

Aufgabenserie 3 (Schuljahr 2023/2024)

Einsendungen bitte bis 03.01.2024 an Prof. Cordula Bernert, Neusorger Str. 10, 09648 Altmittweida oder cbernert@hs-mittweida.de (Jede Zusendung wird nach Empfang elektronisch bestätigt. Sollte diese Antwort ausbleiben, fragen Sie bitte elektronisch nach, um Datenverluste zu vermeiden.)

Aufgabe 3-1.

Kann man ein Quadrat der Seitenlänge 5 cm vollständig mit drei Quadraten der Seitenlänge 4 cm überdecken? (5 Punkte)

Aufgabe 3-2.

Kann man die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 21 so in Teilmengen zerlegen, dass in jeder dieser Teilmengen die größte Zahl gleich der Summe der übrigen Zahlen ist? (5 Punkte)

Aufgabe 3-3.

Die Zahlen 1, 2, 3, ..., 2017 stehen an der Tafel. Amelie und Boris wischen abwechselnd je eine dieser Zahlen weg, bis nur noch zwei Zahlen übrig bleiben. Amelie beginnt. Wenn die Summe der beiden letzten Zahlen durch 8 teilbar ist, gewinnt Amelie, ansonsten Boris. Wer kann den Gewinn erzwingen? (6 Punkte)

Aufgabe 3-4.

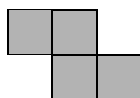
Es sei eine Menge von 2017 ganzen Zahlen gegeben, sodass zu je drei dieser Zahlen auch deren arithmetischer Mittelwert enthalten ist. Beweisen Sie, dass alle Zahlen gleich sind. (6 Punkte)

Aus den beiden folgenden Aufgaben können Sie eine auswählen. Für die Aufgabenteile (a) und (b) werden maximal je 2 Punkte vergeben, für (c) 4 Punkte, so dass sich insgesamt 8 Punkte pro Aufgabe erreichen lassen. Bearbeiten Sie beide Aufgaben, so wird nur die Aufgabe mit der höheren erreichten Punktzahl in der Gesamtbewertung berücksichtigt. Ist jedoch die Punktesumme für beide Aufgaben größer als 8, erhalten Sie einen Zusatzpunkt, ist sie größer als 12, gibt es zwei Zusatzpunkte. Für die gesamte Aufgabenserie kann man also maximal 32 Punkte erreichen.

Aufgabe 3-5A.

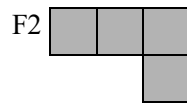
- (a) Zum Auslegen des Fußbodens eines rechteckigen Zimmers sind rechteckige Platten des Formates 2×2 und solche des Formates 4×1 verwendet worden. Beide Sorten der rechteckigen Platten enthalten somit jeweils 4 Elementarquadrate des Formates 1×1 . Man beweise, dass das Auslegen nicht möglich ist, wenn man von der einen Sorte eine Platte weniger und von der anderen Sorte eine Platte mehr verwenden will.
- (b) Man zeige, dass kein rechteckiges Zimmer mit Platten der Form F1 vollständig ausgelegt werden kann.

F1



Bitte wenden!

- (c) Welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen ergeben sich jeweils für die Seitenlängen des rechteckigen Zimmers, wenn zum Auslegen jeweils nur Platten der Form F2 verwendet werden soll.



Aufgabe 3-5B.

Gegeben seien drei natürliche Zahlen a, b, c , bei denen das Produkt von je zweien bei Division durch die dritte den Rest 1 lässt.

- (a) Man zeige, die Zahlen a, b, c sind paarweise teilerfremd.
(b) Man beweise die Ungleichung $abc < ab + bc + ca$.
(c) Man finde alle Lösungstripel für die Zahlen a, b und c .

Alle Aufgaben sind dem Bundeswettbewerb Mathematik aus verschiedenen Jahrgängen entnommen.