Aufgabenserie 5 (Schuljahr 2023/2024)

Einsendungen bitte bis 21.03.2024 an Prof. Cordula Bernert, Neusorger Str. 10, 09648 Altmittweida oder cbernert@hs-mittweida.de (Jede Zusendung wird nach Empfang elektronisch bestätigt. Sollte diese Antwort ausbleiben, fragen Sie bitte elektronisch nach, um Datenverluste zu vermeiden.)

Aufgabe 5-1. (Bundeswettbewerb Mathematik 2024, 1. Runde, Aufgabe 1)
Arthur und Renate spielen auf einem quadratischen Spielbrett, das in 7 x 7 Spielfelder unterteilt ist. Arthur hat zwei rote Steine, die anfangs im linken unteren und rechten oberen Eckfeld liegen. Renate hat zwei schwarze Steine, die anfangs im linken oberen und rechten unteren Eckfeld liegen.Wer am Zug ist, wählt einen seiner beiden Spielsteine und bewegt ihn in ein waagerecht oder senkrecht benachbartes Feld. Arthur und Renate ziehen abwechselnd. Arthur beginnt. Arthur hat gewonnen, wenn seine beiden Steine nach endlich vielen Zügen in waagerecht oder senkrecht benachbarten Feldern liegen. Kann Renate das durch geschicktes Ziehen verhindern? Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

(5 Punkte)

Aufgabe 5-2.
Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen n, für die gilt: Die Summe aus n, ihrer Quersumme $Q(n)$ und deren Quersumme $(Q(Q(n))$ beträgt 2022.

(5 Punkte)

Aufgabe 5-3. (Bundeswettbewerb Mathematik 2024, 1. Runde, Aufgabe 2).
Kann eine Zahl 44...41, deren Dezimaldarstellung aus einer ungeraden Anzahl von Ziffern 4 gefolgt von einer Ziffer 1 besteht, eine Quadratzahl sein? Die Richtigkeit der Antwort ist zu beweisen.

(6 Punkte)

Aufgabe 5-4.
Ein Kreis k berührt einen größeren Kreis K von innen im Punkt P. Der Punkt Q, sei ein von P verschiedener Punkt auf k. Die Tangente an k im Punkt Q schneidet K in den Punkten A und B. Beweise, dass die Gerade PQ den Winkel $\angle APB$ halbiert.

(6 Punkte)

Aus den beiden folgenden Aufgaben können Sie eine auswählen. Für die Aufgabenteile (a) und (b) werden maximal je 2 Punkte vergeben, für Aufgabenteil (c) 4 Punkte, so dass sich insgesamt 8 Punkte pro Aufgabe erreichen lassen. Bearbeiten Sie beide Aufgaben, so wird nur die Aufgabe mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Ist jedoch die Punktesumme für beide Aufgaben größer als 8, erhalten Sie einen Zusatzpunkt, ist sie größer als 12, gibt es zwei Zusatzpunkte. Für die gesamte Aufgabenserie kann man also maximal 32 Punkte erreichen.

Bitte wenden!

Aufgabe 5-5A.
Folgende Aufgaben lassen sich (auch) mittels vollständiger Induktion bearbeiten.

(a) Man zeige: Für jede natürliche Zahl n größer als 7 existieren ganzzahlige nichtnegative Zahlen r und s, so dass gilt: $n = 3 \cdot r + 5 \cdot s$.

(b) Man beweise: Für alle natürlichen Zahlen n ($n \geq 1$) ist 9 ein Teiler von $7^n + 3n - 1$.

(c) In der Ebene seien n paarweise voneinander verschiedene Kreise gegeben ($n \geq 1$), die sich auch schneiden können. Damit wird die Ebene zerlegt in Kreise, Kreisbogenvielecke und eine oder mehrere Restflächen. Lassen sich diese Teilflächen für jedes n bei jeder Lage der Kreise so mit zwei Farben färben, dass jede Teilfläche der Ebene genau eine Farbe besitzt und keine zwei sich längs Kreisbögen berührende Flächen gleich gefärbt sind?

Aufgabe 5-5B.

(a) Man beweise: Für jedes konvexe Viereck gilt für dessen Flächeninhalt F und dessen Seitenlängen a, b, c und d die Ungleichung

$$F \leq \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)$$

(b) Man zeige: Es gibt konvexe Vierecke, für die für dessen Flächeninhalt F und dessen Seitenlängen a, b, c und d die Gleichung $F = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)$ gilt.

(c) Man zeige, dass es eine kleinste Zahl p gibt, so dass für jedes Dreieck mit dem Flächeninhalt F und den Seitenlängen a, b, und c die Ungleichung

$$F \leq p \cdot \left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

gilt. Man ermittle diesen Wert von p.
Hinweis: Für jedes Dreieck gilt zwischen dem Flächeninhalt F und dem Umfang u die Ungleichung $F \leq \frac{\sqrt{3}}{36} u^2$.