Bezirkskomitee Chemnitz
zur Förderung math.-nat. begabter und interessierter Schüler
www.bezirkskomitee.de

Korrespondenzzirkel Mathematik

Arbeitsmaterial für Klasse 7

Inhalt Seite

1. GRUNDLAGEN AUS LOGIK UND MATHEMATIK

1.1. Aussagen und deren Verknüpfung ; einige Gesetze der Aussagenlogik

Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde, dem man genau einen Wahrheitswert (W: wahr ; F: falsch) zuordnen kann.
Mit den Aussagenvariablen p , q , r , ... bezeichnen wir beliebige Aussagen.
Betrachtet man nur den Wahrheitswert (nicht den Inhalt) von Aussagen, dann gibt es genau 2 verschiedene Arten von Aussagen, genau 4 verschiedene Paare (p,q) von Aussagen, genau 8 verschiedene Tripel (p,q,r) von Aussagen, ... , genau 2^n verschiedene n-Tupel von Aussagen.

Zu jeder Aussage p gehört deren *Negation "nicht* p " (geschrieben: ~p) .
~p ist genau dann falsch (bzw. wahr), wenn p wahr (bzw. falsch) ist.
Die Negation lässt sich daher durch die nebenstehende Wahrheitswerttabelle definieren.

p	~p
W	F
F	W

Zwei Aussagen lassen sich verknüpfen. Die wichtigsten *Verknüpfungen* sind:

Konjunktion: p *und* q , geschrieben $p \wedge q$;
Alternative: p *oder* q , geschrieben $p \vee q$;

Implikation: *wenn* p , so q , geschrieben: $p \Rightarrow q$;
Äquivalenz: p *genau dann, wenn* q , geschrieben: $p \Leftrightarrow q$.

Eine *Konjunktion* aus zwei Aussagen ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen wahr sind; in allen anderen Fällen ist die Konjunktion falsch.
(In der Alltagssprache sagt man statt "p und q" auch "sowohl p als auch q" , "nicht nur p , sondern auch q" , "zwar p , aber auch q" .)

Eine *Alternative* aus zwei Aussagen ist genau dann falsch, wenn beide Aussagen falsch sind; in allen anderen Fällen ist die Alternative wahr.
(Unterscheide genau zwischen "oder" und "entweder - oder" ; dies sind zwei verschiedene Verknüpfungen.)

Eine *Implikation* aus zwei Aussagen ist genau dann falsch, wenn das Vorderglied p wahr und das Hinterglied q falsch ist; in allen anderen Fällen ist die Implikation wahr.
(Beachte, dass - abweichend vom Alltagssprachgebrauch - Implikationen mit falschem Vorderglied stets als wahr bezeichnet werden! Statt "wenn p, so q" sagt man auch "wenn p, dann q", "aus p folgt q" , " q lässt sich aus p ableiten" , " p ist *hinreichend* für q " oder " q ist *notwendig* für p " .)

Eine *Äquivalenz* aus zwei Aussagen ist genau dann wahr, wenn beide Aussagen denselben Wahrheitswert besitzen; in allen anderen Fällen ist sie falsch.
(Beachte, dass " $p \Leftrightarrow q$ " gleichbedeutend ist mit " $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ " .)

Die Definitionen dieser Verknüpfungen lassen sich durch folgende *Wahrheitswerttabellen* festhalten:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

Zu jeder mit Hilfe dieser Verknüpfungen gebildeten Aussagenverbindung lässt sich eindeutig eine "Wahrheitswertspalte" ermitteln.

Ist eine Aussagenverbindung unabhängig von den Wahrheitswerten der verknüpften Aussagen stets wahr (d.h. tauchen in der Wahrheitswertspalte nur "W" auf), dann liegt eine *allgemeingültige Aussagenverbindung* (ein *Gesetz der Aussagenlogik*) vor.

Beispiele für Gesetze der Aussagenlogik

a) $\sim(p \wedge \sim p)$; Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch:
Nie können eine Aussage und ihre Negation gleichzeitig wahr sein.

b) $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$; Abtrennungsregel:
Wenn p gilt und aus p die Aussage q folgt, dann gilt auch q .

c) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$; Gesetz zur Fallunterscheidung:
Wenn $(p \vee q)$ gilt und p nicht gilt, dann muss q gelten.

d) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$; Kettenschluss; Transitivität der Implikation .

Ist der aus zwei Aussagenverbindungen A , B gebildete Ausdruck $A \Leftrightarrow B$ allgemeingültig (d.h. stimmen die Wahrheitswertspalten von A und B überein), dann sagt man, dass A und B *wertverlaufsgleich* (äquivalent, gleichbedeutend) sind und schreibt $A \equiv B$.

(Wertverlaufsgleiche Aussagenverbindungen drücken denselben Sachverhalt lediglich in verschiedenen Formulierungen aus.)

Beispiele für wertverlaufsgleiche Ausdrücke:

a) $\sim\sim p \equiv p$; Satz von der doppelten Verneinung .

b) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$; $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$; Kommutativität von Konjunktion bzw. Alternative .

c) $[\sim(p \wedge q)] \equiv (\sim p \vee \sim q)$; $[\sim(p \vee q)] \equiv (\sim p \wedge \sim q)$; Regeln von de-MORGAN .

d) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv [\sim(p \wedge \sim q)] \equiv (\sim p \vee q)$;
Umformulierungen einer "Wenn-dann-Aussage" .

e) $[(p \wedge q) \Rightarrow r] \equiv [\sim r \Rightarrow \sim(p \wedge q)] \equiv [(\sim r \wedge q) \Rightarrow \sim p] \equiv [(p \wedge \sim r) \Rightarrow \sim q] \equiv [(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \equiv$
$\equiv [q \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$; Umformulierungen eines Satzes mit zwei Voraussetzungen .

Aufgabe: Weise nach, dass die unter d) genannten Ausdrücke wertverlaufsgleich sind.

Lösung:

		A			B		C	D
p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$\sim p \vee q$
W	W	W	F	F	W	F	W	W
W	F	F	W	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W	F	W	W
F	F	W	W	W	W	F	W	W

Aufgabe: Schüler unterhalten sich über einen Wettkampf und äußern folgende Vermutungen:

(1) Bestimmt wird Peter verlieren oder Karl gewinnen.
(2) Ich glaube, dass Peter oder Karl oder auch beide zu den Verlierern gehören werden.
(3) Auf keinen Fall werden sowohl Peter als auch Karl gewinnen.
(4) Es kommt bestimmt nicht vor, dass zwar Peter gewinnt, aber Karl verliert.
(5) Wenn Karl verliert, dann verliert Peter erst recht.

Nach dem Wettkampf stellt sich heraus, dass genau zwei dieser Vermutungen falsch waren. Ermittle die richtigen Vermutungen! Hat Karl gewonnen oder verloren?

Lösung: Bedeute p : "Peter hat gewonnen" ; q: "Karl hat gewonnen" ;
also $\sim p$: "Peter hat verloren" ; $\sim q$: Karl hat verloren" .
Dann haben obige Vermutungen folgende logische Struktur:
(1) $\sim p \vee q$; (2) $\sim p \vee \sim q$; (3) $\sim(p \wedge q)$; (4) $\sim(p \wedge \sim q)$; (5) $\sim q \Rightarrow \sim p$.
Folglich sind (1), (4) und (5) wertverlaufsgleich (sie sind gleichbedeutend mit $p \Rightarrow q$) und stellen daher nur verschiedene Formulierungen ein und derselben Vermutung dar.
Auch (2) und (3) sind nach der Regel von de-MORGAN wertverlaufsgleich.
Folglich können nur (2) und (3) die beiden falschen, (1), (4) und (5) die drei richtigen Vermutungen sein.
Da (3) falsch ist, ist $(p \wedge q)$ wahr, also ist auch q wahr, also hat Karl gewonnen.

1.2. Logische Verwandtschaften zwischen Aussagen

Wahre Aussagen heißen in der Mathematik Lehrsätze oder *Sätze* .

Jeder mathematische Satz lässt sich als Implikation (in der Wenn-dann-Form) formulieren:

$V_1 \wedge V_2 \wedge \ldots \wedge V_n \Rightarrow B$, gelesen:

Wenn (V_1 *und* V_2 *und* ..... *und* V_n) gilt, *dann* gilt auch B .

$V_1 , V_2 , \ldots , V_n$ heißen *Voraussetzungen* des Satzes, B seine *Behauptung* .

1.2.1. Äquivalentes Umformen von Sätzen

Vertauscht man die Behauptung eines Satzes mit einer oder mehreren (u.U. allen) seinen Voraussetzungen *und negiert* die vertauschten Teile, dann entsteht ein zum Ausgangssatz *äquivalenter Satz*, der dasselbe aussagt wie der Ausgangssatz und daher keines erneuten Beweises bedarf.
Man spricht hier von einer *"Kontraposition"* des Satzes; vgl. auch 1.1., S.3, (d) und (e) .

(S) $V \Rightarrow B$; "Wenn $4|x$, dann $2|x$ " .

(K) nicht $B \Rightarrow$ nicht V ; "Wenn nicht $2|x$, dann nicht $4|x$ " .

Mache dir die folgend beschriebenen *Umformungen eines Satzes mit zwei Voraussetzungen* anhand des Stufenwinkelsatzes klar:
(S) $V_1 \wedge V_2 \Rightarrow B$;
(K) nicht $B \Rightarrow$ nicht $(V_1 \wedge V_2)$; ["nicht$(V_1 \wedge V_2)$ ist äquivalent mit "nicht V_1 oder nicht V_2"].
(K_1) (nicht B) $\wedge V_2 \Rightarrow$ (nicht V_1) ;
(K_2) $V_1 \wedge$ (nicht B) $\Rightarrow$ (nicht V_2) ;
Statt "$V_1 \wedge V_2 \Rightarrow B$" kann man auch "$V_1 \Rightarrow (V_2 \Rightarrow B)$" oder "$V_2 \Rightarrow (V_1 \Rightarrow B)$ sagen; dies nennt man *"Herausziehen einer Teilvoraussetzung"*.

1.2.2. Das Umkehren von Sätzen

Man erhält eine *Umkehrung* eines Satzes, indem man seine Behauptung mit einer oder mehreren (u.U. allen)seinen Voraussetzungen *vertauscht*.
Eine Umkehrung einer wahren Aussage (d.h. eines Satzes) muss keine wahre Aussage sein. Ist sie eine wahre Aussage, dann muss sie *bewiesen*, ist sie eine falsche Aussage, dann muss sie *widerlegt* werden.
Ist eine Umkehrung eines Satzes wiederum ein Satz, dann kann man die beiden in einem Satz *zusammenfassen* , der dann eine "Genau-dann-wenn-Form" besitzt.

Beispiel (für einen Satz mit zwei Voraussetzungen):

(S) $V_1 \wedge V_2 \Rightarrow B$; (U) $B \Rightarrow V_1 \wedge V_2$; (Z) $(V_1 \wedge V_2) \Leftrightarrow B$;
(U_1) $B \wedge V_2 \Rightarrow V_1$; (Z_1) $V_2 \Rightarrow (V_1 \Leftrightarrow B)$;
(U_2) $V_1 \wedge B \Rightarrow V_2$; (Z_2) $V_1 \Rightarrow (V_2 \Leftrightarrow B)$.
Beachte, dass vor dem Zusammenfassen zu (Z_1) zunächst die den Sätzen (S) und (U_1) gemeinsame Teilvoraussetzung V_2 "herausgezogen" wurde.

Der Stufenwinkelsatz und seine Umkehrungen:

(S) Wenn α, β Stufenwinkel und $g||h$, dann $\alpha = \beta$.

(U) Wenn $\alpha = \beta$, dann α, β Stufenwinkel und $g||h$.
Dies ist eine falsche Aussage. Widerlegung: α , β könnten etwa auch Scheitelwinkel sein.

(U_1) Wenn $\alpha = \beta$ und $g||h$, dann α, β Stufenwinkel .
Dies ist eine falsche Aussage. Widerlegung: α , β könnten auch Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen sein.

(U_2) Wenn α, β Stufenwinkel und $\alpha = \beta$, dann $g || h$.
Dies ist eine wahre Aussage, sie muss bewiesen werden. Sie lässt sich mit der wahren Aussage (S) zu einer Genau-dann-wenn-Aussage zusammenfassen:
(Z_2) Wenn α, β Stufenwinkel sind, dann gilt: $\alpha = \beta$ genau dann, wenn $g || h$.

Merkregel: Vertauschen und Verneinen von B und V ist *"erlaubt"*; es entsteht dabei keine neue Aussage.
Nur Vertauschen oder *nur Verneinen* ist dagegen *"nicht erlaubt"*, da dadurch eine neue Aussage entsteht, die auch falsch sein kann.

Auftrag:
Lies die Sätze aus dem Material "Einige grundlegende planimetrische Sätze" durch, suche dabei diejenigen heraus, die in Klasse 6 behandelt wurden, und wiederhole sie im Zusammenhang!
Formuliere diese Sätze in der Wenn-dann-Form! Übe an ihnen das äquivalente Umformen und das Umkehren! Achte auf die durch (S) , (U) und (Z) festgehaltenen logischen Beziehungen zwischen den Sätzen!

Wir betrachten folgenden Satz über natürliche Zahlen x , y :

(S) "Wenn x ungerade ist und y ungerade ist, dann ist $(x+y)$ gerade ."
Bilde die Umkehrungen (U), (U_1) und (U_2) und stelle fest, ob es wahre oder falsche Aussagen sind! Widerlege falsche Aussagen durch ein Gegenbeispiel! Ist eine der Umkehrungen vermutlich wahr, dann fasse sie mit (S) zu einem Genau-dann-wenn-Satz zusammen!

1.2.3. Verallgemeinern und Spezialisieren von Sätzen

Fügt man zur den Voraussetzungen bzw. zur Behauptung eines Satzes neue Voraussetzungen bzw. Behauptungen hinzu, dann sagt man, dass die Voraussetzungen des Satzes bzw., seine Behauptung *verschärft* wurden.
Lässt man von den Voraussetzungen bzw. der Behauptung eines Satzes dagegen Teile weg, dann sagt man, dass die Voraussetzungen des Satzes bzw. seine Behauptung *abgeschwächt* wurden.

Eine Aussage, die man durch *Abschwächen der Voraussetzungen* oder durch *Verschärfen der Behauptung* eines Satzes erhält, nennt man <u>*Verallgemeinerung*</u> dieses Satzes.

Eine Aussage, die man durch *Verschärfung der Voraussetzungen* oder durch *Abschwächen der Behauptung* eines Satzes erhält, nennen wir <u>*Spezialisierung*</u> oder Spezialfall dieses Satzes.

Eine *Spezialisierung* eines Satzes ist stets wieder eine wahre Aussage und bedarf daher *keines erneuten Beweises.*
Eine *Verallgemeinerung eines Satzes* muss keine wahre Aussage sein, hier ist ein *Beweis oder* eine *Widerlegung* erforderlich.

Ist ein Satz S_2 eine Verallgemeinerung eines Satzes S_1 , dann ist S_1 eine Spezialisierung von S_2 , und umgekehrt.

(S): $V_1 \wedge V_2 \Rightarrow B_1 \wedge B_2$; Ausgangssatz
(S1): $V_1 \wedge V_2 \wedge V_3 \Rightarrow B_1 \wedge B_2$; Spezialisierung von (S)
(S2) $V_1 \wedge V_2 \Rightarrow B_1$; Spezialisierung von (S)

(S3): $V_1 \Rightarrow B_1 \wedge B_2$; Verallgemeinerung von (S)
(S4): $V_1 \wedge V_2 \Rightarrow B_1 \wedge B_2 \wedge B_3$; Verallgemeinerung von (S)
(S5): $V_1 \wedge V_2 \wedge V_3 \Rightarrow B_1 \wedge B_2 \wedge B_4$; Verallgemeinerung der Spezialisierung (S1)
(S6): $V_1 \Rightarrow B_1$; Verallgemeinerung der Spezialisierung (S2)

Beispiel: Es bedeute:

V_1: ABCD ist ein Parallelogramm ;
V_2: $\overline{AB} = \overline{BC}$;
V_3: $\sphericalangle BAC = 90°$;

B_1: $\overline{AC}$ halbiert $\overline{BD}$;
B_2: $\overline{BD}$ halbiert $\overline{AC}$;
B_3: $AC \perp BD$;
B_4: $\overline{AC} = \overline{BD}$.

(S): In jedem Rhombus (d.h. jedem Parallelogramm mit einem Paar gleich langer benachbarter Seiten) halbieren die Diagonalen einander (d.h. $\overline{AC}$ halbiert $\overline{BD}$ und $\overline{BD}$ halbiert $\overline{AC}$).

(S1): In jedem Quadrat halbieren die Diagonalen einander.

(S2): In jedem Rhombus halbiert eine der beiden Diagonalen die andere.

(S3): In jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.

(S4): In jedem Rhombus halbieren die Diagonalen einander und stehen aufeinander senkrecht.

(S5): In jedem Quadrat halbieren die Diagonalen einander und sind gleich lang.

(S6): In jedem Parallelogramm halbiert eine der beiden Diagonalen die andere.

Beachte:
Hat man einen Satz entdeckt und bewiesen, dann sollte man stets versuchen, *durch Umkehren oder Verallgemeinern zu einer neuen wahren Aussage zu gelangen.* Dabei ist es wichtig, die Voraussetzung bzw. die Behauptung geschickt in Teilvoraussetzungen bzw. Teilbehauptungen aufzuspalten. Manchmal findet man eine wahre Umkehrung oder Verallgemeinerung erst dann, wenn man vorher den Ausgangssatz spezialisiert hat (vgl. Umkehrung des Höhensatzes). Wiederhole in der Aufgabensammlung für Klasse 6 den Abschnitt "Umformen und Umkehren von Sätzen" !

1.3. Aussageformen und Mengen

Eine *Aussageform* ist ein Ausdruck mit einer oder mehreren Variablen, der in eine *Aussage* übergeht, wenn man alle vorkommenden Variablen *interpretiert* (d.h. wenn man für die Variablen bestimmte Elemente aus dem Variablengrundbereich einsetzt).

Aussageform	Interpretation	Aussage
$3 \mid x$, $x \in N$	$x = 12$	$3 \mid 12$ (wahr)
$3 \mid x$, $x \in N$	$x = 13$	$3 \mid 13$ (falsch)
$x + 1 < y + 1$, $x,y \in Q_+$	$x = 2$, $y = 3$	$2 + 1 < 3 + 1$ (wahr)
$x + 1 < y + 1$, $x,y \in Q_+$	$x = 4$, $y = 1$	$4 + 1 < 1 + 2$ (falsch)
$ggT(x;y) = z$, $x,y,z \in N$	$x = 12$, $y = 15$, $z = 3$	$ggT(12;15) = 3$ (wahr)
$ggT(x;y) = z$, $x,y,z \in N$	$x = 12$, $y = 15$, $z = 4$	$ggT(12;15) = 4$ (falsch)

Dabei haben wir mit N die Menge der natürlichen, mit Q_+ die Menge der gebrochenen Zahlen bezeichnet.

Die Menge aller $x \in X$, für die eine Aussageform $H(x)$ beim Interpretieren in eine wahre Aussage übergeht, nennt man *Erfüllungsmenge* dieser Aussageform über dem Grundbereich X . Die Erfüllungsmenge M einer Aussageform $H(x)$; $x \in X$ ist daher stets eine Teilmenge des Grundbereichs X , d.h. es gilt stets $M \subseteq X$.

Entsprechendes gilt für Aussageformen $H(x,y,...,z)$; $x \in X$, $y \in Y$, ... $z \in Z$ mit mehreren Variablen. Besitzt eine Aussageform n Variable, dann besteht ihre Erfüllungsmenge (falls sie nicht leer ist) aus geordneten n-Tupeln (spezielle Paaren, Tripeln usw.) von Elementen.

Aussageform	Erfüllungsmenge
$2\|x$; $x \in n$	{ gerade Zahl } = { 0, 2, 4, ..., 2n, ... }
$x\|12$; $x \in N$	{ 1, 2, 3, 4, 6, 12 }
$AX = BX$; $X \in$ {Punkt der Ebene}	Mittelsenkrechte m_{AB}
$x + y = 3$; $x,y \in N$	{ [0;3], [1;2], [2;1], [3;0] }
$x + y < 3$; $x,y \in N$	{ [0,0], [01], [0;2], [1;0], [1;1], [2;0] }

Bilde weitere Beispiele für Aussageformen und ihre Erfüllungsmengen!

Beachte, dass auch die leere Menge $\emptyset$ als Erfüllungsmenge auftreten kann, etwa bei der Ungleichung $x^2 < 0$, und dass die Erfüllungsmenge auch mit dem Erfüllungsgrundbereich zusammenfallen kann, etwa bei der Ungleichung $x^2 \geq 0$. Im erstgenannten Fall nennt man die Aussageform *kontradiktorisch*, im letztgenannten Fall *allgemeingültig*.

Besitzen zwei Aussageformen (mit demselben Grundbereich) dieselbe Erfüllungsmenge, dann nennt man sie *äquivalent* (über diesem Grundbereich).

Soll ein Element zwei Bedingungen *$H_1(x)$ und $H_2(x)$* erfüllen, dann muss es sowohl in der Erfüllungsmenge M_1 von $H_1(x)$ als auch in der Erfüllungsmenge M_2 von $H_2(x)$ enthalten sein.
Ein sehr einfaches Beispiel soll das Gesagte erläutern:
Zu ermitteln ist die Menge aller ungeraden Teiler von 90 , die zwischen 4 und 10 liegen.

	Aussageform	Erfüllungsmenge
Bedingung I	$x = 2n+1$, $n \in N$	M_1 = { 1, 3, 5, 7, 9, 11, ..., 2n+1, ... }
Bedingung II	$x\|90$, $x \in N$	M_2 = { 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90 }
Bedingung III	$4 < x < 10$, $x \in N$	M_3 = { 5, 6, 7, 8, 9,}

Durchschnittbildung: $M = M_1 \cap M_2 \cap M_3$ = { 5, 9 } .
Die Zahlen 5 und 9 und nur diese Zahlen erfüllen alle drei Bedingungen.

Eine Aussageform $H(x)$, $x \in X$ kann auf folgende Weisen in eine Aussage überführt werden:

a) Interpretation der Variablen x ; es entsteht eine *Einzelaussage* (z.B. "2 ist eine Primzahl").

b) Bindung der Variablen durch "Für alle x gilt: ... "; es entsteht eine *Allaussage* (z.B. "Alle durch 4 teilbaren Zahlen sind gerade").

c) Bindung der Variablen durch "Es gibt ein x , für das gilt: ... "; es entsteht eine *Existenzaussage* (z.B. "Es gibt eine Primzahl, die gerade ist").

Beachte, dass in der Mathematik das Wort "ein" stets im Sinne von "mindestens ein" verwendet wird und zu unterscheiden ist von "höchstens ein" und "genau ein").

Entsprechendes gilt für Aussageformen mit mehreren Variablen.

1.4. Das Beweisen von Sätzen (speziell von Allaussagen)

Einen Satz *beweisen* heißt, ihn aus wahren Aussagen (in endlich vielen Schritten) durch richtiges Schließen ableiten.

Den Nachweis der Falschheit einer Aussage nennt man *Widerlegung*.

Zum Nachweis der *Wahrheit einer Existenzaussage* genügt die Angabe eines *Beispiels* (z.B.: "Es gibt eine gerade Primzahl"; Beispiel: 2).

Zum Nachweis der *Falschheit einer Allaussage* genügt die Angabe eines *Gegenbeispiel* (z.B. "Alle Primzahlen sind ungerade"; Gegenbeispiel: 2).

Zum Nachweis der Wahrheit eines Allaussage oder der Falschheit einer Existenzaussage muss man einen *Beweis* (im engeren Sinne des Worts) führen.

Ein *(direkter) Beweis* (einer Allaussage) ist erbracht, wenn man von den Voraussetzungen ausgehend in endlich vielen Schritten über abgeleitete Feststellungen zur Behauptung gelangt, wobei jeder Beweisschritt eine Implikation ist und durch Angabe des verwendeten "Beweismittels" begründet wird. Als "Beweismittel" dürfen bewiesene Sätze, Formeln, Definitionen, Axiome und Umformungsregeln verwendet werden.

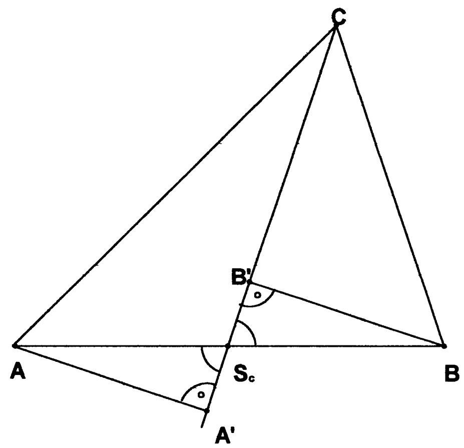
Jeder solche Beweis lässt sich in Form eines *Beweisschemas* darstellen. Bei dieser Darstellungsform kann man leicht nachprüfen, ob ein Beweis exakt und vollständig ist. Der zugehörige Lösungsplan lässt sich stets in Form eines *Lösungsgraphen* festhalten.

Bei *geometrischen Beweisen* darf man sich nicht auf die Anschauung berufen. Beweisfiguren dienen nur dazu, verwendete Bezeichnungen festzuhalten.

Taucht eine für den Beweis benötigte Bezeichnung nicht in den Voraussetzungen auf, dann führt man sie durch eine *"Zusatzvorausetzung" (ZV)* ein (oder hält sie in der Beweisfigur fest).

Satz:

Ist $\overrightarrow{CS_c}$ Seitenhalbierende eines Dreiecks ABC , dann haben A und B von dieser Geraden den gleichen Abstand.



V: $\overrightarrow{CS_c}$ ist Seitenhalbierende von $\triangle ABC$;

Beh.: $d(A;CS_c) = d(B;CS_c)$.

Beweis (in Form eines Beweisschemas):

Für $\overline{AC} = \overline{BC}$ gilt der Satz offensichtlich; sei $\overline{AC} \neq \overline{BC}$.

ZV: Sei A' bzw. B' der Fußpunkt des Lots von A bzw. B auf die Gerade CS_c :

V	$\Rightarrow$	(1)	$\overline{AS_c} = \overline{BS_c}$;	[Definition Seitenhalbierende"] .
V	$\Rightarrow$	(2)	$\sphericalangle AS_cA' = \sphericalangle BS_cB'$;	[Scheitelwinkelsatz]
ZV	$\Rightarrow$	(3)	$\sphericalangle S_cA'A = \sphericalangle S_cB'B$;	[Definition "Lot"] .
(1),(2),(3)	$\Rightarrow$	(4)	$\triangle S_cA'A \cong \triangle S_cB'B$;	[Kongruenzsatz wsw] .
(4)	$\Rightarrow$	(5)	$\overline{AA'} = \overline{BB'}$;	[entsprechende Seiten in kongruenten Dreiecken] .
(5)	$\Rightarrow$	Beh.:	$d(A;CS_c) = d(B;CS_c)$;	[Definition "Abstand"] .

Damit ist gezeigt, dass der Satz (V $\Rightarrow$ Beh.) gilt, w.z.b.w. .

Lösungsgraph (vgl. auch das Material "Einige Regeln", Seite 1) :

$$\left.\begin{array}{l} V \rightarrow \overline{AS_c} = \overline{BS_c} \\ V \rightarrow \sphericalangle AS_cA' = \sphericalangle BS_cB' \\ ZV \rightarrow \sphericalangle S_cA'A = \sphericalangle S_cB'B \end{array}\right] \rightarrow \triangle S_cA'A \cong \triangle S_cB'B \rightarrow \overline{AA'} = \overline{BB'} \rightarrow \boxed{\text{Beh.}}$$

1.5. Das Lösen von Bestimmungsaufgaben

Bei vielen Bestimmungsaufgaben ist die Menge aller Elemente aus einer vorgegebenen Menge zu ermitteln, die gewisse vorgegebene Bedingungen erfüllen. Jede solche *Bedingung* lässt sich als *Aussageform* schreiben.
(Als wichtiger Spezialfall treten *Gleichungen* auf.)
Allgemein: *Zu einer Konjunktion von Aussageformen* - speziell zu einer einzigen Aussageform - ist die *zugehörige Erfüllungsmenge* zu *bestimmen* .
(Dies wird etwa bei den meisten zahlentheoretischen Bestimmungsaufgaben gefordert.)
Werden geordnete Paare, Tripel bzw. n-Tupel gesucht, dann werden die zugehörigen Bedingungen durch Aussageformen mit 2 , 3 bzw. n Variablen festgehalten.
(Dies ist etwa bei *Gleichungssystemen* mit mehreren Variablen sowie bei vielen logisch-kombinatorischen Bestimmungsaufgaben der Fall.)

Die Lösung einer solchen Aufgabe muss stets enthalten:

(a) Die Angabe der gesuchten *Erfüllungsmenge* (der gesuchten Elemente, Paare usw.) .

(b) Den *Einzigkeitsnachweis* , in dem gezeigt wird:
"Wenn ein Element alle gestellten Bedingungen erfüllt, dann gehört es zur angegebenen Erfüllungsmenge".
(Oft spricht man hierbei von einer *"begründeten Herleitung"* .)

(c) Den *Existenznachweis* , in dem gezeigt wird:
"Wenn ein Element zur angegebenen Erfüllungsmenge gehört, dann erfüllt es alle gestellten Bedingungen".
(Manchmal nennt man diesen Nachweis auch *"Probe".*)

Meist stellt man die Lösung einer solchen Aufgabe wie folgt dar:
"Angenommen, die Aufgabe besitzt eine Lösung. Dann müsste gelten: ....
Folglich gilt: Wenn die Aufgabe Lösungen besitzt, dann können es nur die folgenden sein:
.... (*Einzigkeitsnachweis* nebst Angabe der *Erfüllungsmenge.*)
Es sind dies alles tatsächlich Lösungen, denn es gilt: ....
(Probe als *Existenznachweis.*)

Es gibt auch Bestimmungsaufgaben, bei denen *Daten a, b, ..., c* und Beziehunge*n* gegeben sind und eine *Unbekannte x* gesucht wird, wobei diese Unbekannte durch die Daten ausgedrückt werden soll: $x = f(a,b,...,c)$.
Meist ist dabei vom Sachverhalt her klar, dass es genau ein solches Element gibt.
(Dies ist etwa bei *Sachaufgaben* und bei *geometrischen Bestimmungsaufgaben* meist der Fall.)
Bei solchen Aufgaben muss man in der Regel zunächst *Beziehungen zwischen den gegebenen, den gesuchten und günstig gewählten Hilfsgrößen suchen* , bis man als *"Ansatz"* ein *Gleichungssystem* (speziell eine einzelne Gleichung) erhält, das es (durch Eliminieren der Hilfsgrößen) gestattet, die gesuchte Größe durch die gegebenen Größen auszudrücken.

Lies im Material "Einige Regeln" auf den Seiten 3, 4, 7, 8,10, 12, 15, 16, jeweils die Regeln (3), (3.1) und (3.2) durch!

2. GEOMETRIE

2.1 Konstruktionsaufgaben

Eine jede Konstruktionsaufgabe lässt sich so *umformulieren*, dass nur Punkte und Beziehungen zwischen ihnen gegeben und dass *nur Punkte gesucht* sind.
Jede *Konstruktionsbeschreibung* besteht aus einer endlichen Folge von Schritten, wobei in jedem Schritt aus gegebenen oder bereits konstruierten geometrischen Gebilden ein neues geometrisches Gebilde konstruiert wird. Da nur Zirkel und Lineal (ohne Maßeinteilung) als Zeichengeräte zugelassen sind, können als solche Objekte nur Punkte, Geraden, Strahlen, Strecken Kreise oder Kreisbogen auftreten. Da sich diese Objekte stets durch Punkte eindeutig festlegen lassen, läuft jede Konstruktion letztlich auf die *Konstruktion von Punkten* hinaus.
Jeder *Punkt* lässt sich *als Durchschnitt zweier geometrischer Örter* konstruieren.
Ein geometrischer Ort ist eine Menge von Punkten, die eine bestimmte Bedingung (Beziehung, allgemein Aussageform) erfüllen.
Präge dir die im Material "Geometrische Örter" genannten ersten vier geometrischen Örter gut ein!
Lies in "Einige Regeln" auf Seite 7 die Regeln (1), (3.1), (2.1) und (2.2) zur Lösung von Konstruktionsaufgaben durch! Beachte vor allem die in (3.1) geschilderte *Methode der geometrischen Örter* !
Achte auf den Zusammenhang zur Methode der Durchschnittsbildung von Erfüllungsmengen in Abschnitt 1.3., Seite 9/10 !

Konstruktionsbeschreibungen werden wir in einer Kurzform notieren, die es gestattet, die Exaktheit und Vollständigkeit der Lösung leicht nachzuprüfen. Ferner werden wir bei jedem Schritt untersuchen, ob (bzw. unter welchen Bedingungen) dieser Schritt eindeutig ausführbar ist.
Wir verabreden folgende *abkürzende Bezeichnungsweisen* :

$k(M; r = 4cm)$: Kreis mit dem Mittelpunkt M , dessen Radius 4cm lang ist .

$k(M;r) \cap g = \{S,S_1\}$: Der Kreis k schneidet die Gerade g in den beiden Punkten S und S_1 .

$P \in AB$: Der Punkt P liegt auf der Geraden AB ; die Gerade AB geht durch den Punkt P .

$g \cap h = \{S\}$; $g \perp h$: Die Geraden g und h schneiden einander im Punkt S und stehen senkrecht aufeinander.

m_{AB} : Die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$.

$\overline{AH}_a$, $\overline{AS}_a$, $\overline{AW}_a$: Die zum Punkt A gehörende Höhe, Seitenhalbierende bzw. Winkelhalbierende im Dreieck ABC .

Beispiel: Zu konstruieren sind alle (untereinander nicht kongruenten) Dreiecke ABC, die folgende Bedingungen erfüllen:
(a) $\overline{AC} = b = 4cm$; (b) $\overline{AB} = c = 6cm$; (c) $\overline{CH}_c = h = 3cm$; (d) $\overline{CH}_c$ ist Höhe in $\triangle ABC$.

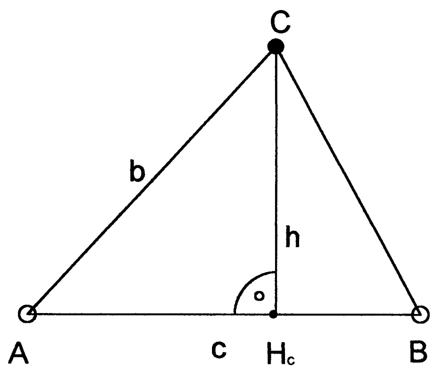
Hier ist es günstig, mit Bedingung (b) zu beginnen. Das führt zu folgender *Umformulierung* der Aufgabe:

Geg.: Punkte A , B mit $\overline{AB} = c$;

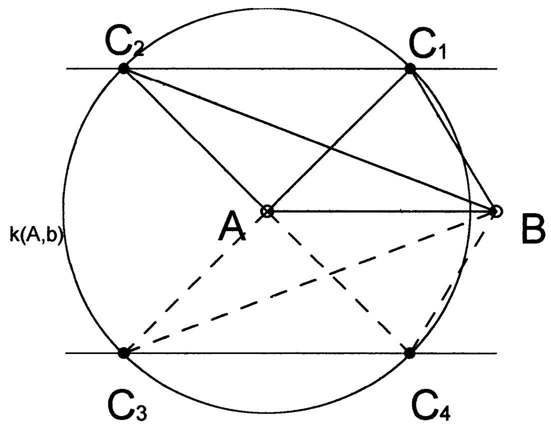
Ges.: Punkt C .

Bedingungen	geometrischer Ort
1) $\overline{AC} = b$	$k(A;b)$
2) $d(C;AB) = h$	Parallelenpaar $(g;g_1)$

Durchschnittsbildung: $k(A;b) \cap (g;g_1) = \{ C_1, C_2, C_3, C_4 \}$.



Konstruktionsbeschreibung:



(1) $\overline{AB} = c = 6\text{cm}$; (eindeutig konstruierbar) .

(2) Parallelenpaar $(g;g_1)$ zur Geraden AB im Abstand $h = 3\text{cm}$; (eindeutig konstruierbar).

(3) $k(A;\, b = 4\text{cm}) \cap (g;g_1) = \{ C_1, C_2, C_3, C_4 \}$; (es gibt 4 Schnittpunkte, weil $b > h$ gilt).

$\triangle ABC_1$ und $\triangle ABC_2$ sind *zwei (verschiedene) Lösungen* der Aufgabe;
$\triangle ABC_3$ und $\triangle ABC_4$ sind zu diesen Dreiecke kongruent und werden daher nicht als weitere Lösungen angesehen.

Auch Konstruktionsaufgaben sind *Bestimmungsaufgaben*, bei deren Lösung ein Einzigkeitsnachweis und ein Existenznachweis geführt werden müssen (vgl. Abschnitt 1.5., S.9) .
Sind die Daten nicht konkret, sondern nur als *Parameter* gegeben, dann ist außerdem zu untersuchen, unter welchen Bedingungen Lösungen existieren und wie viel verschiedene Lösungen existieren können.

Zur *vollständigen Lösung einer Konstruktionsaufgabe* gehören:

I) *Einzigkeitsnachweis :*
Es ist zu zeigen: "Wenn ein geometrisches Objekt alle gegebenen Bedingungen erfüllt, dann lässt es sich auf folgende Weise konstruieren: .... "

II) *Konstruktionsbeschreibung* nebst Angabe der Bedingungen, unter denen die einzelnen Schritte (ein- oder mehrdeutig) ausführbar sind.

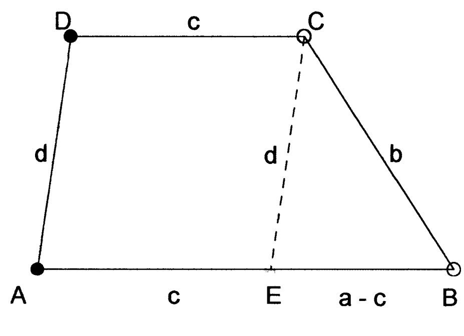
IIa) *Determination:*
Angabe der Bedingungen, unter denen keine, eine oder mehrere Lösungen existieren.

III) *Existenznachweis:*
Es ist zu zeigen: "Wenn ein geometrisches Objekt in der beschriebenen Weise konstruiert wurde, dann erfüllt dieses geometrische Objekt alle gestellten Bedingungen, ist also eine Lösung der Aufgabe."

Damit ist dann gezeigt, dass durch die Konstruktionsbeschreibung ein Verfahren angegeben wird, das es gestattet, aus den gegebenen Daten alle Figuren und auch nur solche Figuren zu konstruieren, die alle gestellten Bedingungen erfüllen.
Zusätzlich kann man noch die Anfertigung einer *Konstruktionszeichnung* fordern.

Beispiel:

Zu konstruieren sind alle Vierecke ABCD , die folgende Bedingungen erfüllen:
(a) $\overline{AB} = a$; (b) $\overline{BC} = b$; (c) $\overline{CD} = c$ mit $c < a$;
(d) $\overline{DA} = d$; (e) ABCD ist ein Trapez mit $AB \| CD$.



I) Wenn ein Viereck ABCD die gegebenen Bedingungen erfüllt, dann gilt:
Wegen (a) und (c) gibt es genau einen (Hilfs-) Punkt $E \in \overline{AB}$, für den $\overline{AE} = c$ und $\overline{EB} = a - c$ gilt.
Wegen (c) und (e) gilt dann $\overline{AE} = \overline{CD}$ und $AE \| CD$, also ist AECD ein Parallelogramm, für das dann wegen (d) auch $\overline{EC} = \overline{AD} = d$ gilt.

Folglich gilt für das (Hilfs-) Dreieck EBC : $\overline{EB} = a - c$, $\overline{EC} = d$ und wegen (b) auch $\overline{BC} = b$.
A liegt dann auf BE und wegen (a) gilt $\overline{AB} = a$.
Für D gilt dann $\overline{AD} = d$ und $\overline{CD} = c$.
Folglich lässt sich jede Lösung ABCD unserer Aufgabe *auf folgende Weise konstruieren:*

II) (1) Dreieck EBC aus $\overline{EB} = a - c$, $\overline{BC} = b$ und $\overline{CE} = d$; [eindeutig konstruierbar, falls folgende Dreiecksungleichungen erfüllt sind:
$b+d > a - c$ und $(a - c) + b > d$ und $(a - c)+d > b$].
(2) $A \in \overline{BE}$ mit $\overline{AB} = a$; [eindeutig konstruierbar].
(3) D so, dass im Viereck AECD gilt: $\overline{AD} = d$ und $\overline{CD} = c$; [eindeutig konstruierbar] .

IIa) Es gibt genau eine Lösung ABCD , wenn alle drei in (1) genannten Ungleichungen erfüllt sind; ist eine der Ungleichungen nicht erfüllt, dann gibt es keine Lösung.

III) Wegen (1) gilt $\overline{BC} = b$; wegen (3) gilt $\overline{CD} = c$ und $\overline{DA} = d$; wegen (2) gilt $\overline{AB} = a$; folglich erfüllt ABCD die Bedingungen (a), (b), (c), (d) .
Wegen (1) und (2) gilt $\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = a - (a - c) = c$ und daher $\overline{AE} = \overline{CD}$. Wegen (1) und (3) wird $\overline{AD} = \overline{EC} = d$. Folglich ist AECD (als Viereck mit gleich langen Gegenseiten) ein Parallelogramm und es gilt (laut Definition von "Parallelogramm") AE||CD .
Wegen (1) und (2) gilt $E \in \overline{AB}$, also auch AB||CD, folglich ist *ABCD ein Trapez* , und auch Bedingung (e) ist erfüllt.
Folglich erfüllt jedes auf obige Weise konstruierte Viereck ABCD alle gestellten Bedingungen, d.h. ist Lösung unserer Aufgabe.

2.2. Ortsaufgaben

Geometrische Ortsaufgaben sind spezielle *Bestimmungsaufgaben.*
Gesucht ist jeweils eine Punktmenge M , deren Elemente X einer Bedingung genügen, die sich in Form einer Aussageform H(X) schreiben lässt.
Der geometrische Ort M ist die Erfüllungsmenge von H(X) . Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben ist, betrachten wir hierbei stets nur Punktmengen in der Ebene.
Wiederhole in diesem Zusammenhang die Abschnitte 1.3. und 1.5. und lies im Material "Einige Regeln" die Ausführungen auf Seite 8/9 .

Um eine solche Aufgabe zu lösen, versucht man zunächst, den gesuchten *geometrischen Ort* zu *erraten* (indem man eine genaue Figur zeichnet und einige Spezialfälle untersucht).
Ist dies gelungen, dann sind folgende *Sätze* zu *beweisen*:

(S) "Wenn $X \in M$, dann gilt H(X)" oder "Wenn H(X) nicht gilt, dann $X \notin M$ " .

(U) "Wenn H(X) gilt, dann $X \in M$" oder "Wenn $X \notin M$, dann gilt H(X) nicht" .

Damit ist bewiesen: (Z) X liegt auf M *genau dann*, wenn die Bedingung H(X) erfüllt ist .

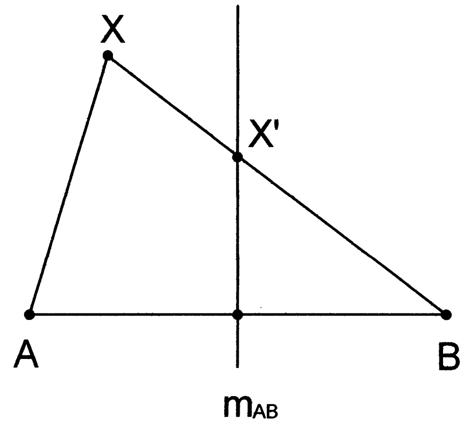
Der *Beweis von (S)* entspricht dem <u>*Existenznachweis*</u>, der *Beweis von (U)* dem <u>*Einzigkeitsnachweis*</u>.
Beachte, dass man beim Beweisen eine Umkehrung auf Gedanken zurückgreifen kann, die beim Beweis des Ausgangssatzes nützlich waren.

Beispiel:

Ermittle die Menge aller Punkte X (einer Ebene), die (für $A \neq B$) die *Bedingung* $\overline{AX} = \overline{BX}$ erfüllen.

Der gesuchte geometrische Ort ist die *Mittelsenkrechte* m_{AB} der Strecke $\overline{AB}$.

Um dies zu zeigen, ist zweierlei zu beweisen:



(S) Wenn $X \in m_{AB}$, dann gilt $\overline{AX} = \overline{BX}$.

Auftrag: Beweise diesen Satz!

(U) Wenn $X \notin m_{AB}$, dann gilt $\overline{AX} \neq \overline{BX}$.

Beweis:
Wenn $X \notin m_{AB}$, dann tritt genau einer der folgenden *zwei Fälle* ein:
(1) Strecke $\overline{BX}$ schneidet m_{AB} im Punkt X' ;
(2) Strecke $\overline{AX}$ schneidet m_{AB} im Punkt X'' .
Im Fall (1) entsteht ein Dreieck AX'X (das auch zu einer doppelt durchlaufenen Strecke entarten kann), und laut Dreiecksungleichung gilt

$$\overline{AX'} + \overline{XX''} > \overline{AX} .$$

Wegen $X' \in m_{AB}$ gilt $\overline{AX'} = \overline{BX'}$,
also gilt wegen $\overline{XX'} + \overline{XX'} = \overline{BX}$
die Beziehung $\overline{BX} > \overline{AX}$.
Bei Fall (2) folgt analog $\overline{BX} < \overline{AX}$. Folglich gilt stets $\overline{AX} \neq \overline{BX}$; w.z.b.w. .

3. ZAHLENTHEORIE

Zur Zahlentheorie rechnen wir alle Aufgaben, die über dem Bereich der natürlichen oder über dem Bereich der ganzen Zahlen zu lösen sind.

3.1. Grundgleichung der Zahlentheorie ; Euklidischer Algorithmus

Zu jeder ganzen Zahl a und jeder positiven ganzen Zahl m gibt es stets genau ein Paar q , r von ganzen Zahlen, so dass gilt:

$a = qm + r$ mit $0 \leq r < m$; *Grundgleichung der Zahlentheorie .*

Dabei heißt r der "*positiv* (nichtnegativ) *kleinste Rest*" zu gegebenem a und m .

Beispiele: Wenn a = 8 und m = 5, dann q = 1 und r = 3 ;
Wenn a = 8 und m = 9, dann q = 0 und r = 8 ;
Wenn a = -5 und m = 3, dann q = -2 und r = 1 .

Bilde weitere Beispiele und mache dir folgendes klar:
Zu gegebenen m gibt es stets genau m verschiedene positiv kleinste Reste: $r \in \{0,1,2,....,m-1\}$.

Es gibt auch stets m "*absolut kleinste Reste* $\bar{r}$ ".

Beispiele: m = 6 : $r \in \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$ und $\bar{r} \in \{ -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$.
m = 5 : $r \in \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$ und $\bar{r} \in \{ -2, -1 ,0, 1, 2 \}$.
Wenn a = 8 und m = 9 , dann $\bar{q} = 1$ und $\bar{r} = -1$.
Wenn a = 8 und m = 5 , dann $\bar{q} = 2$ und $\bar{r} = -2$.

Man kann zu jedem Paar (a;b) von natürlichen Zahlen stets eindeutig den (kleinsten nichtnegativen) Rest r bestimmen, den a bei Division durch b ($\neq 0$) lässt.
Dies liefert die Grundlage für ein Verfahren zur Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen, das *Euklidischer Algorithmus* genannt wird.

Es gilt: $a = bq + r$ mit $0 \leq r < b$. Analog gehört zu $(b;r)$ der
Rest r_1 : $b = rq_1 + r_1$ mit $0 \leq r_1 < r$. Zu $(r;r_1)$ gehört dann der
Rest r_2 : $r = r_1q_2 + r_2$ mit $0 \leq r_2 < r_1$; usw.
Daher gilt stets $r > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots$, und da es sich hier um natürliche Zahlen handelt, muss es schließlich einen Rest r_n geben, für den $r_n = 0$ gilt.

Es lässt sich zeigen, dass *der letzte von 0 verschiedene Rest* der *ggT(a;b)* ist. Weiterhin lässt sich zeigen, dass man statt der kleinsten nichtnegativen Reste auch die absolut kleinsten Reste verwenden darf. Dies empfiehlt sich sogar, weil man auf diese Weise meist mit weniger Rechenschritten auskommt.

Beispiel: Berechnung von ggT(1573;637) .

$1573 = 637 \cdot 2 + 299$	$1537 = 13 \cdot 49 \cdot 2 + 13 \cdot 23$	$= 13(98 + 23)$	$= 13 \cdot 121$
$637 = 299 \cdot 2 + 39$	$637 = 13 \cdot 23 \cdot 2 + 13 \cdot 3$	$= 13(46 + 3)$	$= 13 \cdot 49$
$299 = 39 \cdot 8 - \mathbf{13}$	$299 = 13 \cdot 3 \cdot 8 - 13$	$= 13 \cdot 23$	
$39 = 13 \cdot 3 + 0$			

ggT(1573;637) = 13 .
Die "Rückrechnung" (durch schrittweises Einsetzen der erhaltenen Zerlegungen) liefert schließlich die gewünschte Faktorzerlegung.

Auftrag: Berechne ggT(5083;476) und die zugehörige Faktorzerlegung! Rechne selbstgewählte Beispiele, bis du den Algorithmus beherrschst!

3.2. Teilbarkeitslehre

Ist der zu einem geordneten Paar (a;b) von natürlichen Zahlen gehörende Rest in der Grundgleichung gleich Null, dann sagt man, dass a durch b *teilbar* ist, dass b ein *Teiler* von a ist.

Man definiert die Teilbarkeitsbeziehung auch für ganze Zahlen. Es ist allerdings üblich, als Teiler einer gegebenen Zahl nur positive ganze Zahlen anzugeben.

Seien a , b , c und q ganze Zahlen.
Definition: $a|b =_{Def}$ Es gibt ein q , so dass $b = qa$.
Sätze:
SI) $a|b$ und $b|c \Rightarrow a|c$; (Transitivität der Teilbarkeitsbeziehung)
SII) $a|b$ und $a|c \Rightarrow a|(b + c)$;
UII) $a|b$ und $a|(b + c) \Rightarrow a|c$;
SIII) $a|b$ oder $a|c \Rightarrow a|bc$;
SIV) $a|c$ und $b|c$ und a, b teilerfremd $\Rightarrow ab|c$;
UIV) $ab|c \Rightarrow a|c$ und $b|c$.

Definition: Eine natürliche Zahl heißt *Primzahl* genau dann, wenn sie genau zwei verschiedene Teiler besitzt (nämlich sich selbst und die 1) .

Satz: Jede natürliche Zahl größer 1 ist entweder eine Primzahl oder lässt sich auf genau eine Art als Produkt von Primzahlen darstellen.
Satz: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

3.3. Das Rechnen mit Kongruenzen (Modulrechnung)

Zwei ganze Zahlen, die bei Division durch eine natürliche Zahl $m \neq 0$ denselben Rest lassen (und deren Differenz dann stets durch m teilbar ist) nennt man <u>*kongruent nach dem Modul m*</u> und schreibt dafür

$$a \equiv b \mod m \quad \text{oder kürzer} \quad a \equiv b \ (m) \ .$$

Definition: $a \equiv b \ (m) =_{Def} m|(a - b)$; dabei gelte $a,b,m \in Z$, $m > 0$.

Beispiele:

$73 \equiv 38 \ (7)$, weil $7|(73 - 38)$, d.h. $7|35$.

$29 \equiv -59 \ (11)$, weil $11|(29 + 59)$, d.h. $11|88$.

$71 \equiv 23 \equiv 7 \equiv -1 \equiv -9 \ (8)$, weil alle diese Zahlen bei Division durch 8 denselben (positiv kleinsten bzw. absolut kleinsten) Rest lassen, bzw. weil die Differenzen beliebiger Paare dieser Zahlen stets durch 8 teilbar sind.

Beachte: Aus den Definitionen folgt, dass $a|b$ gleichbedeutend ist mit $b \equiv 0 \ (a)$.
Man kann daher *Teilbarkeitsaussagen in die Sprache der Kongruenzen übersetzen*.

Überzeuge dich, dass aus den Definitionen folgt, dass folgende Ausdrücke *äquivalent* (gleichbedeutend) sind:
" a und b lassen bei Division durch m den gleichen Rest " äq "$a \equiv b \ (m)$" äq "$a = qm + b$" (d.h., Kongruenzen lassen sich in Gleichungen verwandeln) .

Wie auch die Gleichheit, besitzt die Kongruenz folgende wichtige *Eigenschaften* :

<u>*Reflexivität:*</u> Stets gilt $a \equiv a \ (m)$.

<u>*Symmetrie:*</u> Wenn $a \equiv b \ (m)$, dann $b \equiv a \ (m)$.

<u>*Transitivität:*</u> Wenn $a \equiv b \ (m)$ und $b \equiv c \ (m)$, dann $a \equiv c \ (m)$.

Auftrag: Beweise diese Eigenschaften! (Übersetze in die Sprache der Gleichungen und leite die so erhaltenen Aussagen über Gleichungen ab.)

Es gelten folgende *Sätze :*

(I) $a \equiv b \ (m)$ und $c \equiv d \ (m)$ $\Rightarrow$ $a \pm c \equiv b \pm d \ (m)$.

(II) $a \equiv b \ (m)$ und $c \equiv d \ (m)$ $\Rightarrow$ $ac \equiv bd \ (m)$.

(III) $a \equiv b \ (m)$ $\Rightarrow$ $a^n \equiv b^n \ (m)$.

(IV) $ab \equiv 0 \ (p)$ und p ist Primzahl $\Rightarrow$ $a \equiv 0 \ (p)$ oder $b \equiv 0 \ (p)$.

(V) $ac \equiv bc \ (m)$ und $c \not\equiv 0 \ (m)$ und $ggT(c;m) = d$ $\Rightarrow$ $a \equiv b \ (\frac{m}{d})$.

(VI) Wenn m und c teilerfremd sind, dann gilt: $ac \equiv bc \ (m)$ und $c \not\equiv 0 \ (m)$ $\Rightarrow$ $a \equiv b \ (m)$

Beispiele zu (V) und (VI) :
$45 \equiv 27 \ (6)$ und $ggT(9;6) = 3$ $\Rightarrow$ $5 \equiv 3 \ (2)$; (Division durch 9) .
$72 \equiv 27 \ (5)$ und $ggT(9;5) = 1$ $\Rightarrow$ $8 \equiv 3 \ (5)$; (Division durch 9) .

Hinweise:

Da alle Zahlen bei Division durch 1 den Rest 0 lassen, sind sie bezüglich dieser Division stets restegleich, d.h. es gilt stets $a \equiv b \ (1)$. Daher ist nur der Fall $m > 1$ von Interesse.

Beachte, dass in (I) und (II) als Spezialfall die Aussage enthalten ist, dass man (wie bei Gleichungen) auf beiden Seiten einer Kongruenz die gleiche Zahl addieren oder mit der gleichen Zahl multiplizieren darf.
Bezüglich des Dividierens auf beiden Seiten verhalten sich Kongruenzen dagegen etwas anders als Gleichungen.

Beachte im Zusammenhang mit (IV), dass sich der Satz "Ein Produkt wird Null genau dann, wenn mindestens ein Faktor Null wird" nicht auf Kongruenzen übertragen lässt!
So gilt etwa $2 \cdot 3 \equiv 0 \ (6)$, aber weder $2 \equiv 0 \ (6)$ noch $3 \equiv 0 \ (6)$.
Mache dir klar, inwiefern Satz (V) den Satz (VI) als Spezialfall enthält!

Das *Rechnen mit Kongruenzen* lässt sich beim Lösen von zahlentheoretischen Beweis- und Bestimmungsaufgaben oft *als günstiges Hilfsmittel* einsetzen. Um etwa den Rest zu berechnen, den eine Potenz bei Division durch 9 lässt, kann man wie folgt vorgehen:

$178^{12} \equiv (-2)^{12} \equiv (-8)^4 \equiv (+1)^4 \equiv 1 \ (9)$.

Hinweis auf den Beweis von Satz (I):

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b \ (m) \Rightarrow a = b + q_1 m \\ c \equiv d \ (m) \Rightarrow c = d + q_2 m \end{array}\right\} \Rightarrow a + c = b + d + (q_1 + q_2)m = b + d + qm \Rightarrow a + c \equiv b + d \ (m)$$

4. GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN

4.1. Einige Begriffe

(Wiederhole in diesem Zusammenhang den Abschnitt 1.3.)

Ein Zeichen für ein *bestimmtes* (festes) Element aus einer vorgegebenen Menge nennt man eine _Konstante_ .

Ein Zeichen für ein *beliebiges* Element einer vorgegebenen Menge M nennt man _*Variable*_ mit dem *Variablengrundbereich M .*
Eine Variable *interpretieren* heißt, für diese Variable eine Konstante aus dem betreffenden Variablengrundbereich einsetzen.

Ein Ausdruck $T(x,y,\ldots,z)$ mit den Variablen $x \in X$, $y \in Y$, ... , $z \in Z$ heißt _*Term*_ genau dann, wenn er bei Interpretation aller Variablen in eine Konstante (d.h. die Bezeichnung für ein bestimmtes Element) übergeht.

Beispiele:

$ggT(x;y)$, $x,y \in N$ geht bei der Interpretation $x = 6$, $y = 15$ über in die Konstante 3 .
$\frac{xy - 2x - y}{x + 2}$, $x,y \in Q$ geht bei der Interpretation $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$ über in die Konstante $-\frac{7}{8}$.

Die Menge aller Elemente aus dem vorgegebenen Variablengrundbereich eines Terms $T(x)$, für die dieser Term erklärt ist, heißt _*Definitionsbereich des Terms*_ .

Beispiele:

$\frac{x+7}{(x-5)(x+3)}$, $x \in Q$ hat als Definitionsbereich alle rationalen Zahlen außer 5 und -3 .

$\sqrt{x-2}$, $x \in Q$ hat als Definitionsbereich alle rationalen Zahlen, die größer oder gleich 2 sind.

Merke: $\frac{T_1(x)}{T_2(x)}$ hat als Definitionsbereich alle rationalen Zahlen mit Ausnahme der Zahlen, für die der Nenner $T_2(x) = 0$ wird.

$\sqrt{T(x)}$ hat als Definitionsbereich alle rationalen Zahlen, für die der Radikand $T(x) \geq 0$ ist.

Eine *Gleichung* bzw. *Ungleichung* mit dem Erfüllungsgrundbereich X ist laut Definition eine *Aussageform* der Gestalt

$$T_1(x) = T_2(x) \quad \text{bzw.} \quad T_1(x) < T_2(x) \ , \ x \in X \ .$$

Der <u>*Erfüllungsgrundbereich*</u> einer Gl/Ugl ist der Durchschnitt der Definitionsbereiche aller in der Gl/Ugl vorkommenden Terme.

Die <u>*Lösungsmenge*</u> (oder Erfüllungsmenge) einer Gl/Ugl ist diejenige Teilmenge des Erfüllungsgrundbereichs, deren Elemente die Gl/Ugl erfüllen, d.h. die bei Interpretation die Gl/Ugl in eine wahre Aussage überführen.

Beispiele: (Grundbereich der Variablen sei die Menge Q der rationalen Zahlen)

Aussageform (speziell Ungleichungen)	Lösungsmenge
$x > 1$ und $x < 2$	$L = \{ x \in Q \mid 1 < x < 2 \}$
$2 \leq x \leq 5$ und $3 \leq x \leq 6$	$L = \{ x \in Q \mid 3 \leq x \leq 5 \}$
$x < 1$ und $x > 2$	$L = \emptyset$ (leere Menge)
$2 \leq x \leq 5$ oder $3 \leq x \leq 6$	$L = \{ x \in Q \mid 2 \leq x \leq 6 \}$
$x < 3$ oder $x > -1$	$L = \{ x \in Q \mid -\infty < x < \infty \} = Q$

(Veranschauliche dir dies auf der Zahlengeraden!)

Zwei *Aussageformen heißen* <u>*äquivalent*</u> (geschrieben "äq") über demselben Erfüllungsgrundbereich genau dann, wenn ihre Lösungsmengen gleich sind.

4.2. Regeln für das äquivalente Umformen

Man ermittle zunächst stets den *Erfüllungsgrundbereich* der Gl/Ugl. Terme, die man auf beiden Seiten der Gl/Ugl addiert oder mit denen man beide Seiten multipliziert, sollen stets in diesem Erfüllungsgrundbereich erklärt sein.

Es gelten folgende *Regeln:*

(I) $T_1(x) \leq T_2(x)$ äq $T_1(x) \pm T_3(x) \leq T_2(x) \pm T_3(x)$
(Man darf auf beiden Seiten einer Gl/Ugl denselben Term addieren oder subtrahieren)

(IIa) $T_1(x) = T_2(x)$ äq $T_1(x) \cdot T_3(x) = T_2(x) \cdot T_3(x)$, wenn $T_3(x) \neq 0$

(IIb) $T_1(x) < T_2(x)$ äq $T_1(x) \cdot T_3(x) < T_2(x) \cdot T_3(x)$, wenn $T_3(x) > 0$

(IIc) $T_1(x) < T_2(x)$ äq $T_1(x) \cdot T_3(x) > T_2(x) \cdot T_3(x)$, wenn $T_3(x) < 0$

Multipliziert man beide Seiten einer Gl/Ugl mit einem Term $T_3(x)$, der für gewisse x gleich Null wird, dann muss man für diese Werte gesondert untersuchen, wie sich die Lösungsmenge beim Übergang von der Ausgangsgleichung zur umgeformten Gleichung ändert. In der Regel sind solche Werte für x gar nicht im Erfüllungsgrundbereich enthalten.
Bei Ungleichungen muss in der Regel eine Fallunterscheidung durchgeführt und sowohl Regel (IIb) als auch Regel (IIc) angewendet werden.

(III) Wenn $T_1(x)$ oder $T_2(x)$ identisch umgeformt wird und dabei der Erfüllungsgrundbereich der Gl/Ugl erhalten bleibt, dann ist die umgeformte Gl/Ugl der Ausgangsgl/ugl äquivalent.

(IV) $T_1(x) \le T_2(x)$ äq $T_1^2(x) \le T_2^2(x)$, wenn $T_1(x) \ge 0$ und $T_2(x) \ge 0$
(Diese Regel wird meist angewendet, wenn man Wurzeln aus einer Gl/Ugl beseitigen will.)

Beachte: Aus $T_1(x) < T_2(x)$ und $T_3(x) < T_4(x)$ folgt *nicht* $T_1(x)\cdot T_3(x) < T_2(x)\cdot T_4(x)$

Gegenbeispiel:

$$\begin{array}{rcr} 1 & < & 3 \\ \underline{-2} & \underline{<} & \underline{-1} \end{array}$$

aber nicht $-2 < -3$

Wohl aber gelten folgende *Regeln für das* *<u>implizierende Umformen</u>* einer Gl/Ugl :

Aus $T_1(x) \le T_2(x)$

und $T_3(x) \le T_4(x)$

folgt $T_1(x) + T_3(x) \le T_2(x) + T_4(x)$

Aus $0 \le T_1(x) \le T_2(x)$

und $0 \le T_3(x) \le T_4(x)$

folgt $0 \le T_1(x)\cdot T_3(x) \le T_2(x)\cdot T_4(x)$

Dass dies aber keine Regeln für äquivalentes Umformen sind, d.h. dass die Lösungsmenge der umgeformten Gl/Ugl mit der Lösungsmenge der Konjunktion der Ausgangsgl/ugl nicht übereinstimmen (sondern diese nur enthalten) muss, zeigt etwa folgendes Beispiel:

Aus $x = 2$ und $-x = -2$ | $L_1 = \{2\}$
folgt $0\cdot x = 0$ | $L_2 = Q$ Es gilt $L_1 \subset L_2$.

4.3. Einige wichtige Gleichungen und Ungleichungen

Allaussagen, die aus allgemeingültigen Gleichungen durch Bindung der Variablen mit "Für alle ... gilt:" entstehen, nennt man *Formeln* .
(Wiederhole in diesem Zusammenhang Abschnitt 1.3.)

Satz: Für alle rationalen Zahlen gilt:

(1) $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$;

(2) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

(3) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

(4) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Die Formeln (2), (3), (4) nennt man *binomische Formeln* .

Beweis:

Laut Distributivgesetz gilt stets $x(y + z) = xy + xz$.
Setzt man $x = a + b$, $y = c$, $z = d$, dann folgt hieraus
$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd$ und somit Formel (1) .

Setzt man $c = a$ und $d = b$ in (1) ein, dann erhält man $(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$ und somit Formel (2).
Ersetzt man in (2) die Variable b durch $-b$, dann erhält man Formel (3).
Setzt man $c = a$ und $d = -b$, dann erhält man Formel (4).

Präge dir diese Formeln gut ein! Von rechts nach links gelesen liefern sie Regeln zum Umwandeln von Summen in Produkte (sogenannte *Faktorzerlegung von Termen*).
Versuche beim Faktorzerlegen stets zuerst auszuklammern und dann erst eine der binomischen Formeln anzuwenden.

Beispiele:

$n^6 - n^2 = n^2(n^4 - 1) = n^2(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n^2(n + 1)(n - 1)(n^2 + 1)$

$12x^3 - 12x^2y + 3xy^2 = 3x(4x^2 - 4xy + y^2) = 3x(2x - y)^2$

$8ac - 2ad + 12bc - 3bd = 2a(4c - d) + 3b(4c - d) = (2a + 3b)(4c - d)$

$637u^5v^2 + 2002u^3v^3 + 1573uv^4 = 13uv^2(49u^4 + 154u^2v + 121v^2) = 13uv^2(7u^2 + 11v)^2$

Um die letzte Aufgabe zu lösen, muss man ggT(637;2002;1573) = 13 berechnen.
Dies erhält man etwa aus ggT(637;2002) = 91 und ggT(91;1573) = 13 mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, vgl. Abschnitt 3.1. .

Mittelwerte aus positiven rationalen Zahlen a, b bzw. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ werden wie folgt definiert:

arithmetisches Mittel	$\frac{a+b}{2}$	bzw.	$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$	;
geometrisches Mittel	$\sqrt{ab}$	bzw.	$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$	;
harmonisches Mittel	$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$	bzw.	$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$	;
quadratisches Mittel	$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$	bzw.	$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$	.

Satz: Für alle rationalen Zahlen a, b gelten die *Dreiecksungleichungen*:

$$\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a - b| \leq |a| + |b|\,;$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad . \quad \text{(Gleichheit gilt genau für } a = b\text{.)}$$

Satz: Für alle rationalen Zahlen x gilt:

Wenn $x > 0$, dann $x + \frac{1}{x} \geq 2$. (Gleichheit gilt genau für $x = 1$.)

Satz vom harmonischen, geometrischen, arithmetischen und quadratischen Mittel:

Für alle rationalen Zahlen a, b gilt:

Wenn $a > 0$ und $b > 0$, dann $\min(a;b) \leq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a;b)$.

Gleichheit gilt genau für $a = b$. Für $a \neq b$ bedeutet $\min(a;b)$ die kleinere, $\max(a;b)$ die größere der beiden positiven Zahlen a, b.
Dieser Satz gilt analog für n positive rationale Zahlen.

Bei der Suche nach einem Beweis für solche Sätze geht man oft von der Behauptung aus und formt diese so lange um, bis man zu den Voraussetzungen oder zu einer allgemeingültigen Ungleichung gelangt. (Vgl. hierzu "Einige Regeln", Seite 14 .)

Beim Darstellen des Beweises muss man jedoch stets von den Voraussetzungen oder von einer allgemeingültigen Ungleichung ausgehen und zeigen, wie sich hieraus die Behauptung ableiten lässt.

Beispiel:

Lösungsfindung: $x + \frac{1}{x} \geq 2$ $\quad | \cdot x$ [wegen $x > 0$ ist Regel (IIb) anwendbar] .

$x^2 + 1 \geq 2x$ $\quad | - 2x$ [Anwendung von Regel (I)]

$x^2 - 2x + 1 \geq 0$ $\quad$ [identische Umformung; Regel (III) anwenden]

$(x - 1)^2 \geq 0$

Dies ist eine allgemeingültige Ungleichung, da das Quadrat einer rationalen Zahl nie negativ sein kann.

Lösungsdarstellung:

Stets gilt $(x - 1)^2 \geq 0$; [das Quadrat einer rationalen Zahl ist nie negativ] .
Folglich gilt $x^2 - 2x + 1 \geq 0$; [Regel (III); identische Umformung der linken Seite] .
Folglich gilt $x^2 + 1 \geq 2x$; [Regel (I); Addition von $2x$ auf beiden Seiten] .
Für $x > 0$ gilt dann
$x + \frac{1}{x} \geq 2$; [Regel (IIb); Multiplikation beider Seiten mit dem positiven Term $\frac{1}{x}$] .

Damit ist bewiesen: Wenn $x > 0$, dann $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Literaturhinweise

/1/ Mathematik in Übersichten, Berlin 1989

/2/ Varga, T.: Mathematische Logik für Anfänger, Aussagenlogik; Berlin 1972

/3/ Varga, T.: Mathematische Logik für Anfänger, Prädikatenlogik; Berlin 1973

/4/ Grosche, G.: Übungen für Junge Mathematiker, Teil II, Elementargeometrie, Leipzig 1969, MSB 37

/5/ Lehmann, E.: Übungen für Junge Mathematiker, Teil I, Zahlentheorie, Leipzig 1968, MSB 36

/6/ Kleinfeld, G.: Übungen für Junge Mathematiker, Teil III, Ungleichungen, Leipzig 1969, MSB 38

/6/ Borneleit, P. Übungen für Junge Mathematiker, Teil IV, Gleichungen, Leipzig 1976, MSB 87

[MSB 37 bedeutet: Mathematische Schülerbücherei, Band 62. Die Titel */4/*, */5/*, */6/*, */7/* sind zur Zeit nicht im Buchhandel sondern nur in Bibliotheken erhältlich.]