$\max(a_1, \dots, a_n) \geq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \geq \min(a_1, \dots, a_n) .$$

Präge dir diese Ungleichungen gut ein! Sie lassen sich beim Beweisen von Ungleichheitsaussagen oft als Hilfsmittel verwenden.

*Aufgabe:* Beweise, dass für alle reellen Zahlen  $x, y$  gilt:

$$\text{Wenn } x, y > 0 \text{ und } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, \text{ dann } x + y \geq 4 .$$

*Lösungsfindung:* Der Term  $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$  erinnert an das harmonische Mittel, der Term  $(x + y)$  an das arithmetische Mittel. Das legt die Anwendung des Satzes über das arithmetische und das harmonische Mittel nahe.

$$\begin{array}{l} \text{Vor.: } x, y > 0 \rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \\ \text{Vor.: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Vor.: } x, y > 0 \\ \text{Vor.: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{array}} \right\} \rightarrow \frac{x+y}{2} \geq \frac{2}{1} \rightarrow x+y \geq 4$$

*Aufgabe:* Beweise, dass für alle reellen Zahlen  $a, b, c$  gilt:

$$\text{Wenn } a, b, c > 0 \text{ und } abc = 1, \text{ dann } a + b + c \geq 3 .$$

*Lösungsfindung:* Beim Betrachten der vorkommenden Terme stößt man auf den Satz über das arithmetische und das geometrische Mittel als günstiges Hilfsmittel.

$$\begin{array}{l} \text{Vor.: } a, b, c > 0 \rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \\ \text{Vor.: } abc = 1 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Vor.: } a, b, c > 0 \\ \text{Vor.: } abc = 1 \end{array}} \right\} \rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq 1 \rightarrow a+b+c \geq 3$$

### 4.2. Funktionen und ihre Graphen

Wiederhole in diesem Zusammenhang den Abschnitt 1.3. "Aussageformen und Mengen" !

D(1) Werden den Elementen  $x$  einer Menge  $X$  eindeutig Elemente  $y$  einer Menge  $Y$  zugeordnet, so heißt die dabei entstehende Menge  $f$  von geordneten Paaren  $(x, y)$  eine *Funktion* .

$X$  heißt *Definitionsbereich* ,  $Y$  heißt *Wertebereich* der Funktion  $f$  .

Die Elemente des Definitionsbereichs nennt man *Argumente* , die zugeordneten Elemente des Wertebereichs nennt man *Funktionswerte* der Funktion  $f$  .

$$x \xrightarrow{f} y \quad \text{äq} \quad (x, y) \in f .$$



D(2) Gilt  $X \subseteq \mathbb{R}$  und  $Y \subseteq \mathbb{R}$ , wobei  $\mathbb{R}$  die Menge der reellen Zahlen bezeichnet, dann nennt man  $f$  eine *reelle reellwertige Funktion*.

D(3) Kann man bei einer Funktion zu jedem Argument den zugehörigen Funktionswert mit Hilfe einer Gleichung berechnen, dann nennt man die betreffende Gleichung *Funktionsgleichung* dieser Funktion.  $y = f(x); x \in X \quad \text{äq} \quad (x,y) \in f; x \in X$ .

Es gilt dann:  $f = \{ (x,y) \mid y = f(x); x \in X \}$ .

(Beachte:  $y = f(x)$  ist eine Aussageform;  $f$  ist die zugehörige Erfüllungsmenge;  $f(x)$  ist ein Term.)

D(4) Ordnet man jedem Zahlenpaar  $(x,y) \in f$  den zugehörigen Punkt  $P(x,y)$  in einem Koordinatensystem zu, dann erhält man eine ebene Punktmenge, die man *Graph von  $f$*  bzw. von  $y = f(x); x \in X$  nennt.

(Der Graph des Definitionsbereichs  $X$  ist eine Punktmenge auf der x-Achse; der Graph des Wertebereichs  $Y$  ist eine Punktmenge auf der y-Achse.)

*Beispiel:*

$$y = f(x) = 4 - |x - 3|; \quad x \in \langle 1; 4 \rangle$$

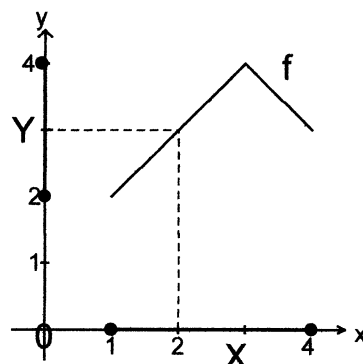
Definitionsbereich  $X = \langle 1; 4 \rangle$ ; Wertebereich  $Y = \langle 2; 4 \rangle$ ;

Abbildung:  $\langle 1; 4 \rangle \xrightarrow{f} \langle 2; 4 \rangle$

$$2 \xrightarrow{f} 3 \quad \text{äq} \quad (2; 3) \in f \quad \text{äq} \quad 3 = f(2)$$

Beachte dabei folgende Definition des Betrages einer reellen Zahl  $u$ :

$$|u| =_{\text{Def}} \begin{cases} u, & \text{wenn } u \geq 0; \\ -u, & \text{wenn } u < 0. \end{cases}$$



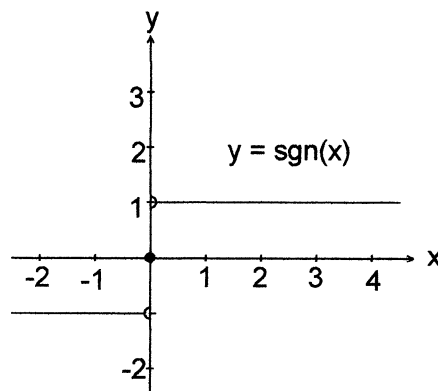
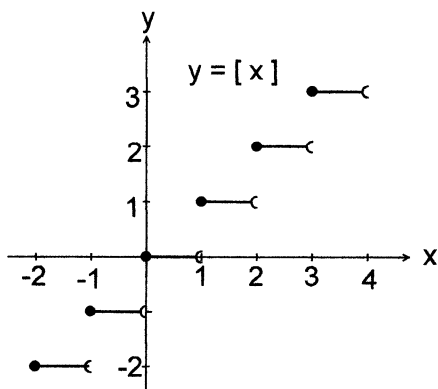
D(5) Wenn  $u$  eine beliebige reelle Zahl ist, dann bezeichnet  $[u]$  den "ganzzahligen Anteil von  $u$ ", d.h. die größte ganze Zahl, die nicht größer als  $u$  ist.

Es soll also stets eine der folgenden, untereinander äquivalenten Beziehungen gelten:

$$(a) [u] \leq u < [u] + 1; \quad (b) u - 1 < [u] \leq u; \quad (c) u = [u] + \alpha \text{ mit } 0 \leq \alpha < 1.$$

*Beispiele:*  $[2,7] = 2$ ;  $[\pi] = 3$ ;  $[-4] = -4$ ;  $[-4,3] = -5$ ;  $[-\frac{15}{7}] = -3$ .

D(6)  $\text{sgn}(u) =_{\text{Def}} \begin{cases} 1, & \text{wenn } u > 0; \\ 0, & \text{wenn } u = 0; \\ -1, & \text{wenn } u < 0. \end{cases}$  (gelesen: *Signum von  $u$* ).

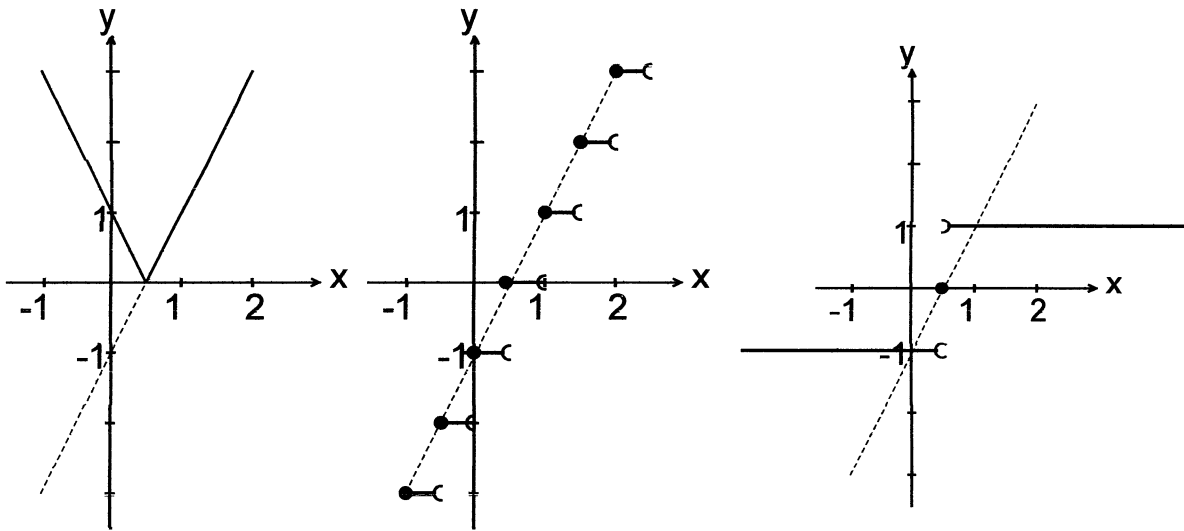


**Aufgabe:** Zeichne die Graphen der Funktionen, die zu folgenden Funktionsgleichungen gehören:

$$y = |2x - 1| ; x \in (-1; 2)$$

$$y = [2x - 1] ; x \in (-1; 3)$$

$$y = \text{sgn}(2x - 1); x \in (-1; 4)$$



(Hierbei wurde der Graph von  $y = 2x - 1 ; x \in (-1; 2)$  "gepunktet" mit eingezeichnet.)

Beantworte folgende Frage:

Wie erhält man aus dem Graphen von  $y = f(x)$  den Graph von  $y = |f(x)|$ ,  $y = [f(x)]$  bzw.  $y = \text{sgn}(f(x))$  ?

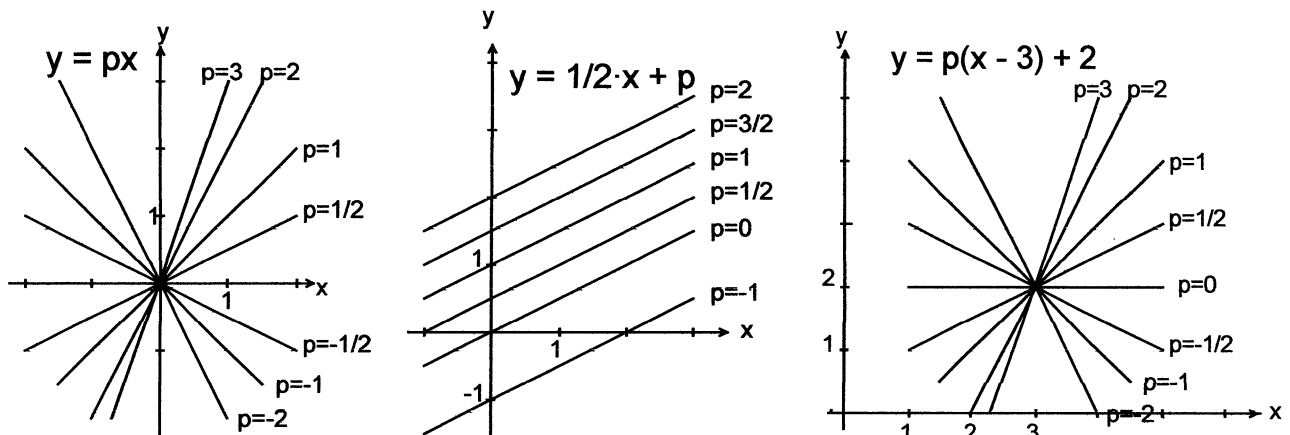
In obigem Beispiel wurde  $y = f(x) = 2x - 1$  gewählt. Bilde weitere Beispiele!

Unter einem *Parameter* wollen wir ein Zeichen für eine beliebig wählbare, dann aber festgehaltene reelle Zahl verstehen.

Gegeben sei eine Funktionsgleichung  $y = f(x; p)$ , in der neben der unabhängigen Variablen  $x$ , der Variablen  $y$  sowie Konstanten noch ein Parameter  $p$  vorkommt.

Der Graph einer solchen *parameterhaltigen Funktionsgleichung* ist im allgemeinen eine *Kurvenschaar*, nämlich die Gesamtheit der Graphen aller parameterfreien Funktionsgleichungen, die man erhält, wenn man für den Parameter eine bestimmte reelle Zahl einsetzt. (Eine solche Kurvenschaar besteht aus unendlich vielen Kurven, von denen man natürlich nur endlich viele zeichnen kann.)

Seien  $a$  und  $b$  Konstanten sowie  $p$  ein Parameter. Dann ist  $y = p(x - a) + b$  die Gleichung des Geradenbüschels mit dem Zentrum  $S(a; b)$  (mit Ausnahme der durch  $x = a$  dargestellten Geraden).



### 4.3. Zum Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

Wiederhole in diesem Zusammenhang den Abschnitt 1.3. "Aussageformen und Mengen", aus dem Arbeitsmaterial für Klasse 7 den Abschnitt 4.2. (Regeln für das äquivalente Umformen) sowie in "Einige Regeln" auf Seite 15 die Regeln 2.1 und 5.

Eine GI/Ugl lösen heißt, (auf möglichst geschickte Weise) ihre Lösungsmenge ermitteln. In vielen (aber keinesfalls allen) Fällen wird die GI/Ugl zu diesem Zweck so lange umgeformt, bis man eine vereinfachte GI/Ugl erhält, deren Lösungsmenge man sofort ablesen kann.

Als *Lösungsgrundbereich* einer GI/Ugl bezeichnet man den Durchschnitt der Definitionsbereiche aller in der GI/Ugl vorkommenden Terme. Die Lösungsmenge einer GI/Ugl ist stets eine Teilmenge ihres Lösungsgrundbereichs.

Ermittle stets zunächst den Lösungsgrundbereich der zu lösenden GI/Ugl! Beachte auch die Wertebereiche der vorkommenden Terme! Auf diese Weise lässt sich manchmal die Lösungsmenge der GI/Ugl sofort ermitteln.

*Beispiel:*  $\sqrt{2x-8} + \sqrt{4-x^2} = 2$ . Da  $\sqrt{a}$  nur für  $a \geq 0$  definiert ist, muss gelten:

$$2x - 8 \geq 0 \quad \text{und} \quad 4 - x^2 \geq 0,$$

$$2x \geq 8 \quad \text{und} \quad x^2 \leq 4,$$

$$x \geq 4 \quad \text{und} \quad |x| \leq 2,$$

also  $D_1 = \langle 4; \infty \rangle$  und  $D_2 = \langle -2; 2 \rangle$

(Definitionsbereiche der beiden Wurzeln)

*Lösungsgrundbereich:*  $X = D_1 \cap D_2 = \emptyset$

Wegen  $L \subseteq X$  muss daher auch  $L = \emptyset$  gelten.

*Auftrag:* Ermittle jeweils die Lösungsmenge der folgenden GI/Ugl ohne äquivalent umzuformen!

a)  $|x-2| + 2 \geq 0$ ;    b)  $\sqrt{2x-2} - 2\sqrt{1-x} = 0$ ;    c)  $|x+1| + 3 = \text{sgn}(x+1)$ .

Oft ist es nützlich, sich durch das *graphische Lösungsverfahren* zunächst einen Überblick über die Lösungsmenge der GI/Ugl zu verschaffen. Man geht dabei wie folgt vor:

- Bringe die GI/Ugl in eine solche Form  $T_1(x) \leq T_2(x)$ , dass sich die Graphen von  $y = T_1(x)$  und  $y = T_2(x)$  möglichst einfach zeichnen lassen.

- Ermittle die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen.

Die Abszissen dieser Schnittpunkte sind die Lösungen der zugehörigen Gleichung.

Alle diejenigen  $x$ , für die der Graph von  $T_1$  "unterhalb" des Graphen von  $T_2$  liegt, bilden die Lösungsmenge der zugehörigen Ungleichung.

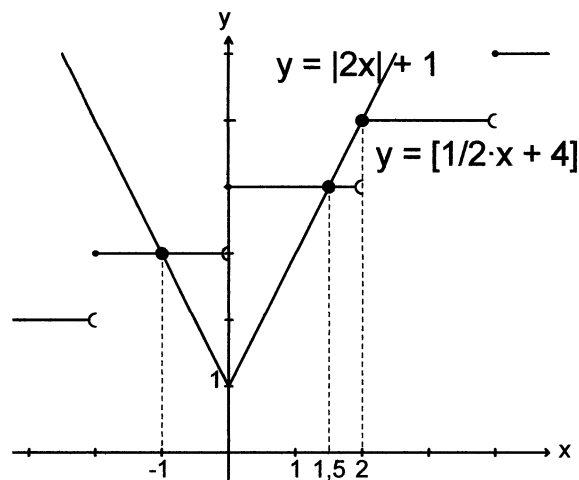
1. *Beispiel:*  $[\frac{1}{2}x + 4] - |2x| - 1 = 0$

$$[\frac{1}{2}x + 4] = |2x| + 1$$

Betrachte die Graphen von  $y = [\frac{1}{2}x + 4]$

und  $y = |2x| + 1$ .

Aus den Monotonieeigenschaften der zugehörigen Funktionen folgt, dass es außer den in nebenstehender Abbildung festgehaltenen drei Schnittpunkten keine weiteren Schnittpunkte geben kann.



Folglich lautet die gesuchte Lösungsmenge  $L = \{-1; 1,5; 2\}$  .

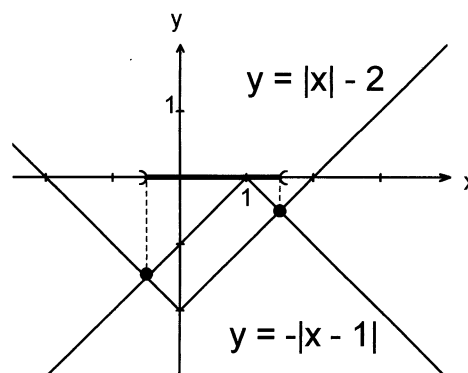
Eine Probe bestätigt die Richtigkeit.

2. Beispiel:  $|x| + |x - 1| < 2$   
 $|x| - 2 < -|x - 1|$

Betrachte die Graphen von

$y = |x| - 2$  und  $y = -|x - 1|$  .

Man erhält  $L = (-0,5; 1,5)$  .



Überzeuge dich durch eine Probe, dass für die Randpunkte dieses offenen Intervalls Gleichheit gilt!

Das Quadrieren und das Multiplizieren beider Seiten einer GI/Ugl mit einem Term ist nur unter einschränkenden Bedingungen eine äquivalente Umformung (vgl. die Regeln IIabc und IV im Arbeitsmaterial für Klasse 7).

Daher sind beim Anwenden dieser Regeln meist Fallunterscheidungen erforderlich.

Beispiel:  $\frac{x-2}{x+3} > 2$  ;  $x \neq -3$  . Multiplikation mit  $(x+3) (\neq 0)$  führt zu

$$x - 2 > 2(x + 3) \text{ und } x + 3 > 0 \quad \underline{\text{oder}} \quad x - 2 < 2(x + 3) \text{ und } x + 3 < 0$$

$$x - 2 > 2x + 6 \quad \text{und} \quad x > -3 \quad \text{analog}$$

$$-8 > x \quad \text{und} \quad x > 3 \quad -8 < x \quad \text{und} \quad x < -3$$

(kein  $x$  erfüllt diese Bedingungen)

$$-8 < x < -3$$

$$L_1 = \emptyset$$

$$L_2 = (-8; -3)$$

$$L = L_1 \cup L_2 = (-8; -3)$$

**Beachte:** Zur Konjunktion zweier Aussageformen gehört der Durchschnitt ihrer Erfüllungsmengen; zur Alternative zweier Aussageformen gehört die Vereinigung ihrer Erfüllungsmengen.

## Literaturhinweise

- /1/ Mathematik in Übersichten, Berlin 1989
- /2/ Varga, T.: Mathematische Logik für Anfänger, Aussagenlogik; Berlin 1972
- /3/ Varga, T.: Mathematische Logik für Anfänger, Prädikatenlogik; Berlin 1973
- /4/ Grosche, G.: Übungen für Junge Mathematiker, Teil II, Elementargeometrie, Leipzig 1969, MSB 37
- /5/ Lehmann, E.: Übungen für Junge Mathematiker, Teil I, Zahlentheorie, Leipzig 1968, MSB 36
- /6/ Kleinfeld, G.: Übungen für Junge Mathematiker, Teil III, Ungleichungen, Leipzig 1969, MSB 38
- /7/ Borneleit, P. Übungen für Junge Mathematiker, Teil IV, Gleichungen, Leipzig 1976, MSB 87
- /8/ Hameister, E.: Geometrische Konstruktionen und Beweise in der Ebene, Leipzig 1966, MSB 4
- /9/ Dynkin/Uspenski: Mathematische Unterhaltungen II, Aufgaben aus der Zahlentheorie, Köln 1978, MSB 20
- /10/ Donath, E.: Die merkwürdigen Punkte und Linien des ebenen Dreiecks, Berlin 1968, MS 44