Höhere Mathematik / Teil 2

Cordula Bernert

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] MINÖL: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, BG Teubner Verlagsgesellschaft Band 3, 7/1, 7/2 und 10, Ü1, Ü2

[2] Stingl: Mathematik für Fachhochschulen, Carl-Hanser-Verlag

[3] Papula: Mathematik für Ingenieure Band 2, Vieweg-Verlag

[4] Preuß: Lehr- und Übungsbuch Mathematik Teile 2 und 5, Fachbuchverlag Leipzig

[5] Preuß: Lehr- und Übungsbuch Mathematik für Elektro- und Automatisierungstechniker, Fachbuchverlag Leipzig

[6] Unbehauen: Systemtheorie (Akademieverlag), Lehr- und Übungsbuch Mathematik V für ET (Fachbuchverlag Leipzig)

[7] Greuel, Mathematische Ergänzungen und Aufgaben für Elektrotechniker

[8] Bronstein: Taschenbuch der Mathematik, BG Teubner

1 Unendliche Reihen

1.1 Zahlenreihen bis (24.03.20)

Achtung: Absätze, die mit * gekennzeichnet sind, sind fakultativ. Das Zeichen „$\forall$" heißt „für alle". (Es ist der Allquantor.)

Beispiel 1.1 *(zur Motivation)*
Bei einer jährlichen Verzinsung mit 6,2% werden 10 Jahre lang vorschüssig jeweils 2500 Euro auf ein Konto eingezahlt. Wie hoch ist der Kontostand nach 10 Jahren?

Anfang 1. Jahr:	2500
Anfang 2. Jahr:	$2500 * 1.062 \quad + 2500$
Anfang 3. Jahr:	$2500 * 1.062^2 \; + 2500 * 1.062 + 2500$
......	
Anfang 10. Jahr:	$2500 * 1.062^9 \; + 2500 * 1.062^8 + ... + 2500$
Ende 10. Jahr:	$2500 * 1.062^{10} + 2500 * 1.062^9 + ... + 2500 * 1.062$
	$= 2500 * q * (1 + q + q^2 + ... + q^9) = 35325,44(Euro)$
	mit $q = 1.062$ *als Aufzinsungsfaktor*

Beispiel 1.2 *(zur Motivation)*
Gauß sollte als Schüler die Summe der Zahlen von 1 bis 60 bilden. Er rechnete wie folgt:

$$\begin{aligned} s &= 1 + 2 + 3 + ... + 59 + 60 \\ &= (1 + 60) + (2 + 59) + ... + (30 + 31) \\ &= 30 * 61 = 1830 \end{aligned}$$

Gauß war als Erster nach wenigen Minuten fertig. Sein Lehrer hatte Angst um Gauß, weil es damals für falsche Lösungen Schläge geben musste und Gauß ein kleiner, zierlicher Junge war. - Aber die Lösung war richtig, und sein Lehrer erkannte die Fähigkeiten von Gauß, gab ihm Zusatzunterricht und vermittelte ihn weiter, als er ihm nichts mehr beibringen konnte.

Beispiel 1.3 *(zur Motivation)*

$R_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \; ... \; = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$
wegen geometrischer Reihe mit $a = 1$ *und* $q = \frac{1}{2}$

Beispiel 1.4 $R_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \; ... \; = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = ?$
*Diese Reihe heißt harmonische Reihe. (**wichtige Reihe - merken!**)*

Beispiel 1.5 *Paradoxon von Achilles und der Schildkröte (zur Motivation):*
Die Schildkröte bekommt beim Wettlauf 1 Wegeinheit Vorsprung und hat eine Geschwindigkeit von $\frac{1}{100}$ der Geschwindigkeit von Achilles. Angeblich kann Achilles die Schildkröte niemals einholen, denn der zurückgelegte Weg wird wie folgt betrachtet:

Schildkröte: $s_1 = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + ...$
Achilles: $s_2 = \quad 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + ...,$

so dass die Schildkröte stets ein winziges Stück voraus ist.
Aufgabe zum Verständnis: Veranschaulichen Sie sich die Wege auf einem Zahlenstrahl zur Zeit** $\mathbf{t = 0}$ (1 Summand bei s_1, kein Summand bei s_2)**,** $\mathbf{t = 1}$ (2 Summanden bei s_1, ein Summand bei s_2) **und** $\mathbf{t = 2}$ (3 Summanden bei s_1, 2 Summanden bei s_2)**,:** **1m $\triangleq$ 10cm

Definition 1.1 *Eine unendliche Reihe ist ein Ausdruck der Form*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + ...,$$

wobei für die Glieder der Reihe a_k ein Bildungsgesetz existiert.

Aufgabe zum Verständnis: Schreiben Sie die ersten 4 Glieder der Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}(3k+1)$ **auf, d.h. berechnen Sie** $a_k = 3k + 1$ für $k = 1, 2, 3, 4$**.

Problem: Haben diese unendlichen Summen einen Wert?

Definition 1.2 *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

	konvergent		*konvergent ist.*
heißt	*divergent*	*wenn die Folge* $\{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$	*divergent ist.*
	bestimmt divergent		*bestimmt divergent ist.*

Die Summe $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ wird Partialsumme genannt. Die Summe s der Reihe ist dann der Grenzwert $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, falls er existiert.

Beispiel 1.6 *zur Illustration*
$R = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$
$\Rightarrow s_1 = -1; \quad s_2 = 0; \quad s_3 = -1; \; .... \Rightarrow$ *Divergenz*

Aufgabe zum Verständnis: Schreiben Sie die ersten 4 Partialsummen** $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ **der Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty}(3k+1)$ **für** $\mathbf{n = 1, 2, 3, 4}$ **auf. Was vermuten Sie, was passieren wird, wenn gilt** $n \to \infty$**?

Beispiel 1.7 ***(wichtige Reihe - merken - A-Teil des Seminars!)***
Arithmetische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty}(a+(k-1)b)$; $\quad s_n = na + \frac{n}{2}(n-1)b$
Unter den Bedingungen $a \neq 0$ *und* $b \neq 0$ *gilt dann* $|\lim_{n\to\infty} s_n| = \infty$

Beispiel 1.8 ***(wichtige Reihe - merken - A-Teil!)***
Geometrische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$; $\quad s_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$
Unter den Bedingungen $a \neq 0$ *und* $q \neq 1$ *gilt dann:*

$|q| < 1: \quad s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$ *Konvergenz*
$|q| > 1: \quad s = \lim_{n\to\infty} |s_n| = \infty$ *Divergenz*

Beispiel 1.9 *für eine geometrische Reihe*
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot (\frac{1}{2})^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a \cdot q^{k-1} = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-0.5} = 2$
oder mit der Folge der Partialsummen folgt:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$

$s_1 = 1$

$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$

$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{3}{4} \quad .....$

$s_n = 1 + \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}$

$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}) = \lim_{n\to\infty}(1 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}}) = 2$

Beispiel 1.10 *HarmonischeReihe*
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$

$s_1 = 1$

$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{5}{6} \quad .....$

$s = \lim_{n\to\infty} s_n = ?(= \infty)$

Wichtig: Obwohl die Glieder der harmonischen Reihe monoton fallen und gegen Null konvergieren, kann man zeigen, dass die Reihe keine Summe hat, sondern den „Wert ∞”.

Beispiel 1.11 *(zur Illustration)*
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}$ *(Berechnung über Fourierreihen)*

Probleme:

1. Der Weg über die Partialsummen ist sehr umständlich.
2. Oft interessiert nur, ob die Reihe konvergiert, nicht welcher Grenzwert sich ergibt.

Wichtig: Damit braucht man eigentlich nur prüfbare Bedingungen, die anzeigen, ob die Reihe konvergiert oder nicht.

1.1.1 Konvergenzkriterien für Zahlenreihen

Konvergenzkriterien sind einfach nachzuprüfende Bedingungen, bei deren Erfüllung die Konvergenz der Zahlenreihe gesichert ist. Es gibt verschiedene Konvergenzkriterien, die entsprechend ihrem Einsatzbereich angewendet werden können. Eine Aussage über die Summe der Reihe ist damit aber nicht möglich.

Definition 1.3 *Eine Reihe heißt alternierend, wenn ihre Glieder abwechselnd positiv oder negativ sind. (s. Folgen)*
Verständnisfrage: An welchem Faktor erkennt man, dass die Glieder einer Folge/Reihe abwechselnd unterschiedliche Vorzeichen haben?

Satz 1.1 *LEIBNIZ'sches Konvergenzkriterium* ***(sehr wichtig - merken - A-Teil!)***
Eine alternierende Reihe konvergiert $\Longleftrightarrow$

$$\begin{array}{lrcll} 1. \lim\limits_{k\to\infty} & |a_k| & = & 0 \textit{ und} & \\ 2. & |a_k| & \geq & |a_{k+1}| & \forall k \geq k_0. \end{array}$$

Achtung Allgemeinbildung: LEIBNIZ bitte nur mit „Z" - wie die Kekse, die nach ihm benannt wurden! So etwas war Ende 19./Beginn des 20. Jahrhundert üblich, siehe auch „Bismarckhering oder Schillerlocken".

Beispiel 1.12 *zur Anwendung:*
$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$ *ist konvergent nach Leibniz, denn es gilt:*
1. $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$ *und 2.* $|a_k| = \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k+1} = |a_{k+1}| \qquad \forall k \geq 1$

Definition 1.4 *(* ***merken - A-Teil!****)*
Wir betrachten Reihen mit positiven Gliedern:
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k; \quad a_k \leq b_k \quad \forall k. \quad \curvearrowright$
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *heißt Minorante zu* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *und*
$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *heißt Majorante zu* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Verständnishilfe: *Stellen Sie sich wie bei den Folgen einen Polizisten vor, der den Gauner an eine Seite nimmt und ihn dorthin dirigiert, wo er hin soll. Der Polizist entspricht dann der Mino- bzw. Majorante, die die Reihe beschränkt, d.h. der Polizist lässt den Gauner nicht an sich vorbei auf die andere Seite.*

Satz 1.2 *Vergleichskriterium für Reihen mit positiven Gliedern (**wichtig - merken - A-Teil!**)*

Eine Reihe mit positiven Gliedern $\begin{array}{c}\textit{konvergiert}\\ \\ \textit{divergiert}\end{array}$ *wenn sie eine* $\begin{array}{c}\textit{konvergente Majorante}\\ \\ \textit{divergente Minorante}\end{array}$ *besitzt.*

***Verständnishilfe:** Wie oben, wenn der Polizist zur Wache geht (d.h. die Majorante konvergiert), muss der Gauner auch dorthin. Wenn der Polizist zwischen Wache und Gauner durchläuft, (d.h. die Minorante divergiert), kommt der Gauner auch nicht dorthin.*

Beispiel 1.13 *zur Anwendung*)*
$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k+k}$

ist konvergent, denn sie besitzt die konvergente Majorante $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$*(s. Beispiel 1.9)*

***Einordnung:** Da Ihnen als Ingenieurstudenten die Basis für Abschätzungen i.Allg. fehlt, wird die Anwendung dieses Kriteriums eine fakultative Aufgabe.*

Satz 1.3 *Quotienten- und Wurzelkriterium (**sehr wichtig - merken - A-Teil!**)*
Wir betrachten für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *die Folgen* $\rho_k = \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ *oder* $\rho_k = \sqrt[k]{|a_k|}$ *und den Grenzwert* $\rho = \lim_{k\to\infty} \rho_k$.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $\begin{array}{c}\textit{konvergiert}\\ \\ \textit{divergiert}\end{array}$ *wenn* $\begin{array}{c}\rho_k \leq q < 1\\ \\ \rho_k \geq 1\end{array}$ $\forall k > k_0$ *bzw. wenn* $\begin{array}{c}\rho < 1\\ \\ \rho > 1\end{array}$.

Bemerkung 1.1 *Es ist keine Aussage möglich bei* $\rho = 1$, *wenn nicht* $\rho_k \geq 1 \quad \forall k > k_0$. *In diesem Fall ist ein anderes Kriterium zu Rate zu ziehen.*

Verständnisfrage: Schreiben Sie für die Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty}(3k+1)$ **auf:
a_k, a_{k+1}*(k wird in* a_k *durch* $(k+1)$ *ersetzt),* ***Quotient*** ρ_k, ***Wurzel*** ρ_k.
Benötigen Sie bei dieser Reihe den Betrag? Bilden Sie** $\lim_{k\to\infty} \rho_k$ **für beide Varianten. Welchen Schluss ziehen Sie daraus für die Konvergenz der Reihe?

Bemerkung 1.2 *Diese Kriterium ist auch für das Folgekapitel sehr wichtig, ebenso wie das Leibniz-Kriterium. Deshalb gibt es mehrere Beispiele, die Sie in Analogie anwenden können sollen. Es wird meist mit dem Grenzwert gearbeitet, um Abschätzungen zu vermeiden.*

Beispiel 1.14 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + ...$ *ist konvergent, denn es gilt:*

Quotientenkriterium: $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(k+1)^2 k!}{(k+1)! k^2} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(k+1)(k+1)k!}{k!(k+1)k^2} = \lim\limits_{k\to\infty} (\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k^2}) = 0 < 1$

Beispiel 1.15 $\sum_{k=1}^{\infty} a^k \sin^2 k\alpha$

Quotientenkriterium: $\rho_k = a(\dfrac{\sin(k+1)\alpha}{\sin k\alpha})^2 \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{k\to\infty} \rho_k$,
außerdem gilt weder $\rho_k \le q < 1$ *noch* $\rho_k \ge 1 \quad \forall k > k_0 \quad \Rightarrow$ *keine Aussage möglich*

Wurzelkriterium: $\rho_k = \sqrt[k]{|a^k \sin^2 k\alpha|} = |a| \sqrt[k]{|\sin^2 k\alpha|} \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \rho_k = |a|$
$\Rightarrow$ *Konvergenz für* $|a| < 1$

Beispiel 1.16 $\frac{3}{1\cdot 2} + \frac{3^2}{2\cdot 2^2} + \frac{3^3}{3\cdot 2^3} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{3^k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot (\frac{3}{2})^k$
ist divergent, denn es gilt:
Quotientenkriterium: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{(k+1)}(\frac{3}{2})^{k+1} \cdot k(\frac{2}{3})^k = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{(k+1)}(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} > 1$

MERKE: *Bei Zahlenreihen ist oft der Betrag nicht nötig (wenn nämlich positive Reihen betrachtet werden). Im nächsten Kapitel wenden wir diese Kriterien jedoch auf Terme an, bei denen das Vorzeichen i.Allg. nicht bekannt ist. Gewöhnen Sie sich bitte deshalb an, den Betrag schon jetzt immer mitzuführen, auch wenn er nicht zwingend nötig ist. (Im Göhler stehen diese Kriterien nur für positive Reihen. Deshalb fehlt dort der Betrag- Achtung! Verwenden Sie besser eine eigene Formelsammlung). WK und QK sind annähernd gleichstark. Deshalb bringt ein Wechsel im Falle* $\rho = 1$ *meist nichts. Für alternierende Reihen ist das Leibniz-Kriterium stärker und deshalb zu bevorzugen.*

Beispiel 1.17 *für das Versagen von WK und QK:* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

Quotientenkriterium: $\lim_{k\to\infty} \rho_k = \lim_{k\to\infty} |\frac{k}{k+1}| = 1$

Wurzelkriterium: $\lim_{k\to\infty} \rho_k = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1$

$\Rightarrow$ *keine Aussage möglich (Reihe divergiert s. Bsp. 1.10 und Bemerkung 1.1, Integralkriterium)*

Beispiel 1.18 *für das Versagen von WK und QK:* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Quotientenkriterium: $\lim_{k\to\infty} \rho_k = \lim_{k\to\infty} |\frac{k^2}{(k+1)^2}| = 1$

Wurzelkriterium: $\lim_{k\to\infty} \rho_k = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = 1$

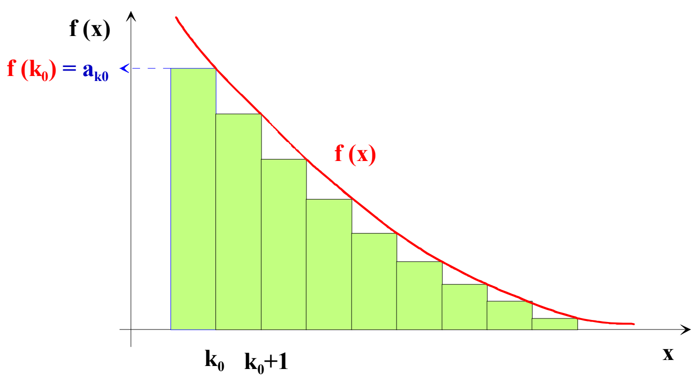
$\Rightarrow$ *keine Aussage (Reihe konvergiert s. Integralkriterium)*
Leider ist dieser Versagensfall gar nicht so selten. Deshalb wird noch ein stärkeres Kriterium benötigt. (Das nimmt man aber nur dann, wenn es nötig ist, weil es etwas mehr Arbeit verursacht).

Satz 1.4 *Integralkriterium (**sehr wichtig - merken - A-Teil!**)*
Wir betrachten $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *mit* $a_k \geq 0$.

Gilt für $k \geq k_0 : a_k = f(k) | f = f(x)$, f *stetig, monoton fallend, so folgt:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent } \Longleftrightarrow \int_{k_0}^{\infty} f(x)dx \text{ existiert.}$$

Bemerkung 1.3 **Die Reihe wird als uneigentliches Integral über eine Treppenfunktion gedeutet. Das Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale liefert dann die Aussage des obigen Satzes:*



Die grüne Fläche repräsentiert die Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$. *Sie kann offensichtlich durch die Fläche A unter der Kurve* $f(x)$ $A = \int_{k_0}^{\infty} f(x)dx$ *nach oben abgeschätzt werden. Existiert das Integral, muss folglich auch die Summe der Reihe einen endlichen Wert liefern.*

Beispiel 1.19 *zur Erarbeitung eines abgeleiteten einfacheren Kriteriums:*
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \qquad \alpha > 0\,;$

1. Fall: $\alpha \neq 1$:

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = lim_{A\to\infty} [\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}]_1^A$

$$= \left\{ \begin{array}{llll} \alpha > 1: & lim_{A\to\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - 1\right) & = \frac{1}{\alpha-1} & \curvearrowright \quad Konvergenz \\ \alpha < 1: & lim_{A\to\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(A^{1-\alpha} - 1\right) & = „\infty" & \curvearrowright \quad Divergenz \end{array} \right\}$$

2. Fall: $\alpha = 1$:

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = lim_{A\to\infty} [\ln|x|]_1^A = lim_{A\to\infty} (lnA - \ln 1) = lim_{A\to\infty} lnA = \infty \qquad \curvearrowright \qquad Divergenz.$

Bemerkung 1.4 ***(sehr wichtig - merken - A-Teil!)***
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \alpha > 0\,;$ *kann damit im Vergleichskriterium als Vergleichsreihe in folgendem Sinn benutzt werden:*
Stelle bei einer Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k}$*, bei der* a_k *und* b_k *Polynome in* k *sind, den „resultierenden Exponenten „reN" des Nenners fest:*

$reN = \textit{höchster Exponent von } k \textit{ im Nenner} - \textit{Höchster Exponent von } k \textit{ im Zähler}.$

Gilt $\begin{array}{lll} reN > 1: & \curvearrowright & \textit{Konvergenz der Reihe} \\ reN \leq 1: & \curvearrowright & \textit{Divergenz der Reihe} \end{array}$*. Diese Regel wird im nächsten Kapitel wieder benutzt - bitte in Ihre persönliche Formelsammlung aufnehmen.*

Die Folgerung aus dem nächsten Satz bietet die Möglichkeit, manchmal die vermutete Divergenz einer Reihe nachzuweisen:

Satz 1.5 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist konvergent* $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$

Bemerkung 1.5 *Die Umkehrung gilt nicht!!!!*
Denn es gilt z.B. für die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$
einerseits : $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$
aber andererseits wissen wir, dass die harmonische Reihe nach dem Integralkriterium divergent ist.

Bemerkung 1.6 *Die logische Verneinung der Satzaussage liefert jedoch:*
$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist divergent.*
Merke: *Das kann benutzt werden, wenn man erkennt, dass die Glieder der Reihe keine Nullfolge sind. Dann folgt nämlich sofort aus dieser Bemerkung, dass diese Reihe divergiert.*

Beispiel 1.20 *zur Anwendung:*
$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ *ist divergent, da* $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1 \neq 0$

Im Folgenden finden Sie noch einige nützliche Aussagen über Reihen:

Satz 1.6 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *ist konvergent* $\quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist konvergent.*

Definition 1.5 *Konvergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$*, so heißt* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent.*

Beispiel 1.21 $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^k}$ *ist konvergent, da sie absolut konvergent ist.*
Denn $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^k \frac{1}{2^k}\right|$ *ist eine geometrische Reihe mit* $q = \frac{1}{2}$.

Definition 1.6 *Konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihen heißen bedingt konvergent.*

Beispiel 1.22 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ *ist konvergent, aber die harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k}\right|$ *nicht. Somit ist* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ *bedingt konvergent.*

1.1.2 Eigenschaften konvergenter Reihen

Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$. Weiter gelte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha A + \beta B$
2. Absolut konvergente Reihen können multipliziert werden:
$$\sum_{k=1}^{\infty} c_n = (\sum_{k=1}^{\infty} a_k)(\sum_{k=1}^{\infty} b_k) = AB$$
3. In konvergenten Reihen können benachbarte Glieder zusammengefasst werden, aber nicht in divergenten.
4. Nur in absolut konvergenten Reihen kann man beliebig gruppieren.
5. Konvergenz oder Divergenz einer Reihe bleiben erhalten, wenn endlich viele Glieder verändert, gestrichen oder hinzugenommen werden.

Lösen Sie nun die Aufgaben des A-Teils der Übung Zahlenreihen.

1.2 Funktionenreihen (bis 06.04.2020)

1.2.1 Grundbegriffe

Definition 1.7 *Eine Funktionenreihe ist ein Ausdruck der Form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + ...$$

Die Glieder der Reihe sind Funktionen einer reellen Variablen, die alle das gleiche Definitionsgebiet haben.

Für jedes feste $x = x_0 \in \mathbb{R}$ ergibt die Funktionenreihe eine Zahlenreihe, die mit den aus 1.1 bekannten Kriterien untersucht werden kann.
Aufgabe zum Verständnis: Schreiben Sie die ersten 4 Glieder der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(3x^k)$ auf, d.h. berechnen Sie $f_k(x) = 3x^k$ für $k = 0, 1, 2, 3$. Können Sie die Reihe durch Ausklammern noch etwas vereinfachen? Ersetzen Sie nun x durch die Zahl 2. Es entsteht eine Zahlenreihe, was für eine? (Wenn Sie die Antwort nicht gleich finden, lesen Sie das nächste Beispiel und lassen Sie sich dadurch inspirieren.)

Beispiel 1.23 $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{x}{3})^k :$ $\curvearrowright$ $f_k(x) = (\frac{x}{3})^k :$

geometrische Reihe mit $q = \frac{x}{3}$ $\implies$ *Konvergenz für* $|\frac{x}{3}| < 1$, *d.h. für* $-3 < x < 3$.
Wir kennen die Formel für die Summe einer geometrischen Reihe der Gestalt $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$ *und formen die obige Reihe entsprechend um:*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{x}{3})^k &= 1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + ... \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot (\frac{x}{3})^{k-1} \\
s &= \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{x}{3}} \\
&= \frac{3}{3-x} = s(x)
\end{aligned}$$

D.h. für $-3 < x < 3$ *erhalten wir als Summe der Reihe eine Funktion von* x.

Definition 1.8 ***sehr wichtig - merken!***
Konvergenzbereich von $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \text{ ist konvergent}\}$

Definition 1.9 ***wichtig - merken!***
Summe der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = s(x)$.
$s(x)$ *ist eine im Konvergenzbereich definierte Funktion.*

Anwendungen der Funktionenreihen:

1. Funktionswertberechnungen
2. Ersatz von komplizierten Funktionen
3. Untersuchung technischer Objekte
4. Lösung von Differentialgleichungen.....

1.2.2 Potenzreihen

Definition 1.10 ***sehr wichtig - merken!***
Eine Potenzreihe ist eine Funktionenreihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

a_k *heißt* ***Koeffizient***, x_0 ***Mittelpunkt der Reihe***. *Die Entfernung* r *von* x_0 *bis zum Rand des Konvergenzbereiches heißt* ***Konvergenzradius***.

Bemerkung 1.7 ***sehr wichtig - merken!***
Der Konvergenzbereich der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ *ist das offene Intervall* $(x_0 - r, x_0 + r)$, *wobei die Randpunkte* $x = x_0 \pm r$ *gesondert untersucht werden müssen.*

Aufgabe zum Verständnis: Tragen Sie auf einem Zahlenstrahl den Mittelpunkt x_0 der Reihe an und zeichnen Sie den Konvergenzbereich der Reihe (Intervall) und den Konvergenzradius r (Strecke) ein. Für welche Punkte müssen gesonderte Untersuchungen gemacht werden? Markieren Sie diese. Welche Sorte von Intervall entsteht, wenn an diesen beiden Punkten ebenfalls Konvergenz der Reihe vorliegt?

Bemerkung 1.8 *Jede Potenzreihe konvergiert für* $x = x_0$ *mit der Summe* a_0.

Bemerkung 1.9 *Eine Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, *die nur für* $x = x_0$ *konvergiert* $(r = 0)$, *heißt nirgends konvergent. Sie hat die Summe*

$$\begin{aligned} s &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \right]_{x = x_0} \\ &= \left[a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + ... \right]_{x = x_0} \\ &= a_0 \end{aligned}$$

Eine Potenzreihe, die für alle x *aus* $\mathbb{R}$ *konvergiert, heißt beständig konvergent* $(r = \infty)$.

Beispiel 1.24 *Wegen dem Satz von Taylor gilt:* $\cos x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_n$;

$|R_n| = \left|\frac{(\cos(\theta x))^{(n+1)} x^{2n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \left|\frac{x^{2n+1}}{(n+1)!}\right| \to 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad$ *für* $n \to \infty$

$\curvearrowright \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}; \quad r = \infty :$ *Die Reihe ist beständig konvergent.*

Beispiel 1.25 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$: ***wichtig!***
Divergenz für $x = 1$*, weil harmonische Reihe*
Konvergenz für $x = -1$*, wegen Leibnizkriterium*
damit hat die Reihe an zwei Punkten, die auf dem Zahlenstrahl symmetrisch zum Mittelpunkt der Reihe $x_0 = 1$ *liegen, unterschiedliches Konvergenzverhalten. Nach der Definition des Konvergenzbereiches kann das aber nur auf dem Rand des Konvergenzbereiches (KB) der Fall sein, da an solchen Punkten innerhalb des KB stets Konvergenz, an entsprechenden Punkten außerhalb des KB stets Divergenz vorliegt.*
$\curvearrowright \quad x_0 = 0; \quad r = 1, \quad KB = [-1; 1)$
Hinweis zum Selbststudium: *Setzen Sie die Zahlen* $x = -1$ *und* $x = 1$*, d.h. die Randpunkte des Konvergenzintervalls, in die Reihe ein und untersuchen Sie ausführlich die entstehenden Reihen mit den Konvergenzkriterien/vergleichsreihe für Zahlenreihen. Markieren Sie den Konvergenzbereich auf einem Zahlenstrahl.*

Da jede Potenzreihe für feste Werte x in eine Zahlenreihe übergeht, können die Kriterien für Zahlenreihen auch auf die Potenzreihen angewendet werden. Das führt zu einer Berechnungsmethode für den Konvergenzbereich.

Beispiel 1.26 $\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k$:
$\lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \lim_{k\to\infty} |\frac{(k+1)!x^{k+1}}{k!x^k}| = \lim_{k\to\infty}(k+1)|x| = \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
$\to$ *Die Reihe ist nirgends konvergent.*

Bemerkung 1.10 ***sehr wichtig - merken!***
Da die Reihenglieder bei Potenzreihen von einer Variablen x *abhängen, von der wir nicht wissen, welches Vorzeichen sie hat, sind die* ***Beträge von jetzt an zwingend*** *in der Untersuchung der Konvergenzbereiche der Potenzreihen.*

Bestimmung des Konvergenzradius:
Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$.
$b_k = a_k(x - x_0)^k$ ist eine Zahl für jedes konkrete x. Unter Beachtung der Konvergenzkriterien für Zahlenreihen gilt dann: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist konvergent, wenn gilt:

$$\lim_{k\to\infty} |\frac{b_{k+1}}{b_k}| < 1 \quad bzw. \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|b_k|} < 1.$$

$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} |\frac{b_{k+1}}{b_k}| = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{a_k(x-x_0)^k}| = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| \cdot |x - x_0| < 1$

$\Rightarrow \quad |x - x_0| < \lim_{k\to\infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}| = r$

$\Rightarrow \quad -r < x - x_0 < r$

$\Rightarrow \quad x_0 - r < x < x_0 + r$

Hinweis zum Selbststudium: Führen Sie diese Rechnung in Analogie für das Wurzelkriterium aus.

Sie erhalten dann : $|x - x_0| < \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = r$ sowie wieder am Ende $x_0 - r < x < x_0 + r$.

Remark 1.7 *Damit ergeben sich zwei mögliche Wege, den Konvergenzbereich zu berechnen:*
1. Weg: Sie führen die Berechnung aus wie oben und haben in diesem Fall das Konvergenzkriterium genauso anzuwenden wie im Fall der Zahlenenreihen. (Das wäre meine Empfehlung, weil ich mir dann nur einmal das Kriterium merken muss und die Methode auch auf Spezielfälle anwendbar ist, in denen z.B. nur geradzahlige Exponenten in der Reihe auftreten o.ä.). Die Auflösung des Betrages erfolgt dabei immer nach demselben Schema: Bringen Sie alle Terme außer dem Betrag auf die rechte Seite der Ungleichung und stellen Sie folgende Ungleichung auf:

$$-\textit{rechte Seite} < \textit{Argument des Betrages} < + \textit{ rechte Seite}$$

2. Weg: Sie lesen den Mittelpunkt der Reihe x_0 und die Koeffizienten a_k aus der Darstellung der Reihe ab, wenden die Formeln für den Konvergenzradius an:

$$r = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_k}{a_{k+1}}| \qquad \textit{bzw.} \qquad r = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

und bestimmen den Konvergenzbereich nach der Formel $x_0 - r < x < x_0 + r$. Der Nachteil liegt hier in der Formel für den Konvergenzradius, weil dort der Kehrwert des Bruches aus dem Quotientenkriterium steht. Das kann man sehr leicht verwechseln. Wenn Sie aber diese Formel jedes Mal nachschlagen, ist diese Methode genauso sicher wie die 1.

Beispiel 1.27 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}$;
1. Weg: $\quad b_k = \frac{x^k}{2^k}$

$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} |\frac{b_{k+1}}{b_k}| = \lim_{k\to\infty} |\frac{x^{k+1}2^k}{2^{k+1}x^k}| = |\frac{x}{2}| < 1$

$\Rightarrow \quad |x| < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad -2 < x < 2 \quad \Rightarrow r = 2;\ x_0 = 0$

2. Weg: $\quad x_0 = 0 \quad a_k = \frac{1}{2^k}$

$\Rightarrow \quad r = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|\frac{1}{2^k}|}} = 2$

$\Rightarrow \quad x_0 - r < x < x_0 + r,\ d.h.\ \ -2 < x < 2$

Untersuchung der Randpunkte durch Einsetzen der Randpunkte in die Reihe:

$x = -2: \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k:$ *unbestimmt divergent*

$x = 2: \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k:$ *bestimmt divergent*

$\Rightarrow$ *Konvergenzbereich:* $I = (-2; 2)$

Selbststudienaufgabe: Probieren Sie beide Wege aus und entscheiden Sie sich für Ihren Favoriten.
Legen Sie sich für Ihre selbstgeschriebene Formelsammlung eine „Wegbeschreibung" ohne (Zahlen-)Beispiele an, die Sie bei der Lösung der Übungsaufgaben einsetzen und vervollkommnen. (Das entspricht Aufgabe A3 des Seminars Potenzreihen.)

Bemerkung 1.11
Die 1. Methode kann auch bei Potenzreihen angewendet werden, bei denen nur jedes n-te Glied von null verschieden ist.

Beispiel 1.28 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2k}}{2^k}; \quad b_k = \frac{(x-1)^{2k}}{2^k}; \quad x_0 = 1$

$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} |\frac{b_{k+1}}{b_k}| = \lim_{k\to\infty} |\frac{(x-1)^{2k+2} 2^k}{2^{k+1}(x-1)^{2k}}| = \frac{|x-1|^2}{2} < 1$

$\Rightarrow \quad |x-1|^2 < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-1| < \sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad -\sqrt{2} < x - 1 < \sqrt{2} \quad \Rightarrow 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2} \quad \Rightarrow r = \sqrt{2};\ x_0 = 1$

Untersuchung der Randpunkte:

$x = 1 - \sqrt{2}: \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\sqrt{2})^{2k}}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k:$ *bestimmt divergent*

$x = 1 + \sqrt{2}: \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^{2k}}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k:$ *bestimmt divergent*

$\Rightarrow$ *Konvergenzbereich:* $I = (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$

Bemerkung 1.12 ***sehr wichtig - merken!***
Da das offene Intervall des Konvergenzbereiches mittels Quotienten- bzw. Wurzelkriterium ermittelt wird, und diese beiden Konvergenzkriterien in etwa gleich stark sind, macht es keinen Sinn, diese nochmals oder das jeweilig andere Kriterium bei der Untersuchung der Randpunkte anzuwenden. Nehmen Sie dort bitte LEIBNIZ für alternierende Reihen, die Vergleichsreihe mit dem resultierenden Exponenten oder das Integralkriterium. Die bestimmung des KB ist erst dann abgeschlossen, wenn Sie zusammenfassend das Intervall angegeben haben. Eine solche Konvergenzbereichsbestimmung ist eine Standardaufgabe in der Prüfung.

Selbststudienaufgabe: Ergänzen Sie Ihre „Wegbeschreibung" um diese Erkenntnisse.

1.2.3 Eigenschaften von Potenzreihen

Satz 1.8 ***wichtig!***
Konvergieren die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$ *für* $|x-x_0| < R$ *und stimmen ihre Summen in diesem Intervall überein, so gilt* $a_k = b_k \quad \forall k$.
D.h. ***die Potenzreihendarstellung ist eindeutig.***

Bemerkung 1.13 *$f = f(x)$ sei in einer Umgebung $U(x_0)$ von x_0 beliebig oft differenzierbar. Nach dem Satz von TAYLOR gilt:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x). \\ \text{Gilt } \lim_{n\to\infty} R_n(x) &= 0 \quad \forall x \in U(x_0), so\ folgt \\ f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \end{aligned}$$

Diese Reihenentwicklung wird ***TAYLOR-Reihenentwicklung (wichtig!)*** *genannt. Sie ist in $U(x_0)$ konvergent und eindeutig.*

Beispiel 1.29 $f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k;$

Sei $x_0 = 0. \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k$

$\curvearrowright \quad f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ *ist konvergent* $\forall x \in \mathbb{R}$ *(s. obige Folgerung)*

Weitere Eigenschaften von Potenzreihen:
(wichtig - prüfungsrelevante Aufgaben in Bsp. 1.31 und 1.32 !)

1. Potenzreihen können im Konvergenzbereich gliedweise differenziert und integriert werden; Der Konvergenzbereich bleibt dabei erhalten.

   Beispiel 1.30 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$
   ist eine konvergente geometrische Reihe für $|x| < 1$.

   $\int_0^x \frac{dt}{1-t} \overset{integrieren}{=} -\ln(1-x) \overset{Reihe\ einsetzen}{=} x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + ...$ *für* $|x| < 1$

   Durch Umstellen erhalten wir $ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

2. Das Produkt von Potenzreihen bildet im Durchschnitt der Konvergenzbereiche der beiden Reihen, die als Faktor auftreten, wieder eine konvergente Potenzreihe. Ausführung durch systematisches Ausmultiplizieren der ersten Summanden beider Reihen:

Beispiel 1.31 $y = \sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$

$$\begin{aligned} y &= (x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - ...) \cdot (x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - ...) \\ &= x^2 - \tfrac{1}{3!}x^4 + \tfrac{1}{5!}x^6 - .. \\ &\qquad -\tfrac{1}{3!}x^4 + (\tfrac{1}{3!})^2 x^6 - ... \\ &\qquad\qquad +\tfrac{1}{5!}x^6 - \\ y &= x^2 - \tfrac{2}{3!}x^4 + \tfrac{2}{45}x^6 - ... \end{aligned}$$

da $\frac{2}{5!} + (\frac{1}{3!})^2 = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{36+60}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 6} = \frac{3\cdot 4\cdot 4\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 6} = \frac{2}{5\cdot 3\cdot 3}$

3. Division von Potenzreihen

Satz 1.9 *Es seien* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ *gegeben;* $g(0) = b_0 \neq 0$. *Dann lässt sich* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *in einer gewissen Umgebung von* $x = 0$ *in eine Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ *entwickeln.*

Die Berechnung des Quotienten wird dabei auf einen sinnvollen Ansatz für den Quotienten und die Multiplikation von Potenzreihen zurückgeführt.

Beispiel 1.32 $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + ...$
(Ansatz nur mit ungeraden Exponenten, da $\tan x$ *eine ungerade Funktion ist)*

$$\tan x \cdot \cos x = \sin x$$

$$(c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + ...) \cdot \left(1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \tfrac{1}{6!}x^6 - ...\right) = x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - ...$$

$$c_1 x + (-\tfrac{c_1}{2!} + c_3)x^3 + (\tfrac{c_1}{4!} - \tfrac{c_3}{2!} + c_5)x^5 + ... = x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - ...$$

$$\curvearrowright \quad c_1 = 1$$

$$c_3 - \tfrac{c_1}{2!} = -\tfrac{1}{3!} \quad \Rightarrow \quad c_3 = \tfrac{1}{3}$$

$$c_5 + \tfrac{c_1}{4!} - \tfrac{c_3}{2!} = \tfrac{1}{5!} \quad \Rightarrow \quad c_5 = \tfrac{2}{15}....$$

$$\curvearrowright \quad \tan x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + ...$$

1.2.4 Anwendungen der Potenzreihen

1. Beweis der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{(ix)}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + ... \\ &= 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - ... \\ &= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - +...) + i(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - +...) \\ &= \cos x \qquad + \qquad i \sin x \end{aligned}$$

2. Gliedweise Integration (**wichtig für Zusatzaufgabe in der Prüfung!)**

 - Das Integral $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$,der sogenannte Integralsinus, ist geschlossen nicht lösbar.

$$\begin{aligned}\mathrm{Si}(x) &= \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - +...\right) dt \\ &= x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - +...\end{aligned}$$

 - $\int_0^{0.5} \sqrt{1+x^3}dx = \int_0^{0.5} \left(1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{16}x^9 - +...\right) dx$

$$= [x + \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{56}x^7 + \tfrac{1}{160}x^{10} - +...]_0^{0.5}$$

$$\approx \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{128} - \tfrac{1}{7168} + -... \approx 0.50768$$

3. Grenzwerte unbestimmter Ausdrücke (**wichtig - prüfungsrelevante Aufgabe!)**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - x\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - +...\right)}{x - x\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - ...\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + -..}{\frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{8} + ...} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

4. Näherungsweise Berechnung von Funktionswerten

$\cos 0.5 = 1 - \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{4!2^4} - \frac{1}{6!2^6} + -... \approx 0.87758$

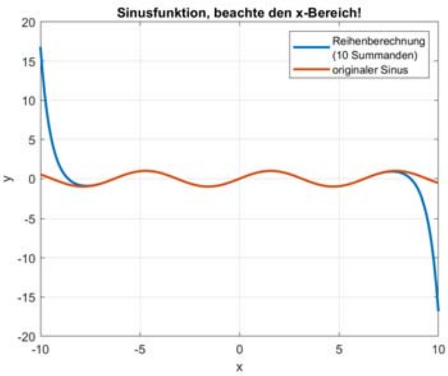
Lösen Sie nun die Aufgaben des A-Teils der Übung Potenzreihen.

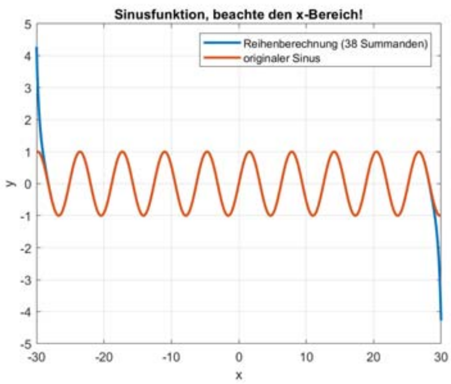
1.3 FOURIER-Reihen (J.B. Fourier 1768-1830), bis 20.04.2020

Ehe wir uns nun einer speziellen Klasse von Funktionenreihen widmen, den Fourierreihen (für alle "Nichtfranzosen": sprich „Furijee"-Reihen), wollen wir uns einmal verdeutlichen, was wir mit den bisher bekannten Potenzreihen erreichen können:
Wir haben festgestellt, dass es für jede Potenzreihe einen Konvergenzbereich gibt, in dem die Potenzreihe punktweise konvergiert. In diesem Konvergenzbereich ist die Potenzreihendarstellung eindeutig, d.h. es gibt im Konvergenzbereich für jede Funktion genau eine Potenzreihe. Diese kann z.B. mittels der Taylorreihenentwicklung bestimmt werden, falls die Funktion genügend oft differenzierbar ist. Wählen wir nun als Beispiel die Sinusfunktion. Diese hat die Potenzreihendarstellung

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2n+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

d.h. die Reihe konvergiert in ganz $\mathbb{R}$ und hat den Mittelpunkt $x_0 = 0$. Für diese Reihe finden Sie hier verschiedene grafische Darstellungen mit unterschiedlich vielen Summanden, unterlegt mit der tatsächlichen Sinusfunktion.





Sie können erkennen, dass die Übereinstimmung mit der Originalfunktion jeweils in einer Umgebung vom Mittelpunkt der Reihe sehr gut ist und weiter außen auf der Achse sich die Polynomeigenschaften durchsetzen. Der Bereich der Übereinstimmung wird größer mit der Anzahl der verwendeten Summanden. Aber in der Praxis kann man niemals unendlich viele Summanden verwenden, die man brauchen würde, um überall eine gute Übereinstimmung mit der tatsächlichen Sinusfunktion zu erhalten. Wie kann man nun diese Schwierigkeiten überwinden?

1. Da man die Funktion oft nur in bestimmten Bereichen benötigt, kann man den Mittelpunkt der Reihe = Entwicklungsstelle der Funktion dorthin verlagern. Dann benötigt man weniger Summanden, um in der Umgebung des Entwicklungspunktes ein gutes Ergebnis zu erhalten.

2. Man kann die Periodizität der Funktion ausnutzen, so dass man die Reihe nur in einer Periode auswerten muss und danach die Werte durch Verschiebung bzw. Streckung/Stauchung bestimmen kann.

3. Da sich die Polynomeigenschaften im Außenbereich durchsetzen und die Polynome nicht gut an periodische Funktionen angepasst sind, könnte man andere Funktionen suchen, z.B. periodische Funktionen, die in der Reihe an Stelle der Potenzfunktionen stehen. (Die Mathematiker sagen dann, dass sie in ein anderes „Koordinatensystem" für die Darstellung der Funktion wechseln, d.h. in einen anderen mathematischen Raum, der für die speziellen Ziele besser angepasst ist.)

In der Praxis hat man nun z.B. bei der Unteruchung von periodischen elektrischen, mechanischen, Ton- oder Bildsignalen das Bedürfnis, die Frequenzen kennenzulernen, aus denen diese Signale bestehen. Wenn man eine Potenzreihendarstellung vorliegen hat, kann man die Frequenzen natürlich nicht angeben. Aus der Physik ist weiterhin bekannt, dass jede Schwingung eine Linearkombination der Grundschwingung und harmonischer Oberschwingungen ist (s. auch Saiteninstrumente, Bachtrompete). Eine einheitliche Darstellung mittels harmonisch verwandter, (periodischer) Sinus- und Cosinusfunktionen wäre da sicher besser. **Wir betrachten also im Weiteren eine periodische Funktion $f(t)$ mit der Periode T und wollen diese mittels periodischen Funktionen (Sinus- und Cosinusfunktionen) darstellen,** d.h.wir betrachten nun trigonometrische Funktionenreihen der Form:

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega k t + \varphi_k) && \text{1. Art} \\ f(t) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) && \text{2. Art} \end{aligned}$$

Definition 1.11 *Solche Funktionenreihen der 1. bzw. 2. Art heißen Fourierreihen.* ***(Sehr wichtig!)***

Beide Formen sind äquivalent:

$$\begin{aligned} A_k \sin(\omega k t + \varphi_k) &= A_k(\sin k\omega t \cos\varphi_k + \cos k\omega t \sin\varphi_k) \\ &= A_k \cos\varphi_k \sin k\omega t + A_k \sin\varphi_k \cos k\omega t \\ &= a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} a_k &= A_k \sin\varphi_k, \qquad b_k = A_k \cos\varphi_k \\ A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \qquad \varphi_k = \arctan\frac{a_k}{b_k}. \end{aligned}$$

(Es gibt auch Reihendarstellungen mit den Funktionen $\cos(\omega kt + \varphi_k)$, die ebenfalls mittels Additionstheoremen in die 2. Form der Fourierreihe umgewandelt werden können.)

Bezeichnungen:(**Sehr wichtig!**)

A_k : Amplitude; φ_k : Phasenkonstante
ω : Kreisfrequenz; $T = \frac{2\pi}{\omega}$: Periode

Verständnishilfe: Vergleichen Sie bitte die Reihendarstellung 2. Art mit der Darstellung eines Vektors in einem n-dimensionalen Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{a_0}{2} + (a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t)) + (a_2\cos(2\omega t) + b_2\sin(2\omega t)) + ... \\ &= \frac{a_0}{2}\cdot 1 + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) + a_2\cos(2\omega t) + b_2\sin(2\omega t) + ... \\ \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} &= d_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + d_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + ... + d_n\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{d} \\ &= d_1\overrightarrow{e_1} + d_2\overrightarrow{e_2} + ... + d_n\overrightarrow{e_n} \end{aligned}$$

Der einzige wesentliche Unterschied besteht darin, dass die Reihe für die Funktionen abzählbar unendlich viele Summanden enthält, die Zerlegung des Vektors nur endlich viele Summanden. Prinzipiell entsprechen

die Koeffizienten a_k und b_k in der 1. Summe den Koeffizienten d_k in der 2. Summe, und die Funktion 1 sowie die verschiedenen Sinus- bzw. Cosinus-Funktionen den Basisvektoren $\overrightarrow{e_k}$.

Damit können wir folgende **Interpretation ableiten:**
So wie die Koeffizienten d_k den Anteil des Vektors $\overrightarrow{e_k}$ im Gesamtvektor $\overrightarrow{d}$ angeben, geben die Koeffizienten b_k und a_k den Anteil der ensprechendenden Sinus- und Cosinusfunktionen $\sin(k\omega t)$ und $\cos(k\omega t)$ in der Funktion $f(t)$ an.
Diese Winkelfunktionen sind über das Argument $k\omega t$ mit der Frequenz $k\omega$ vernüpft. D.h. Somit geben die Koeffizienten a_k und b_k den Anteil der ensprechendenden Frequenz $k\omega$ im Signal $f(t)$ an, und die Ingenieure erhalten die gewünschte Information über die Frequenzverteilung im Signal $f(t)$. Allerdings ist diese Information noch auf zwei Zahlen a_k und b_k verteilt. Mit der komplexen Form der Fourierreihen werden diese beiden Informationen zusammengeführt. Aus diesen Überlegungen ergeben sich mögliche Anwendungen der Fourierreihen.

Anwendungen:

- Untersuchung von Schwingungsverläufen bei nichtsinusförmiger Erregung, insbesondere Spannungen und Ströme, da viele Vorgänge erst mit nichtsinusförmigen Schwingungen realisierbar sind, z.B. sägezahnförmige Spannungen bei Ablenkungsvorgängen, Rechteckimpulse als Takt- und Synchronsignale, ...

- Dimensionierung von Filtern für unterschiedliche Anwendungen, z.B. von Bandpass-, Hochpass-, Tiefpassfiltern, Mehrwegboxen, ...

1.3.1 Die komplexe Form der FOURIER-Reihe

In vielen Anwendungen wird die komplexe Form der Fourierreihe benutzt, da sie kompakter in der Darstellung ist.(- Und beim Berechnen der Reihen benötigen wir ein Integral weniger!) Deshalb werden wir ab diesem Kapitel nur noch mit der komplexen Form arbeiten. Eine Umrechnung in die beiden ersten Formen ist jederzeit relativ einfach mit Hilfe der unten angegebenen Formeln für die Koeffizienten(ohne weitere Integration) möglich. Beginnen wir nun mit der Herleitung der komplexen Form :

Aus dem Kapitel Komplexe Zahlen ist die Eulersche Formel bekannt:

$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (*) \Rightarrow \quad e^{-iy} = \cos(-y) + i\sin(-y)$, d.h.
$e^{-iy} = \cos y - i \sin y \quad (**)$

Aus $(*)$ und $(**)$ kann die komplexe Darstellung der Funktionen $\sin y$ und $\cos y$ gewonnen werden:

$(*) + (**)$ ergibt:

$$2\cos y = e^{iy} + e^{-iy}$$

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

$$\Longrightarrow \cos k\omega t = \frac{e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}}{2}$$

$(*) - (**)$ ergibt:

$$2i \sin y = e^{iy} - e^{-iy}$$

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

$$\sin k\omega t = \frac{e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}}{2i}$$

Wir setzen diese beiden Terme nun in die Formel der 2. Art der Fourierreihe ein und erhalten:

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \frac{1}{2}(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}) + b_k \frac{1}{2i}\left(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}\right)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[\frac{a_k}{2}(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}) - \frac{b_k}{2} i \left(e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}\right)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t}]. \end{aligned}$$

Wir setzen nun: $c_0 = \dfrac{a_0}{2} \quad c_k = \dfrac{a_k - ib_k}{2}; \quad c_{-k} = \dfrac{a_k + ib_k}{2} = \overline{c_k}.$

(= **sehr wichtige Formeln für die Umrechnung der Koeffizienten! Wichtigkeit bleibt sehr hoch bis zu den „Problemen".**)

Damit erhalten wir die 3. Art der Fourierreihe:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}.$$

Zu beachten ist dabei die Beziehung $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Die Koeffizienten c_k heißen komplexe Amplituden.

Es gilt:$|c_k| = \frac{1}{2}|a_k \pm ib_k| = \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{1}{2}A_k$.

Die Folge der c_k nennt man auch Spektralfolge zu $f(t)$.
Umrechnungsformeln für die 2. Form der Fourierreihe:

$$\begin{aligned} a_k &= c_k + c_{-k} && \textit{für} \quad k \geq 1; \quad a_0 = 2c_0 \\ b_k &= i(c_k - c_{-k}) && \textit{für} \quad k \geq 1; \quad (b_0 = 0) \end{aligned}$$

Selbststudienaufgabe: Erstellen Sie eine Übersicht über die 3 Arten der Fourierreihe und die Umrechnung der Koeffizienten zwischen den einzelnen Arten, vielleicht in Form eines Dreickes mit den Arten der Reihe auf den Eckpunkten und den Umrechnungsformeln auf den Seiten des Dreickes. Sie finden diese Formeln im Text oberhalb und für den Übergang 1. Form $\Leftrightarrow$ 3. Form in dem Unterabschnitt Anwendungen am Ende des Kapitels - oder Sie rechnen sie selbst aus.
Probleme:

1. Für welche Funktionen existiert eine Fourierreihendarstellung?
2. Wie ist die Konvergenz der Fourierreihe gegen $f(t)$ beschaffen?
3. Wie werden die Koeffizienten c_k berechnet?

1.3.2 Berechnung der Fourierkoeffizienten c_k

Nun kennen wir das Ziel, in Gestalt der Fourierreihe und wollen aus der gegebenen T-periodischen Funktion $f(t)$ die bislang unbekannten Koeffizienten c_k berechnen.
Um in der entscheidenden Berechnung nicht den Überblick zu verlieren, starten wir zuerst eine Hilfsrechnung und integrieren über das Produkt zweier Exponentialfunktionen. Eine davon hat einen positiven, die andere einen negativen Exponenten. Im 1.

Fall sind beide Exponenten entgegengesetzt gleich, im zweiten Fall unterscheiden sie sich durch den Faktor vor ω.

Hilfsrechnung: $\omega = \frac{2\pi}{T}$; $k, n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
\int_0^T e^{ik\omega t} \cdot e^{-ik\omega t} dt &= \int_0^T 1 dt = T \\
\int_0^T e^{ik\omega t} \cdot e^{-in\omega t} dt &= \int_0^T e^{i(k-n)\omega t} dt \\
&= \frac{1}{i\omega(k-n)} [e^{i(k-n)\omega t}]_0^T \\
&= \frac{1}{i\omega(k-n)} [e^{i(k-n)\frac{2\pi}{T}T} - e^0] \\
&= \frac{1}{i\omega(k-n)} [\cos(k-n)2\pi + i\sin(k-n)2\pi - 1] \\
&= 0, \text{ da } \cos(k-n)2\pi = 1 \text{ und } \sin(k-n)2\pi = 0
\end{aligned}
$$

(Mathematiker sagen: Das Funktionensystem $\{e^{ik\omega t}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ist orthogonal, in Analogie zu den Vektoren.)

Annahme:

Wir betrachten jetzt eine $T-$periodische Funktion $f(t)$ die durch eine auf $[0, T]$ konvergente Fourierreihe darstellbar ist: $f(t) \sim \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{i\omega l t}$. Diese Reihe setzen wir in das Integral ein und erhalten unter der Voraussetzung, dass Integral und Summe vertauscht werden können :

$$
\begin{aligned}
\int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt &= \int_0^T \Big(\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{i\omega l t}\Big) \cdot e^{-ik\omega t} dt \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \int_0^T e^{i\omega l t} \cdot e^{-ik\omega t} dt \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \begin{cases} T & f\ddot{u}r \quad l = k \\ 0 & f\ddot{u}r \quad l \neq k \end{cases} = c_k T \text{ (s. Hilfsrechnung!)}
\end{aligned}
$$

Durch Umstellen nach c_k ergibt sich:

$$
c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt \qquad (+) \quad (\textbf{Sehr wichtig!})
$$

Satz 1.10 ***(Sehr wichtig!)***

Ist die $T-$periodische Funktion $f(t)$ im Intervall $[0, T]$ stückweise stetig differenzierbar, *so kann $f(t)$ mit $(+)$ als Fourierreihe dargestellt werden. Hat $f(t)$ bei $t = t_0 \in [0, T]$ eine Sprungstelle, so konvergiert die Reihe im Punkt t_0 gegen den Wert*

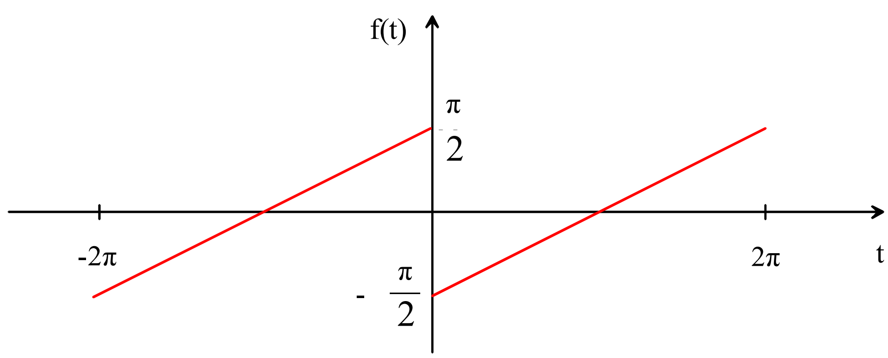
$$\frac{1}{2}\left(\lim_{t \to t_0 - 0} f(t) + \lim_{t \to t_0 + 0} f(t)\right).$$

Man schreibt deshalb:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}. \qquad (o)$$

Interpretation: Bei Sprungstellen konvergiert die Fourierreihe gegen den Mittelpunkt des Sprunges. Das ist eine Besonderheit im Vergleich zu den Potenzreihen. Potenzreihen konvergieren punktweise. - Was aber sollte der Konvergenzpunkt bei einem Sprung und punktweiser Konvergenz sein? - Der letzte Punkt oben oder der 1. Punkt unten? Insofern verhält sich die Fourierreihe „vernünftig", indem sie durch den Mittelpunkt des Sprunges verläuft. Für Sprungfunktionen kann man die Taylorrreihenentwicklung auch deshalb nicht anwenden, weil Sprungfunktionen an der Sprungstelle nicht differenzierbar sind. Das heißt also, es muss eine andere Art der Konvergenz bei den Fourierreihen vorliegen. Deshalb steht in der Formel (o) auch kein Gleichheitszeichen! Ehe wir zu dieser neuen Form der Konvergenz kommen,wollen wir aber die Berechnungsmöglichkeiten ausprobieren.
Im Folgenden finden Sie einige Beispiele zur Berechnung von Fourierreihen. Sie entsprechen den Aufgaben, die Sie in der Prüfung bekommen werden. Sie sind also für Sie sehr wichtig!
Entweder ist ein Bild einer Funktion $f(t)$ oder deren mathematische Gleichung gegeben. Beides zusammen liefert die nötigen Informationen zur Berechnung der c_k.
Selbststudienaufgabe: Wiederholen Sie das Zeichnen von linearen Funktionen, bzw. das Ablesen dieser aus einer Zeichnung, sowie das Feststellen der Periode einer gezeichneten Funktion als Vorbereitung zum Seminar. (s. auch Aufgabe A2 aus dem Seminar Fourierreihen)

Beispiel 1.33 $f(t) = \frac{1}{2}t - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}(t - \pi)$ *für* $0 < t < 2\pi$; $T = 2\pi$; $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$



Unser Ziel ist die Fourierreihe:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}.$$

Wir benötigen die Koeffizienten c_k und berechnen zuerst c_0, danach allgemein c_k

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^0 dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(t-\pi)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}[\frac{1}{2}t^2-\pi t]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4\pi}[\frac{1}{2}4\pi^2-2\pi^2] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(t-\pi)e^{-ikt}dt \\ &= \frac{1}{4\pi}[-\frac{(t-\pi)}{ik}e^{-ikt}+\frac{1}{ik}\int e^{-ikt}dt]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4\pi}[-\frac{(t-\pi)}{ik}e^{-ikt}-\frac{1}{i^2k^2}e^{-ikt}]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4\pi}[e^{-ikt}(\frac{1}{k^2}-\frac{(t-\pi)}{ik})]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{4\pi}[(\cos 2k\pi - i\sin 2k\pi)(\frac{1}{k^2}-\frac{\pi}{ik})-e^0(\frac{1}{k^2}+\frac{\pi}{ik})] \\ &= \frac{1}{4\pi}[(\frac{1}{k^2}-\frac{\pi}{ik})-(\frac{1}{k^2}+\frac{\pi}{ik})] \\ &= \frac{1}{4\pi}[-2\frac{\pi}{ik}] = -\frac{1}{2ik} = \frac{i}{2k} \end{aligned}$$

Wenn Sie nun versuchen $k = 0$ in die Formel für c_k einzusetzen, um noch einmal c_0 zu bestätigen, werden Sie feststellen, dass das zu einer Nulldivision führt. Das passiert in sehr vielen Fällen durch die partielle Integration. Deshalb sollten Sie c_0 ***stets separat ausrechnen****. Für die unbestimmte Integrationen in diesen Berechnungen dürfen Sie den Taschenrechner verwenden, so dass sie einfacher auszuführen sind. Das Einsetzen der Grenzen möchte ich aber in der Prüfung sehen, weil das noch Gegenstand der 1.*

Übung im 2. Semester ist.
Setzen wir nun die Koeffizienten in die Reihendarstellung ein, erhalten wir:

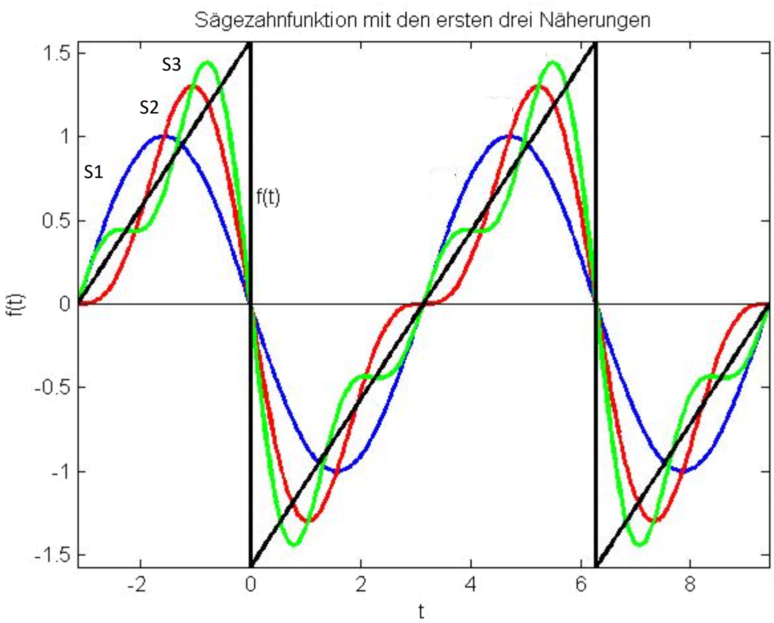
$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} = 0 + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} \frac{i}{2k} e^{ikt} = \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} \frac{i}{2k} e^{ikt}$$

Man nimmt dabei den Summanden mit $k = 0$, d.h. $c_0 e^{i0t} = c_0 e^0 = c_0$ aus der Gesamtsumme heraus, weil er sich nicht in die allgemeine Darstellung der c_k einpassen lässt. Das muss man dann unter der Summe mit $k \neq 0$ vermerken. In unserem Beispiel war $c_0 = 0$, so dass am Ende dieser Summand nicht mehr zu sehen ist. ***(sehr wichtig bis hierher!)***
Nun wird das Beispiel weitergeführt bis zu einer reellen Darstellung der Fourierreihe (2. Art)

Unter Beachtung von
$a_0 = 2c_0 = 0; \quad a_k = c_k + c_{-k} = \frac{i}{2k} + \frac{i}{2(-k)} = 0$
$b_k = i(c_k - c_{-k}) = i(\frac{i}{2k} - \frac{i}{2(-k)}) = i\frac{2i}{2k} = -\frac{1}{k}$ gilt :

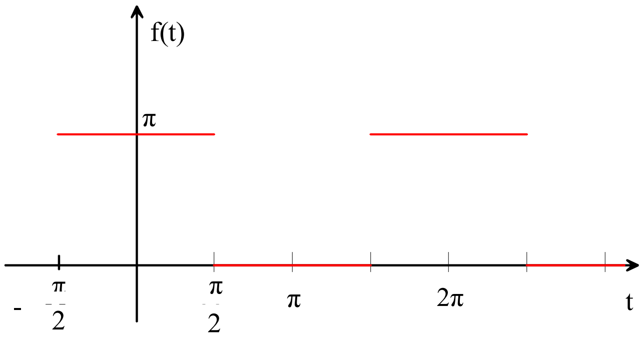
$$\begin{aligned} f(t) \quad &\sim \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \\ &= \quad \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{k} \sin kt = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kt \end{aligned}$$

Das folgende Bild zeigt die ersten 3 Partialsummen dieser Reihe und in schwarz den entwickelten Sägezahn.



In diesem Beispiel war die zu entwickelnde Funktion $f(t)$ eine einheitliche lineare Funktion im Intervall $[0; T]$. Damit waren die Integrale für c_0 und c_k genau über dieses Intervall zu bilden und mussten nicht geteilt werden, weil sich die Beschreibung der Funktion $f(t)$ im Intervall ändert. Im nächsten Beispiel ist aber genau das der Fall:

Beispiel 1.34 $(t) = \begin{cases} \pi & f\ddot{u}r \quad -\frac{\pi}{2} \le t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & f\ddot{u}r \quad \frac{\pi}{2} \le t < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \quad T = 2\pi; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$



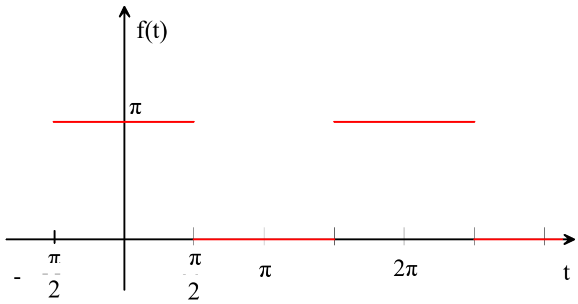
Im Integrationsintervall $[0; T] = [0; 2\pi]$ ändert sich die Funktionsbeschreibung sogar zweimal, bei $t = \frac{\pi}{2}$ und $t = \frac{3\pi}{2}$. D.h. an diesen Stellen muss das Integral über $[0; 2\pi]$ aufgeschnitten und in die Summe von 3 Teilintegrale zerlegt werden. Das ist aufwendig und kann mit den beiden folgenden Bemerkungen abgemildert werden.

Bemerkung 1.14 $e^{i\omega kt} = \cos(\omega kt) + i\sin(\omega kt) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}kt\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{T}kt\right)$
ist eine periodische Funktion mit der Periode $p = \frac{2\pi}{\frac{2\pi k}{T}} = \frac{T}{k}$.

Bemerkung 1.15 *Ist $f(t)$ p-periodisch, so gilt für alle $a \in \mathbb{R}$: $\int_a^{a+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt$.*
$\Rightarrow$ *In der Formel für $c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega kt}dt$ ist der Integrand T-periodisch, weil $f(t)$ T-periodisch ist und $e^{i\omega kt}$ die Periode $\frac{T}{k} \le T$ für $k \ge 1$ besitzt.*

Folglich muss das Integral nur über die Periode T erstreckt werden, egal wo. Im Allgemeinen verwendet man ein Intervall der Länge T in der Umgebung des Nullpunktes. (sehr wichtig!)

Beispiel 1.35 *Arbeiten wir nun in dem Beispiel weiter und schauen noch einmal in das Bild der Funktion:*



Wenn wir das Integrationsintervall der Länge $T = 2\pi$ nun bei $t = -\frac{\pi}{2}$ beginnen, läuft es bis $t = \frac{3\pi}{2}$ und enthält nur einen Sprung der Funktion, nicht 2 wie das Intervall $[0; 2\pi]$. Außerdem gilt $f(t) \equiv 0$ für $t \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$, d.h. dort verschwindet der Integrand. Damit ergibt sich die folgende Rechnung:

$$
\begin{aligned}
f(t) &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \\
c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(t) e^0 dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi dt = \frac{1}{2\pi} [\pi t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2} [\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})] = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(t) e^{-ikt} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} [-\frac{\pi}{ik} e^{-ikt}]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2\pi} [-\frac{\pi}{ik} (e^{-ik\frac{\pi}{2}} - e^{-ik(-\frac{\pi}{2})})] \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{ik} [e^{ik\frac{\pi}{2}} - e^{-ik\frac{\pi}{2}}] \\
&= \frac{1}{k} \frac{1}{2i} [e^{ik\frac{\pi}{2}} - e^{-ik\frac{\pi}{2}}] = \frac{1}{k} \sin k \frac{\pi}{2} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{k} & für \quad k = -3, 1, 5, 9, \ldots \\ 0 & für \quad k = 2, 4, 6, 8, \ldots \\ -\frac{1}{k} & für \quad k = -1, 3, 7, 11, \ldots \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die Gestalt der Koeffizienten c_k gestaltet sich also etwas aufwändig und schwierig aufzuschreiben. Deshalb belassen wir es beim vorletzten Rechnungsschritt in der Zusam-

menfassung: ***(sehr wichtig bis hierher!)***

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k\frac{\pi}{2} e^{ikt}$$

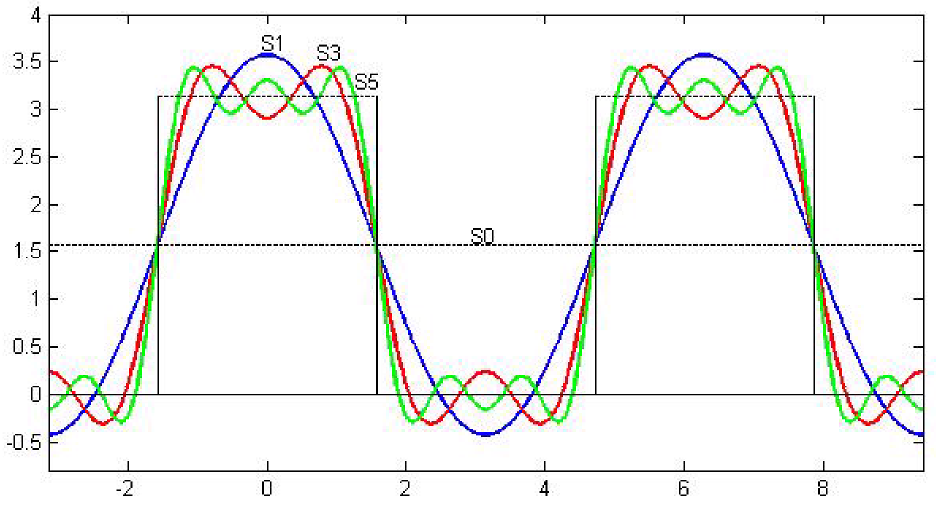
Nun wird die Reihe noch in die reelle Form der 2. Art überführt. Unter Beachtung von $a_0 = 2c_0 = \pi;$ *gilt:*

$$a_k = c_k + c_{-k} = \begin{cases} \frac{1}{k}\cdot 1 + \frac{1}{-k}(-1) = \frac{2}{k} & f\ddot{u}r \quad k = 1,5,9,... \\ 0 & f\ddot{u}r \quad k = 2,4,6,... \\ \frac{1}{k}(-1) + \frac{1}{-k}\cdot 1 = -\frac{2}{k} & f\ddot{u}r \quad k = 3,7,11,... \end{cases}$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \left\{ \begin{array}{ccc} i(\frac{1}{k} - \frac{1}{k}) = 0 & f\ddot{u}r & k = 1,5,9,... \\ 0 & f\ddot{u}r & k = 2,4,6,... \\ i(-\frac{1}{k} - (-\frac{1}{k})) = 0 & f\ddot{u}r & k = 3,7,11,... \end{array} \right\} = 0 \quad \forall k$$

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1,5,9,...}^{\infty} \frac{2}{k}\cos kt - \sum_{k=3,7,...}^{\infty} \frac{2}{k}\cos kt \end{aligned}$$

Im Bild sehen Sie die Auswertung dieser reellen Fourierreihe im Vergleich der ersten 4 Partialsummen und der Originalfunktion.



Um eine weitere Vereinfachung der Rechnung zu erhalten, untersuchen wir gerade und ungerade periodische Funktionen $f(t)$. Die Herleitung ist fakultativ, das Ergebnis aber nicht.

Bemerkung 1.16 **) Sei $f(t)$ **gerade*** $\Rightarrow \quad f(-t) = f(t)$

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-ik\omega t}dt \\
&= \frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} f(t)e^{-ik\omega t}dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-ik\omega t}dt\right] \\
&= \frac{1}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{2}} f(-t_{neu})e^{ik\omega t_{neu}}dt_{neu} + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-ik\omega t}dt\right] \qquad \textit{mit } t = -t_{neu} \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)(e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t})dt \quad \textit{wegen gerader Funktion} \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)(\cos k\omega t + i\sin k\omega t + \cos k\omega t - i\sin k\omega t)dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega t dt \qquad \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Bemerkung 1.17
Wegen $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \in \mathbb{R}$ folgt $b_k = 0$. Die Reihe ist eine Cosinusreihe:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t.$$

Das macht Sinn, weil ungerade Funktionen, wie Sinusfunktionen, bei der Entwicklung einer geraden Funktion nur stören würden.

Bemerkung 1.18
Wegen $\cos k\omega t = \cos(-k\omega t)$ folgt $c_k = c_{-k}$ und damit $a_k = c_k + c_{-k} = 2c_k$.

Bemerkung 1.19 **) Sei $f(t)$ **ungerade*** $\Rightarrow \quad f(-t) = -f(t)$.
Eine analoge Rechnung zu Bemerkung 1.12 führt zu

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)(-e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t})dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)(-\cos k\omega t - i\sin k\omega t + \cos k\omega t - i\sin k\omega t)dt \\
&= \frac{-2i}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin k\omega t dt \qquad \textit{(rein imaginär)}
\end{aligned}$$

Bemerkung 1.20
Wegen $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ *und* c_k *rein imaginär folgt* $a_k = 0$ *und* $b_k = -\frac{2}{i}c_k$ *Die Reihe ist eine Sinusreihe:*

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t.$$

Zusammenfassung: (sehr wichtig!)
Formelsatz für gerade Funktionen

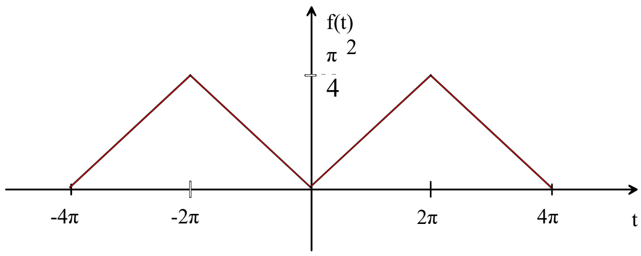
$$c_k = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega t dt \qquad \in \mathbb{R}$$

Formelsatz für ungerade Funktionen

$$c_k = \frac{-2i}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin k\omega t dt \qquad \text{(rein imaginär)}$$

Damit reduziert sich das **Integrationsintervall auf die Länge der halben Periode** $[0; \frac{T}{2}]$, aber es ist **nicht mehr verschieblich!** Durch die Ausnutzung der Symmetrie der Funktion muss das Intervall nun **immer bei** $t = 0$ **beginnen!**
Das wenden wir jetzt auf eine gerade $T-$periodische Funktion an.

Beispiel 1.36 $f(t) = \frac{\pi}{8}t$:
gerade Funktion, $T = 4\pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2}$, *Integrationsintervall:* $[0; 2\pi]$



$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{2}{T}\int_0^{2\pi} f(t)dt \\ &= \frac{2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi}{8}tdt \\ &= \frac{1}{16}\frac{1}{2}[t^2]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{32}4\pi^2 = \frac{1}{8}\pi^2 \end{aligned}$$

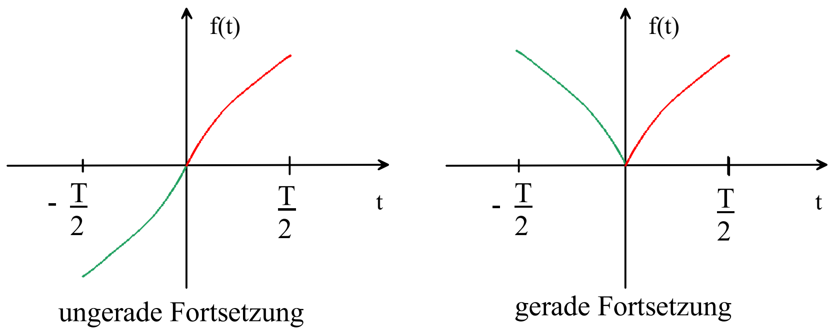
$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega t dt \\
&= \frac{2}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi}{8} t\cos(k\frac{2\pi}{4\pi}t)dt \\
&= \frac{1}{16}\int_0^{2\pi} t\cos(k\frac{t}{2})dt \\
&= \frac{1}{16}\left[\frac{2t}{k}\sin\frac{kt}{2} - \frac{2}{k}\int \sin\frac{kt}{2}dt\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{16}\left[\frac{2t}{k}\sin\frac{kt}{2} + \frac{2}{k}\cdot\frac{2}{k}\cos\frac{kt}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{16}\left[\frac{2\cdot 2\pi}{k}\sin\frac{k2\pi}{2} + \frac{2}{k}\cdot\frac{2}{k}\cos\frac{k2\pi}{2} - 0 - \frac{4}{k^2}\cos 0\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[\frac{4}{k^2}(-1)^k - \frac{4}{k^2}\right] \\
&= \frac{1}{16}\frac{4}{k^2}[(-1)^k - 1] = \begin{cases} 0 & f\ddot{u}r \quad k \ gerade \\ -\frac{1}{2k^2} & f\ddot{u}r \quad k \ ungerade \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{\pi^2}{8} + \sum_{\substack{k=-\infty, k\neq 0 \\ k \ ungerade}}^{\infty} -\frac{1}{2k^2} e^{ikt/2}
$$

Hilfe zur Selbsthilfe: Nehmen Sie sich nun aus dem Verzeichnis r:\CB\Bernert\EI-MG-MD-EU\Semester2\Arbeitsmittel+Tabellen.... die Zusammenstellung aller Formeln, d.h. die Datei FormelnFOURIERReihe.pdf heraus und legen Sie sie zur ständigen Nutzung bereit. Schauen Sie sich diese Tabelle genau an und überlegen Sie, was Sie an Informationen benötigen, um in dieser Tabelle die richtige Formel zu finden. (s. auch Aufgabe A3 des Seminars Fourierreihen)

In der Praxis kennt man manchmal nur Teile der $T-$periodischen Funktion $f(t)$, weiß aber möglicherweise etwas über die Symmetrie der Funktion, so dass man daraus die Funktion insgesamt rekonstruieren kann.
Ist die Funktion z.B. nur auf einem endlichen Intervall $[a, a+\frac{T}{2}]$ vorgegeben, kann sie auf $\mathbb{R}$ periodisch fortgesetzt werden, wenn man die Symmetrieverhältnisse der Funktion kennt. Danach ist dann eine Fourierreihenentwicklung möglich. Die Fortsetzung sollte an den technischen Hintergrund angepasst werden.

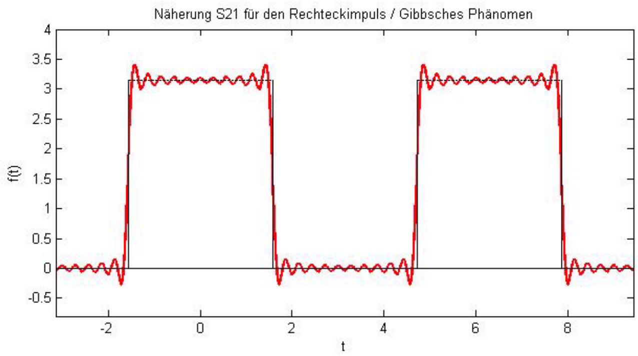
Beispiel 1.37 *Sei $a = 0$. Dann gibt es 2 Möglichkeiten, die Funktion auf dem Intervall $[-\frac{T}{2}; 0]$ fortzusetzen (grün):*

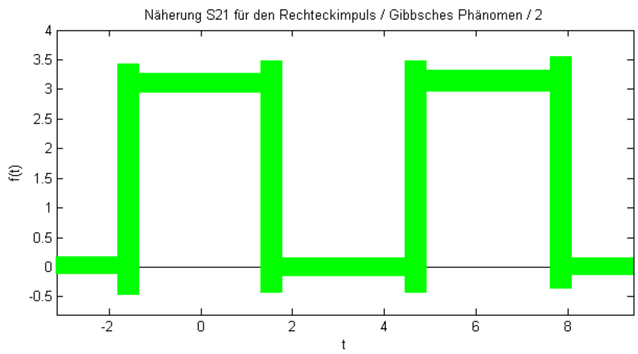


Im Bild sehen Sie jeweils den Verlauf der fortgesetzten Funktion in einer Periode der Länge T.

*) Jetzt ist es an der Zeit, noch einmal auf die Konvergenz der Fourierreihen zurückzukommen. Dabei spielt das Gibbsche Phänomen eine wichtige Rolle.

Bemerkung 1.21 *Gibbssches Phänomen:*





In den Abbildungen sehen Sie, dass bei Erhöhung der Anzahl der Summanden bei der Auswertung der Fourierreihe die Konvergenz in stetigen Bereichen der entwickelten Funktion erwartungsgemäß verbessert. Die Schwankungen der Partialsumme um die Originalfunktion werden geringer. Bei den Sprungstellen bleiben jedoch zwei „Spitzen" übrig, die sich auch bei Erhöhung der Anzahl der Summanden in der Höhe kaum verändern. Sie werden jedoch schmaler. Die Partialsummen liegen alle in dem grünen „Schlauch" des 2. Bildes. Dieses Überschwingen der Partialsummen $s_N(t)$ einer Fourierreihe in der Umgebung der Sprungstelle von $f(t)$ für hinreichend großes N wurde von J.W. Gibbs (1839-1903) beschrieben und heißt deshalb Gibbssches Phänomen. Die Abweichung von der Sprunghöhe zwischen diesen Spitzen beträgt $\approx 17.89\%$ der Sprunghöhe. Es widerspricht nicht der Konvergenz der Fourierreihe, weil diese nach dem Prinzip

$$\int_0^T |f - s_N|^2 dt \to 0 \quad für \quad N \to \infty$$

erfolgt. Diese Art der Konvergenz wird Konvergenz im quadratischen Mittel genannt. In der Interpretation kann man sich vorstellen, dass die Flächen zwischen der Partialsumme und der Originalfunktion unter- und überhalb der anzunähernden Funktion gleichbehandelt werden und insgesamt gegen Null konvergieren bei $n \to \infty$. Daraus ergibt sich auch die Mittelwertseigenschaft der Fourierreihe an der Sprungstelle.

1.3.3 Anwendungen der Fourierreihen

Z.B. in der Elektrotechnik wird oft auch mit der 1. Art der Fourierreihe gearbeitet:

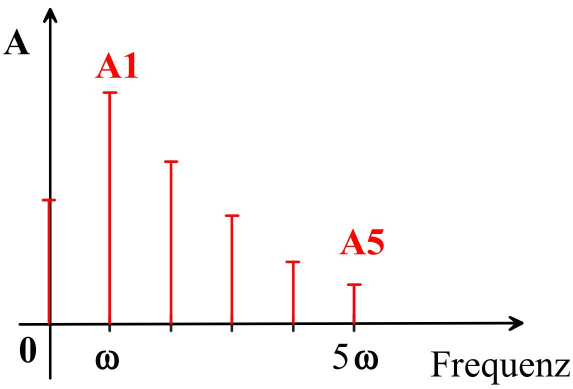
$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega k t + \varphi_k).$$

Es werden die Amplituden A_k und die Phasenverschiebung φ_k in Abhängigkeit von der Frequenz ω untersucht. Es gilt:

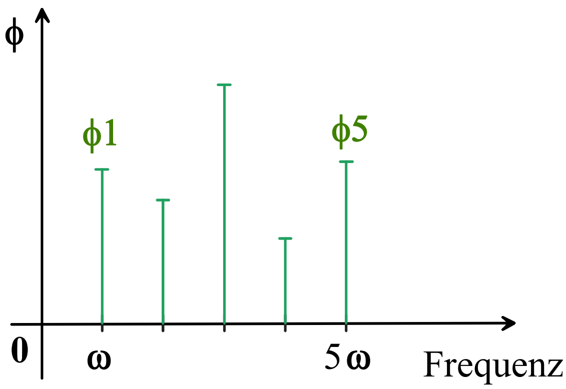
$$A_k = 2|c_k| \quad für \quad k \geq 1; \quad a_0 = 2c_0$$

$$\varphi_k = \arctan \frac{c_k + c_{-k}}{i(c_k - c_{-k})} \quad für \quad k \geq 1; \quad \nexists \varphi_0$$

A_k und φ_k werden im Amplituden- bzw. Phasen- oder Frequenzspektrum dargestellt. Amplituden- bzw. Frequenzspektren sind diskrete Spektren, weil nur bei speziellen, von einander getrennten Frequenzen Einträge vorhanden sind:



Amplitudenspektrum



Frequenzspektrum

Im Amplitudenspektrum können Sie dabei sofort erkennen, welche Frequenzen einen großen Beitrag zum analysierten Signal beitragen. Sie haben große Koeffizienten A_k.

Beispiel 1.38 *Klirrfaktor*
Der Klirrfaktor dient zur Beurteilung der Abweichung einer nichtsinusförmigen Wechselstromgröße $f(t)$ vom Verlauf einer rein sinusförmigen Wechselstromgröße, die durch die Grundwelle ($k = 1$) dargestellt wird. Z.B. betrachtet man Ein- und Ausgang eines Bauteils (Verstärker, Filter,...), an das eine rein sinusförmige Größe angelegt wird und untersucht die Abweichung der ausgehenden Größe von der Eingangsgröße. Der Klirrfaktor ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} A_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} 4|c_k|^2}{\sum_{k=1}^{\infty} 4|c_k|^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} |c_k|^2}{\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)}{\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)}} \end{aligned}$$

Im Zähler startet die Summation erst ab $k = 2$, so dass die Grundwelle ausgespart wird und damit dort nur die Abweichung von dieser erfasst wird. Der Klirrfaktor liegt deshalb zwischen 0 und 1. Ein Wert ≈ 0 beschreibt damit, dass im ausgehenden Signal nur wenig Oberwellen (Oberfrequenzen) im Verhältnis zur Grundwelle(Grundfrequenz) enthalten ist. In der Praxis hieße das z.B., dass das zugehörige Radio nur wenig „plärrt".

Bei einem Dreieckstrom $f(t) = \frac{\pi}{4}|t| \quad t \in [-\pi, \pi]$ *gilt z.B.:*

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{\pi^2}{8} - \frac{\cos t}{1^2} - \frac{\cos 3t}{3^2} - \frac{\cos 5t}{5^2} - \dots \\ k &= \sqrt{\frac{\frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots}{\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots}} \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} - 1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}}} \\ &= \sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{96} - 1}{\frac{\pi^4}{96}}} \approx 0.12 \end{aligned}$$

Weitere Anwendungen:

1. Analyse und Synthese von Signalen, Dimensionierung von Filtern
2. Berechnung linearer Stromkreise bei nicht sinusförmiger Anregung
3. Lösung von Differentialgleichungen, die Schwingungsprozesse beschreiben

Mir ist bewusst, dass dieses Kapitel aufgrund seiner Auswirkungen auf die Praxis einerseits eine große Bedeutung für Sie als zukünftige Ingenieure hat, es aber andererseits auch etwas anspruchsvoll ist. Also lassen Sie die Theorie erst einmal wirken und lesen Sie alles in 2 Tagen noch einmal. Dann wird Ihnen sicher einiges nicht mehr so neu und besser verständlich vorkommen. Stellen Sie dann Fragen zu dem was nicht klar ist.
Damit haben wir nun das Ende dieses Kapitels erreicht und Sie sollten in der Lage sein, die Seminaraufgaben Fourierreihen A-Teil zu erledigen. Nächste Woche geht es mit der Übungsvorlesung und den Aufgaben des B-Teils weiter.

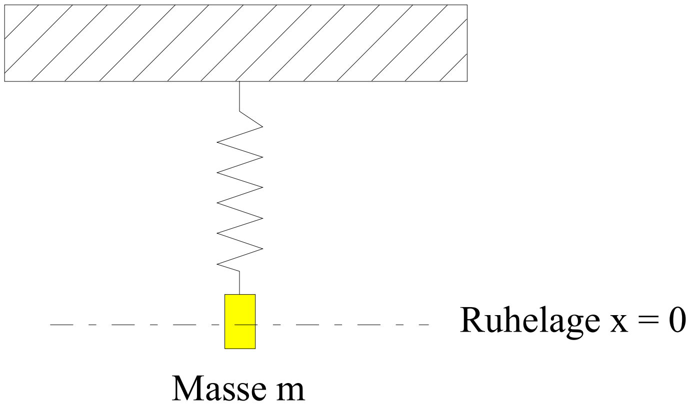
2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Sehr geehrte Studierende, mit diesem Kapitel 2 gehen wir in ein völlig anderes und für Sie neues Gebiet der Mathematik. Das hat zur Folge, dass wir uns zuerst die „neue Sprache” dieses Gebietes aneignen müssen, sprich neue Begriffe und Definitionen lernen und verstehen müssen. - Das sind die Mühen der Ebene, und die treffen alle gleichermaßen: Diejenigen, die Mathe ganz gern haben und diejenigen, die Mathe eher weniger mögen. Gewöhnliche Differentialgleichungen (gDGl) treten oft und in sehr vielen verschiedenen technischen Zusammenhängen auf. Es ist sehr wahrscheinlich, dass gDGl in anderen Modulen Ihres Fachgebietes gebraucht werden, um technische Sachverhalte zu beschreiben.

Da das Gebiet 2.1 durch die vielen Definitionen etwas trocken ist, habe ich auch im Präsenzunterricht nach einem etwas anderen Vermittlungsweg gesucht. Meine Empfehlung wäre: Holen Sie sich das Arbeitsblatt DefGewDgl.pdf vom Laufwerk r.\....\Semester 2\Arbeitsmittel.... und legen Sie es neben das Skript. Lesen Sie dann den Text im Skript und füllen Sie die Lücken im Arbeitsblatt entsprechend dem Vorlesungstext aus. Benutzen Sie zuerst das Beispiel vom Federschwinger für die einzelnen Definitionen. Dafür steht die Lösung im Text und danach die folgenden 5 Beispiele aus der Vorlesung. Versuchen Sie, diese den Definitionen zuzuordnen.

2.1 Einleitung und Grundbegriffe

Beispiel 2.1 *Betrachten Federschwinger mit der Federkonstanten* $k > 0$:



<u>Gesucht:</u>
Gleichung zur Berechnung der Auslenkung $x = x(t)$ *der konstanten Masse* m *aus der Ruhelage:*
Zum Zeitpunkt $t = 0$ *gilt:*

Anfangsauslenkung	$x(0) = x_0$
Anfangsgeschwindigkeit	$\dot{x}(0) = v_0$

Beschleunigung der Masse: $a = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

Rücktreibende Federkraft : $F = m \cdot a$ *(NEWTON)*

$$-kx = m \cdot \ddot{x}$$

$$\Longrightarrow \quad A) \quad m\ddot{x} + kx = 0$$

Wenn die Schwingung nicht im Vakuum stattfindet, kommt die Reibungskraft hinzu: $F = r\dot{x}$ *mit dem Reibungskoeffizienten* $r = const.$ *Sie wirkt der Schwingung entgegen:* $-kx - r\dot{x} = m \cdot \ddot{x}$

$$\Longrightarrow \quad B) \quad m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

Die Schwingung kann von außen durch eine aufgeprägte Kraft $F(t)$ *beeinflusst werden:*

$$\Longrightarrow \quad C) \quad m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$$

Definition 2.1 *Eine Gleichung, die als gesuchte Größe eine Funktion einer Veränderlichen und Ableitungen dieser enthält, heißt gewöhnliche Differentialgleichung.*

Das Besondere gegenüber bisherigen Gleichungen ist also, dass wir keinen Lösungspunkt mit $x-$ und $y-$Koordinate suchen, sondern eine Funktion, die die Gleichung erfüllt. Damit kann man Vorgänge beschreiben. Die Voraussetzung für eine Lösung ist dann natürlich, dass sie so oft stetig differenzierbar ist, wie es in der Gleichung verlangt wird. Das ist eine harte Forderung! In der Technik hat man als unabhängige Veränderliche oft die Zeit t, und deshalb gibt es für eine Ableitung nach t sogar eine eigene Abkürzung: einen Punkt über dem Funktionsnamen. Wie oben im Beispiel wird dann für den Weg oft die Größe $x = x(t)$ angesetzt. In der Mathematik betrachtet man hingegen meist Funktionen $y = f(x)$, d.h. x ist dann die unabhängige Veränderliche. Schauen Sie bitte also immer genau hin, was ist die abhängige und was die unabhängige Veränderliche.

Bemerkung 2.1 *Es ist wichtig, dass die gesuchte Funktion und deren Ableitungen in einer Differentialgleichung nur an <u>einer</u> Argumentstelle auftreten.*

Definition 2.2 *Die Ordnung der Differentialgleichung wird durch die höchste auftretende Ableitung der gesuchten Funktion bestimmt.*

Im Beispiel von oben ist damit die Ordnung der Differentialgleichung 2.

Definition 2.3 *Enthält die Differentialgleichung additive Terme ohne die gesuchte Funktion und deren Ableitungen, so heißt die Differentialgleichung inhomogen, anderenfalls homogen.*

Im Beispiel von oben ist folglich die Differentialgleichung C) inhomogen, die Differentialgleichungen A) und B) sind homogen. Unterstreichen Sie den additiven Term, der über die Inhomogenität entscheidet.

Definition 2.4 *Sind in einer Differentialgleichung die gesuchte Funktion und ihre Ableitungen nur linear miteinander verknüpft, so heißt die Differentialgleichung linear, anderenfalls nichtlinear.*

Im Beispiel von oben sind alle 3 Differentialgleichungen linear, da $x, \dot{x}$ und $\ddot{x}$ durch eine Linearkombination miteinander verbunden sind. Nichtlinearitäten in der unabhängigen Veränderlichen werden dabei nicht beachtet. Wäre also in C) die Funktion auf der rechten Seite z.B. $F(t) = sin(t)$, dann ist diese zwar nichtlinear, aber die gDGl insgesamt nicht:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = \sin(t)$$

Dasselbe würde passieren, wenn in C) statt dem Faktor m der Faktor t^2 stehen würde:

$$t^2\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$$

C) würde aber beispielsweise mit dem Faktor x an der Stelle von m zu einer nichtlinearen gDGl:

$$x \cdot \ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t),$$

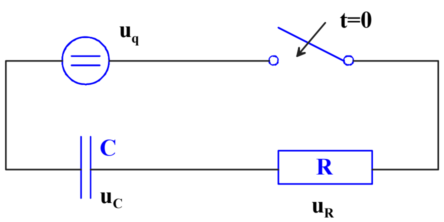
denn ein Produkt ist eine nichtlineare Operation und diese tritt hier zwischen der gesuchten Funktion und deren 2. Ableitung auf.

Definition 2.5 *Treten in einer Differentialgleichung die gesuchte Funktion und ihre Ableitungen ausschließlich als Argumente in Potenzfunktionen auf, so bestimmt der höchste Exponent dieser Potenzfunktionen den Grad der Differentialgleichung.*

Im Beispiel von oben ist der Grad aller 3 Differentialgleichungen 1.

Gewöhnliche Differentialgleichungen sind häufig in Naturwissenschaft und Technik anzutreffen:

Beispiel 2.2 *Beschreibung von elektrischen Stromkreisen:*



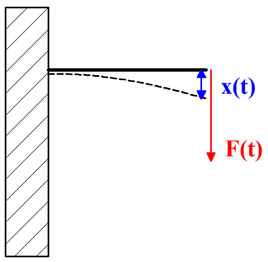
$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = u_q, \text{ Gesucht ist die Spannung } u_C \text{ am Kondensator.}$$

Beispiel 2.3 *Beschreibung von organischem Wachstum und Zerfall:*

$$-\frac{dx}{dt} = kx$$

mit x : *Masse des zerfallenden (radioaktiven) Stoffes und* k : *Zerfallskonstante,* $k > 0$

Beispiel 2.4 *Beschreibung eines einseitig eingespannten Stabes:*



$$x^{(4)} + \sqrt{\frac{F}{\alpha}}\ddot{x} = 0,$$

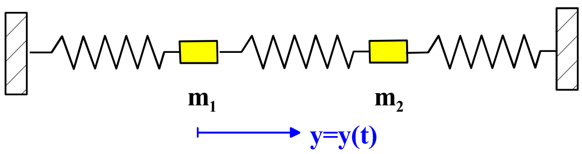
wobei α *ein Materialparameter ist. Gesucht ist die Auslenkung* $x(t)$ *des Stabes.*

Beispiel 2.5 *Beschreibung eines mathematischen Pendels:*

$$mg\sin\phi(t) = ml\ddot{\phi}(t)$$

mit ϕ : *Ausschlagswinkel,* g : *Erdbeschleunigung,* m : *Masse, Gesucht ist der Winkel* $\phi(t)$. *(Die gDGl ist nichtlinear, wegen des Terms* $\sin\phi(t)$.*)*

Beispiel 2.6 *Beschreibung von gekoppelten Federschwingern:*



$$ay^{(4)} + b\ddot{y} = cy, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Gesucht ist die Auslenkung $y(t)$ *der Masse* m_1.

Im Folgenden wird Beispiel 2.2 zur Lösung ausgewählt. Da wir als Umkehrung der Differentiation die unbestimmte Integration kennengelernt haben, stehen die Chancen gut, eine Lösung zu finden. Allerdings bekommen wir eine frei wählbare Konstante durch diese unbestimmte Integration in die Lösung hinein, und es entsteht die Frage: Reicht die oben angegebene Gleichung aus, um u_c eindeutig zu bestimmen?

$$RC\frac{du_c}{dt} = u_q - u_c \qquad Voraussetzung: u_q - u_c \neq 0$$

Nun trennen wir die Variablen und die Differentiale;
alle Größen mit u_c nach links, alle mit t nach rechts

$$\begin{aligned}
\frac{du_c}{u_q - u_c} &= \frac{dt}{RC} && Substitution: \ z = u_q - u_c, \ dz = -du_c \\
\int \frac{-dz}{z} &= \int \frac{1}{RC}dt && Multiplikation\ mit\ (-1)\ und\ Integration \\
\ln|z| &= -\frac{1}{RC}t + \widetilde{K}
\end{aligned}$$

Nun müssen wir noch die gesuchte Funktion z aus dem Logarithmus und dem Betrag durch Anwendung der Umkehroperationen „befreien” sowie die Rücksubstitution vornehmen. Zuerst wird entlogarithmiert, d.h. beide Seiten der Gleichung werden zum Exponenten einer e-Funktion:

$$e^{\ln|z|} = |z| = |u_q - u_c| \overset{\text{rechte Seite}}{=} e^{-\frac{t}{RC}+\widetilde{K}} = e^{-\frac{t}{RC}} \cdot e^{\widetilde{K}}$$

Wenn wir nun den Betrag auflösen erhalten wir

$$\pm(u_q - u_c) = e^{-\frac{t}{RC}} \cdot e^{\widetilde{K}}$$

Wir nehmen die Vorzeichen „±" auf die rechte Seite und vereinigen s
ie mit dem Faktor $e^{\widetilde{K}}$. Da $e^{\widetilde{K}} > 0$ gilt, erreichen wir mit $\pm e^{\widetilde{K}}$ alle reellen Zahlen außer der Null und setzen nun

$$K = \begin{cases} e^{\widetilde{K}} & \mathit{f\ddot{u}r} \quad u_q - u_c > 0 \\ -e^{\widetilde{K}} & \mathit{f\ddot{u}r} \quad u_q - u_c < 0 \end{cases}$$

Damit ergibt sich:

$$u_q - u_c = \pm e^{\widetilde{K}} e^{-\frac{t}{RC}} = K e^{-\frac{t}{RC}}; \quad K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Durch Umstellen nach u_C (Multiplikation mit (-1) und anschließender Addition von u_q) erhalten wir

$$u_c = u_q - K e^{-\frac{t}{RC}} \quad K \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad (*)$$

Am Anfang der Rechnung mussten wir fordern $u_q - u_c \neq 0$, damit wir durch
$u_q - u_c$ teilen durften. Diesen Fall müssen wir jetzt noch einmal genauer anschauen: Wenn gilt $u_q - u_c = 0$, dann erhalten wir sofort $u_c = u_q = const.$ und damit $\frac{du_c}{dt} = 0$. In diesem Fall wird folglich die Differentialgleichung $RC\frac{du_c}{dt} = u_q - u_c$ auf beiden Seiten null und ist damit erfüllt. Also gehört $u_q = u_c = const.$ auch mit in die Lösungsmenge. Wenn wir nun in der Lösung $(*)$ $K = 0$ zulassen, wird die Lösung $u_c = u_q$ erreicht. Damit ergibt sich insgesamt die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

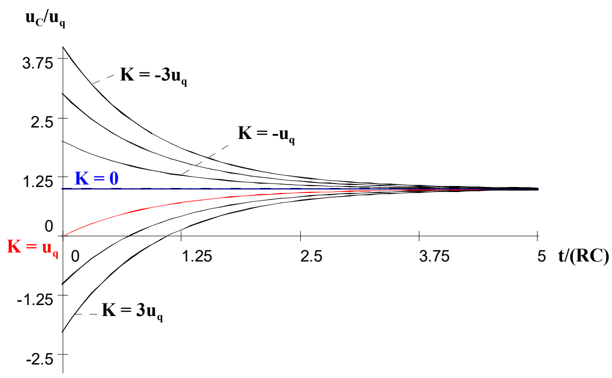
$$u_c = u_q - K e^{-\frac{t}{RC}}; \quad K \in \mathbb{R}.$$

Diese Lösung ist aber nicht eindeutig bestimmt. Durch die frei wählbare Konstante K gibt es unendlich viele Funktionen, die die Ausgangsgleichung erfüllen. Zur Auswahl einer einzigen sind Zusatzinformationen nötig, z.B. über den Ausgangszustand bei
$t = 0$:

$$\begin{aligned} u_c(0) &= u_c(t < 0) = 0 \quad \curvearrowright \\ u_c(0) &= 0 = u_q - K e^0 \quad \Longrightarrow \quad K = u_q \\ u_c &= u_q(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \end{aligned}$$

Jetzt haben wir (endlich!) eine eindeutige Lösung erhalten. Diese Lösungsmethode heißt Trennung der Veränderlichen. Später werden wir diesen langen Weg automatisieren, so dass wir nicht jedes Mal alle einzelnen Schritte ausführen müssen.
Zeichnerisch passiert dabei Folgendes: Die allgemeine Lösung wird im Bild durch eine

Kurvenschar dargestellt, entsprechend der unterschiedlichen Wahl von K. Diese Kurven schneiden sich nicht, d.h. durch jeden Punkt der Ebene verläuft genau eine dieser Kurven:



Durch die Anfangsbedingung $u_c(0) = u_c(t < 0) = 0$ erfolgt die Auswahl der roten Kurve mit $K = u_q$ aus der Kurvenschar.
Diesen Weg können wir nun in der folgenden Definition zusammenfassen:

Definition 2.6 *Die Lösung (Das Integral) einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung ist jede, in ihrem Definitionsgebiet n-mal stetig differenzierbare Funktion, die mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung erfüllt.*

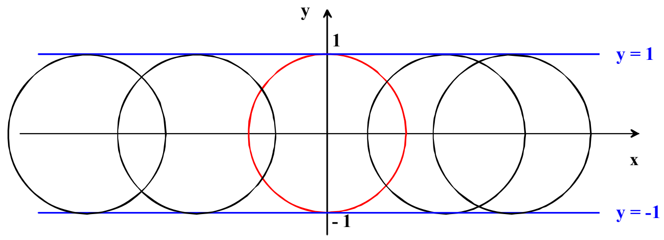
Es werden drei Lösungstypen unterschieden:

1. Die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält n unabhängig wählbare Konstanten $C_1, C_2, ...C_n$ (Parameter):
   $x = x(t, C_1, C_2, ...C_n)$ bzw. $y = y(x, C_1, C_2, ...C_n)$.
   Die grafische Interpretation ist eine n-parametrische Kurvenschar.

2. Eine spezielle (partikuläre) Lösung erhält man aus der allgemeinen Lösung durch spezielle Wahl der Konstanten $C_1, C_2, ...C_n$, z.B. um Zusatzbedingungen zu erfüllen. Zusatzbedingungen an einer einzigen Stelle $t_0 \in D_f$: $x(t_0),\ \dot{x}(t_0), ...x^{(n-1)}(t_0)$ bzw. $y(x_0),\ y'(x_0), ...y^{(n-1)}(x_0)$ heißen Anfangsbedingungen oder Anfangswerte, die Aufgabe Anfangswertaufgabe (AWA). Zusatzbedingungen an mehreren Stellen von D_f nennt man Randbedingungen oder Randwerte, die Aufgabe Randwertaufgabe (RWA).

3. Als singulär bezeichnet man Lösungen, die man nicht durch eine spezielle Konstantenwahl aus der allgemeinen Lösung erhalten kann.

Beispiel 2.7 *Betrachte die Differentialgleichung* $y^2((y')^2+1)-1=0$. *Deren allgemeine Lösung lautet:* $(x-C)^2+y^2=1$. *(Nachweis s. unten)*



Die allgemeine Lösung ist eine Schar von Kreisen mit dem Radius $r=1$ *und den Mittelpunkten* $M=(C;0)^T$:
Z.B. ist die spezielle Lösung mit $C=0$ *der Einheitskreis. Die Einhüllenden der Kurvenschar:* $y=\pm 1$ *sind ebenfalls Lösungen der Differentialgleichung: Probe durch Einsetzen*

$$y^2((y')^2+1)-1=1(0^2+1)-1=0$$

Diese können aber nicht durch spezielle Konstantenwahl aus der allgemeinen Lösung erhalten werden und sind deshalb singuläre Lösungen.
Nachweis der Lösung:*
Fakultativer Abschnitt:
Ableitung der allgemeinen Lösung:

$$\begin{aligned} 2(x-C)+2yy' &= 0 \quad \curvearrowright \\ y' &= -\frac{x-C}{y} \end{aligned}$$

Zusammen mit der nach y^2 *umgestellten allgemeinen Lösung* $y^2=1-(x-C)^2$ *ergibt sich nach dem Einsetzen in die Differentialgleichung:*

$$\begin{aligned} y^2((y')^2+1)-1 &= [1-(x-C)^2]((-\frac{x-C}{y})^2+1)-1 \\ &= [1-(x-C)^2](\frac{(x-C)^2}{y^2}+1)-1 \\ &= [1-(x-C)^2](\frac{(x-C)^2}{1-(x-C)^2}+1)-1 \\ &= (x-C)^2+1-(x-C)^2-1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ende des fakultativen Abschnittes
Ehe wir nun zu einem speziellen Typ von gDGl übergehen, lösen Sie bitte die Aufgabe auf dem Arbeitsblatt, um zu kontrollieren, ob Sie die Definitionen verstanden haben.

2.2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

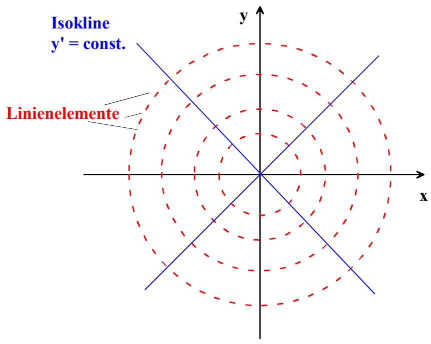
2.2.1 Richtungsfeld* Fakultativer Abschnitt:

Die allgemeine Form einer Differentialgleichung 1. Ordnung lautet:

$$\begin{array}{rl} \text{explizite Form:} & y' = f(x,y) \\ \text{implizite Form:} & F(x,y,y') = 0. \end{array}$$

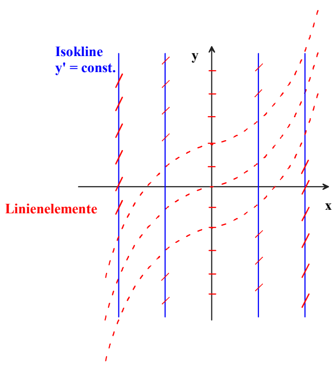
Geometrische Veranschaulichung:
Eine explizite Differentialgleichung ordnet jedem Punkt des Definitionsgebietes von $f(x,y)$ einen Wert der Ableitung y' der gesuchten Funktion zu. Diese Ableitung gibt die Richtung der Tangente an die Lösungskurve im Punkt $P = (x,y)^T$ an. Das Zahlentripel (x,y,y') nennt man Linienelement. Die Menge aller Linienelemente ist das Richtungsfeld der Differentialgleichung. Linien, die Punkte gleichen Anstieges verbinden, heißen Isoklinen. D.h. auf ihnen gilt $y' = c = const.$

Beispiel 2.8 $y' = -\dfrac{x}{y}$;



Die allgemeine Lösung ist eine Schar konzentrischer Kreise um den Ursprung.

Beispiel 2.9 $y' = x^2$;



Die allgemeine Lösung ist eine Schar von kubischen Parabeln.

Durch die Linienelemente wird der Anstieg der Lösungskurve angegeben. Geometrisch bedeutet damit die Lösung der Differentialgleichung das Finden von Kurvenscharen, deren Tangentenrichtung mit dem jeweiligen Linienelement zusammenfällt.
Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung ist eine einparametrische Kurvenschar $y = y(x, C)$. Folglich gibt es unendlich viele Lösungen $y = y(x)$ der Differentialgleichung 1. Ordnung $y' = f(x, y)$.

Satz 2.1 *Sei f(x,y) stetig in D_f. Dann geht durch jeden Punkt $P \in D_f$ mindestens eine Lösungskurve $y = y(x)$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$.*

Satz 2.2 *Sei f(x,y) stetig in D_f. Es existiere $\frac{\partial f}{\partial y}$ in D_f und sei dort stetig. Dann geht durch jeden Punkt $P \in D_f$ genau eine Lösungskurve $y = y(x)$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$.*

Folgerung 2.1 *Unter den Bedingungen von Satz 2.2 hat die AWA $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ immer genau eine Lösung. Mit Hilfe des Anfangswertes $y(x_0) = y_0$ wird aus der Kurvenschar der allgemeinen Lösung eine spezielle Lösung, die durch den Punkt $P_0 = (x_0; y_0)^T$ verläuft, ausgewählt.*
Ende des fakultativen Abschnittes

2.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Die allgemeine Form linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung für $y = y(x)$ lautet:

$$y' + a(x)y = f(x); \qquad (+)$$

Dabei heißt $a(x)$ Koeffizientenfunktion und $f(x)$ rechte Seite oder Störfunktion.
Gilt $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in D_y$, so liegt eine inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung vor, anderenfalls eine homogene.

Satz 2.3 *Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $(+)$ ist die Summe von einer partikulären (speziellen) Lösung $y_p(x)$ der inhomogenen Differentialgleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung $y_h(x)$:*

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

Wir werden nun beide Summanden einzeln nacheinander bestimmen.

2.3.1 Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

Die homogene Differentialgleichung zu (+) lautet: $y' + a(x)y = 0$

d.h. man lässt im 1. Lösungsschritt die rechte Seite weg.
Den Weg zu zur allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung werde ich als fakultativ kennzeichnen. Er entspricht dem Vorgehen im ersten gerechneten Beispiel;
Methode: Trennung der Veränderlichen*)
Fakultativer Abschnitt:

$$\begin{aligned} y' + a(x)y &= 0 && (++) \\ \frac{dy}{dx} &= -a(x)y && y \neq 0 \\ \int \frac{dy}{y} &= \int -a(x)dx : \text{allgemeine Lösung von } (++) \end{aligned}$$

Zusätzlich muss geprüft werden, ob $y = 0$ eine Lösung von (++) ist. Dann gilt aber $y' = 0$ und nach Einsetzen in die Differentialgleichung folgt:

$$y' + a(x)y = 0 + a(x) \cdot 0 = 0$$

Damit muss in der allgemeinen Lösung von (++) $y = 0$ mit enthalten sein:

$$\begin{aligned} \ln|y| &= \int -a(x)dx + C \\ |y| &= e^{-\int a(x)dx+C} = e^{-\int a(x)dx} \cdot e^C \\ &= De^{-\int a(x)dx} && D > 0 \\ y &= \begin{cases} -De^{-\int a(x)dx} & f\ddot{u}r\ y < 0 \\ +De^{-\int a(x)dx} & f\ddot{u}r\ y > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Zusammen mit der Lösung $y = 0$ ergibt sich die:
Ende des fakultativen Abschnittes
allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichung $y' + a(x)y = 0$

$$\mathbf{y}_h = \mathbf{D}e^{-\int a(x)dx} \qquad \mathbf{D} \in \mathbb{R}$$

Zur Lösung ist es möglich, entweder diese Formel zu benutzen (kurzer Weg) oder die Trennung der Veränderlichen jedes Mal erneut auszuführen (langer Weg). Ich empfehle Ihnen den kurzen Weg. Vergleichen Sie selbst:

Beispiel 2.10 $y' - y = x \qquad \Longrightarrow \qquad$ *homogeneGleichung:* $y' - y = 0$
Störfunktion: $f(x) = x$
Koeffizientenfunktion: $a(x) = -1$

kurzer Weg:

$$y_h = De^{-\int -1dx} = De^x \qquad D \in \mathbb{R}$$

langer Weg:*
Fakultativer Abschnitt:

$$\begin{aligned} y' - y &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= y \qquad\qquad y \neq 0;\ y = 0 \text{ ist aber Lösung} \\ \int \frac{dy}{y} &= \int dx \\ \ln|y| &= x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |y| &= e^{x+C} = e^x \cdot e^C \\ &= De^x \qquad\qquad D \geq 0 \end{aligned}$$

$$y = \begin{cases} -De^x & y \geq 0 \\ +De^x & y < 0 \end{cases}$$

$$y_h = De^x \qquad\qquad D \in \mathbb{R}$$

Ende des fakultativen Abschnittes

2.3.2 Ermittlung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Auch hier werden wir allgemein eine Lösungsformel herleiten, die sofort benutzt werden kann (kurzer Weg). Alternativ kann natürlich auch jedes Mal erneut die Lösungsmethode angewendet werden (langer Weg*).
Wir suchen nun eine partikuläre Lösung von: $y' + a(x)y = f(x)$

Methode: Variation der Konstanten nach Lagrange

Ausgangspunkt ist die Lösung der homogenen Gleichung:

$$\mathbf{y}_h = \mathbf{D}\mathbf{e}^{-\int a(x)dx} = \mathbf{D}\cdot\widetilde{y}(x) \qquad\qquad \mathbf{D} \in \mathbb{R}$$

$\widetilde{y}(x)$ kann damit aus der Lösung des homogenen Problems abgelesen werden. Für die partikuläre Lösung des inhomogenen Problems stellen wir nun folgenden Ansatz auf:

$$\mathbf{y}_p\!= \mathbf{D}(\mathbf{x})\cdot\widetilde{y}(x)$$

D.h. wir setzen die gleiche Lösungsstruktur wie bei der Lösung der homogenen Gleichung an, lassen aber die Konstante in Abhängigkeit von der unabhängigen Variablen variieren. Sie wird damit zu einer Funktion von x. Nach Differentiation ergibt sich:

$$y_p' = D'\widetilde{y} + D\widetilde{y}'$$

$\widetilde{y}$ ist eine spezielle Lösung der homogenen Differentialgleichung im Falle von $D = 1$ und erfüllt damit diese auch, d.h.: $\widetilde{y}' = -a(x)\widetilde{y}$. Einsetzen in die obige Gleichung liefert:

$$y_p' = D'\widetilde{y} + D(-a(x)\widetilde{y})$$

In der inhomogenen Differentialgleichung ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}
y_p' \; + \; a(x)y_p \;&=\; D'\widetilde{y} + \underbrace{D(-a(x)\widetilde{y}) + \; a(x)D\widetilde{y}}_{\text{Das hebt sich auf.}} = f(x) \\
&\curvearrowright \\
D'\widetilde{y} \;&=\; f(x) \\
\frac{dD}{dx}\widetilde{y} \;&=\; f(x) \\
\int dD \;&=\; \int \frac{f(x)}{\widetilde{y}}dx \\
D(x) \;&=\; \int \frac{f(x)}{\widetilde{y}}dx(+E)
\end{aligned}$$

Da nur eine partikuläre Lösung gesucht wird, wählt man stets $E = 0$. Anschließend muss $D(x)$ in den Ansatz

$$\mathbf{y}_p\!= \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}(\mathbf{x})\cdot\widetilde{y}(x)$$

eingesetzt werden, um die partikuläre Lösung y_p zu erhalten.

Beispiel 2.11 *Weiterführung des obigen Beispiels:* $y' - y = x$ *mit der allgemeinen Lösung* $y_h = De^x$ *der homogenen Differentialgleichung* $y' - y = 0$ *und der rechten Seite* $f(x) = x$*:*
$y_h = De^x \Longrightarrow$ *Ansatz:* $y_p = D\,(x)\,e^x = D\,(x)\,\widetilde{y} \quad \curvearrowright \widetilde{y} = e^x$

kurzer Weg:

$$\begin{aligned} D(x) &= \int \frac{f(x)}{\widetilde{y}} dx = \int \frac{x}{e^x} dx \\ &= \int x e^{-x} dx \qquad (TR \text{ oder Tabelle}) \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} \end{aligned}$$

langer Weg:*
Fakultativer Abschnitt:

$$\begin{aligned} y_p' &= D'e^x + De^x \\ y_p' - y_p &= D'e^x + De^x - De^x = x \\ D'e^x &= x \\ dD &= xe^{-x}dx \\ D &= \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} \end{aligned}$$

Ende des fakultativen Abschnittes
Damit ergibt sich für die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y_p &= D(x)\, e^x = (-xe^{-x} - e^{-x})e^x \\ &= -x - 1 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung lautet somit:

$$y = y_p + y_h = -x - 1 + De^x; \qquad D \in \mathbb{R}$$

Auch hier lautet meine Empfehlung: kurzer Weg. Schauen wir uns nun noch 3 weitere Beispiele an:

Beispiel 2.12 $(x^2+2)\, y' - 2xy = 3(x^2+2)^2, \qquad y(-1) = 6$
Herstellen der allgemeinen Form der DGl 1. Ordnung: $y' + a(x)y = f(x)$ *mittels Division durch* $(x^2+2) \neq 0$

$$\begin{aligned} y' - \frac{2x}{x^2+2} y &= 3(x^2+2) \qquad \curvearrowright \\ a(x) &= -\frac{2x}{x^2+2}; \qquad f(x) = 3(x^2+2) \end{aligned}$$

1. Schritt: Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_h &= \mathbf{D}e^{-\int a(x)dx} \qquad \text{mit} \\ -\int a(x)dx &= -\int -\frac{2x}{x^2+2} dx = \ln\left(x^2+2\right) \qquad (\text{ohne Integrationskonstante}) \\ y_h &= De^{\ln\left(x^2+2\right)} = D\left(x^2+2\right) \end{aligned}$$

2. Schritt: Lösung der inhomogenen Differentialgleichung :

$$\begin{aligned}
y_p &= D(x)\left(x^2+2\right) \qquad \curvearrowright \widetilde{y} = \left(x^2+2\right) \\
D(x) &= \int \frac{f(x)}{\widetilde{y}} dx = \int \frac{3(x^2+2)}{(x^2+2)} dx \\
&= \int 3dx = 3x \qquad (\textit{ohne Integrationskonstante}) \\
y_p &= D(x)\left(x^2+2\right) = 3x(x^2+2)
\end{aligned}$$

Für die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ergibt sich in der Addition der beiden Teillösungen:

$$y = y_p + y_h = 3x(x^2+2) + D\left(x^2+2\right); \qquad D \in \mathbb{R}$$

3. Schritt: Lösung des AWP durch Einsetzen des AW in die Lösung:

$$\begin{aligned}
y_{AWP}(-1) &= \left[3x(x^2+2) + D\left(x^2+2\right)\right]_{x=-1} \\
&= -3(1+2) + D(1+2) = 6 \qquad (= AW) \\
3D &= 6 + 9 = 15 \\
D &= 5 \\
y_{AWP} &= 3x(x^2+2) + 5\left(x^2+2\right) = (3x+5)(x^2+2) \\
&= 3x^3 + 6x + 5x^2 + 10
\end{aligned}$$

Beispiel 2.13

$$y\prime + x^2 y = x^2 e^{-\frac{x^3}{3}}$$

Aus der Differentialgleichung können wir sofort ablesen:

$$a(x) = x^2; \qquad f(x) = x^2 e^{-\frac{x^3}{3}}$$

1. Schritt: allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_h &= \mathbf{D}\mathbf{e}^{-\int a(x)dx} \qquad \textit{mit} \\
-\int a(x)dx &= -\int x^2 dx = -\frac{x^3}{3} \qquad (\textit{ohne Integrationskonstante}) \\
y_h &= De^{-\frac{1}{3}x^3}
\end{aligned}$$

2. Schritt: partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

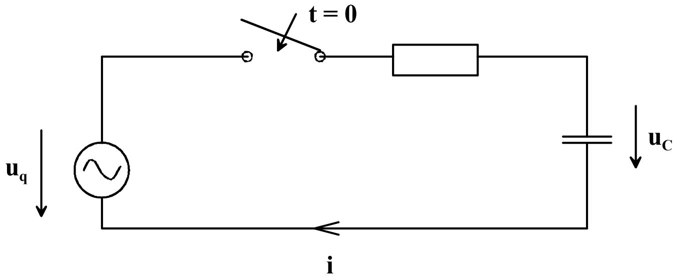
$$\begin{aligned}
y_p &= D(x)e^{-\frac{1}{3}x^3} \qquad \curvearrowright \widetilde{y} = e^{-\frac{1}{3}x^3} \\
D(x) &= \int \frac{f(x)}{\widetilde{y}}dx = \int \frac{x^2 e^{-\frac{x^3}{3}}}{e^{-\frac{1}{3}x^3}}dx \\
&= \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \qquad (\textit{ohne Integrationskonstante}) \\
y_p &= D(x)e^{-\frac{1}{3}x^3} = \frac{1}{3}x^3 e^{-\frac{1}{3}x^3}
\end{aligned}$$

3. Schritt: Für die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ergibt sich damit insgesamt:

$$\begin{aligned}
y &= y_p + y_h = \frac{1}{3}x^3 e^{-\frac{1}{3}x^3} + De^{-\frac{1}{3}x^3} \\
y &= (\frac{1}{3}x^3 + D)e^{-\frac{1}{3}x^3}; \qquad D \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Lösen Sie nun die Aufgaben 1 bis 3 des A-Teils der Übung Differentialgleichungen.

Beispiel 2.14 **)* Fakultativer Abschnitt:
Einschalten eines RC-Gliedes an eine Wechselspannung



$u_q = U \sin \omega t; \qquad u_c(t \leq 0) = 0$
Nach Kirchhoff gilt:

$$-u_q + iR + u_c = 0$$

Mit $i_c = C\dfrac{du_c}{dt}$ *und* $\tau = CR$ *folgt dann:*

$$\begin{aligned} -u_q + C\frac{du_c}{dt}R + u_c &= 0 \\ RC\frac{du_c}{dt} + u_c &= u_q \\ \tau\frac{du_c}{dt} + u_c &= U\sin\omega t \\ \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau}u_c &= \frac{U\sin\omega t}{\tau} \end{aligned}$$

Das ist eine lineare inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung mit

$$a(t) = \frac{1}{\tau} \text{ und } f(t) = \frac{U\sin\omega t}{\tau}.$$

1. Schritt: Lösung der homogenen Differentialgleichung: $\dfrac{du_c}{dt} + \dfrac{1}{\tau}u_c = 0$

$$u_{ch} = De^{-\int a(t)dt} = De^{-\int \frac{1}{\tau}dt} = De^{-\frac{1}{\tau}t}.$$

2. Schritt: Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$u_{cp} = D\,(t)\,e^{-\frac{1}{\tau}t} = D\,(t)\,\widetilde{u_c} \qquad \curvearrowright \widetilde{y} = e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

:

$$\begin{aligned} D(t) &= \int \frac{f(t)}{\widetilde{u_C}}dt = \int \frac{\frac{U\sin\omega t}{\tau}}{e^{-\frac{1}{\tau}t}}dt \\ &= \int \frac{U\sin\omega t}{\tau}e^{\frac{1}{\tau}t}dt \quad (2x \text{ partiell}, \text{Göhler}) \\ &= \frac{U}{\tau}\frac{e^{\frac{1}{\tau}t}}{\frac{1}{\tau^2}+\omega^2}(\frac{1}{\tau}\sin\omega t - \omega\cos\omega t) \\ &= \frac{U}{\tau}\frac{\tau^2 e^{\frac{1}{\tau}t}}{1+\tau^2\omega^2}(\frac{1}{\tau}\sin\omega t - \omega\cos\omega t) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} u_{cp} &= D\,(t)\,e^{-\frac{1}{\tau}t} = \frac{U\tau e^{\frac{1}{\tau}t}}{1+\tau^2\omega^2}(\frac{1}{\tau}\sin\omega t - \omega\cos\omega t)e^{-\frac{1}{\tau}t} \\ &= \frac{U\tau}{1+\tau^2\omega^2}(\frac{1}{\tau}\sin\omega t - \omega\cos\omega t) \end{aligned}$$

3. Schritt: Gesamtlösung:

$$\begin{aligned} u_c &= u_{cp} + u_{ch} \\ &= \frac{U\tau}{1+\tau^2\omega^2}(\frac{1}{\tau}\sin\omega t - \omega\cos\omega t) + De^{-\frac{1}{\tau}t} \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $u_c(t=0)=0$ findet man weiter:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{U\tau}{1+\tau^2\omega^2}(0-\omega) + D \\ D &= \frac{U\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2} \\ u_c &= \frac{U}{1+\tau^2\omega^2}(\sin\omega t - \omega\tau\cos\omega t + \omega\tau e^{-\frac{1}{\tau}t}) \\ &= \frac{U}{1+\tau^2\omega^2}(\omega\tau e^{-\frac{1}{\tau}t} + A\sin(\omega\tau - \phi)) \end{aligned}$$

Nebenrechnung: $sin\omega\tau - \omega\tau\cos\omega t = A\sin(\omega\tau-\phi) = A\sin\omega\tau\cos\phi - A\cos\omega\tau\sin\phi$

$$\Longrightarrow \quad A\sin\phi = \omega\tau; \quad A\cos\phi = 1;$$

$$\Longrightarrow \quad A^2\cos^2\phi + A^2\sin^2\phi = A^2 = 1+\omega^2\tau^2 \quad \Longrightarrow \quad A = \sqrt{1+\omega^2\tau^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \tan\phi = \frac{A\sin\phi}{A\cos\phi} = \omega\tau; \qquad \sin\phi = \frac{\omega\tau}{A} = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

Damit geht u_c über in

$$\begin{aligned} u_c &= \frac{U}{1+\tau^2\omega^2}(\omega\tau e^{-\frac{1}{\tau}t} + \sqrt{1+\omega^2\tau^2}\sin(\omega\tau-\phi)) \\ &= \frac{U}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}(\underbrace{\frac{\omega\tau}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}}_{\sin\phi} e^{-\frac{1}{\tau}t} + \underbrace{\frac{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}}_{k\ddot{u}rzen}\sin(\omega\tau-\phi)) \\ &= \frac{U}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}(\sin\phi e^{-\frac{1}{\tau}t} + \sin(\omega\tau-\phi)) \\ &= \textit{flüchtiger Anteil} + \textit{stationärer Anteil} \end{aligned}$$

Der flüchtige Anteil entspricht der Lösung des homogenen Problems unter Einbeziehung der Anfangsbedingung. Er konvergiert mit $t\to\infty$ gegen Null. Der flüchtige Anteil entspringt dem schwingenden System.
Der stationäre Anteil entspricht der partikulären Lösung des inhomogenen Problems und widerspiegelt den äußeren Einfluss auf das System. Er setzt sich für $t\to\infty$ durch.

Ende des fakultativen Abschnittes

2.4 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der Lösung von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Wie Sie in der Einführungsvorlesung gesehen haben, besitzen sie in der Technik eine große Bedeutung. Schauen Sie bitte noch einmal in die Beispiele 2.1, 2.2, 2.3 und 2.6. Alle diese Differentialgleichungen haben vor der gesuchten Funktion oder deren Ableitungen Koeffizienten stehen, die meist aus Material-, Vorgangs- oder Bauteilparametern bestehen, die i.Allg. als konstant angesehen werden können.

Die allgemeine Form der einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lautet:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f \qquad \text{mit } a_i \in \mathbb{R}.$$

Entsprechend unseren Klassifizierungspunkten ist diese Differentialgleichung von n-ter Ordnung, inhomogen, linear und von 1. Grad. Wir wissen bereits, dass sich die Lösung einer linearen Differentialgleichung additiv aus der allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung und aus einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zusammensetzt:

$$y_{ges}(x) = y_p(x) + y_h(x).$$

Dieses Prinzip findet man immer bei linearen Problemen, nicht nur bei linearen Differentialgleichungen. Denken Sie beispielsweise einmal an die Lösung eines linearen Gleichungssystems. Dort haben Sie folgendes Ergebnis kennengelernt:

Wenn das lineare Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ lösbar ist, r der Rang von A, und n die Anzahl der Unbekannten ist, dann ist im Fall $r = n$ das LGlS $A\underline{x} = \underline{b}$ eindeutig lösbar. Bei $r < n$ enthält die Lösung $(n - r)$ Parameter. Sie ist ein $(n - r)$-parametrischer, verschobener Unterraum der Form:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ -- \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\widetilde{b}} \\ \\ -- \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + t_{r+1} \begin{pmatrix} \underline{\widetilde{S}}_{r+1} \\ \\ -- \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \; ... \; + t_n \begin{pmatrix} \underline{\widetilde{S}}_n \\ \\ -- \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

spezielle Lösung des inhomogenen Problems + allgemeine Lösung des homogenen Problems (Unterraum)

Wir wollen nun analog zur Lösung einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung vorgehen und zuerst die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung suchen, d.h., wenn die Gleichung ursprünglich inhomogen war, lassen wir im 1. Schritt den Inhomogenitätsterm weg, bzw. setzen ihn vorübergehend Null.

2.4.1 Die homogene Gleichung

Allgemeine Form:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = 0$$

Für diese Sorte von Differentialgleichungen kann stets eine Lösung angegeben werden, was bei Differentialgleichungen durchaus nicht selbstverstänlich ist.
Wir benutzen den Lösungsansatz $y = e^{\lambda x}$ der uns zu einem sogenannten Fundamentalsystem aus n linear unabhängigen Lösungen führt. Beim Differenzieren des Lösungsansatz $y = e^{\lambda x}$ erhalten $y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, ..., y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$. Anschließend setzen wir alles in die Differentialgleichung ein:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + ... + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0$$

und erhalten nach Division durch $e^{\lambda x}$ die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0 \qquad (+)$$

Die Division ist immer möglich wegen $e^{\lambda x} \neq 0$. Das Ergebnis ist eine Polynomgleichung, die der Differentialgleichung in dem Sinn entspricht, dass an Stelle einer $k-$ten Ableitung in der Differentialgleichung die $k-$te Potenz von λ in der charakteristischen Gleichung steht. Man kann also die charakteristische Gleichung ohne Rechnung sofort hinschreiben. Allerdings sollten Sie den Ansatz mit vermerken, damit klar ist, was mit den verschiedenen $\lambda-$Werten zu passieren hat, die man aus der Polynomgleichung berechnen kann.
Dieses Polynom n-ten Grades (+) hat im Bereich $\mathbb{C}$ nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau n Lösungen. Mit diesen Lösungen $\lambda_i,\ i = 1, 2, ..., n$ stellt man das Fundamentalsystem der Lösungen wie folgt auf:

1. Jeder **k-fachen reellen Lösung** λ_i entsprechen im Fundamentalsystem die k partikulären Lösungen:
$$e^{\lambda_i x}, \quad xe^{\lambda_i x}, \quad x^2e^{\lambda_i x}, ..., x^{k-1}e^{\lambda_i x}.$$

2. Dem **k-fach auftretendem Paar konjugiert komplexer Wurzeln** $\lambda = \alpha \pm i\beta$ entsprechen die **2k partikulären Lösungen**:
$$\begin{array}{ll} e^{\alpha x}\cos(\beta x), & e^{\alpha x}\sin(\beta x), \\ xe^{\alpha x}\cos(\beta x), & xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \\ ... & \\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x), & x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x). \end{array}$$

Bei höheren Vielfachheiten als 1 für ein λ_i wird also das entsprechende Element des Fundamentalsystems immer wieder mit x multipliziert, bis man für dieses λ_i so viele Funktionen in dem Fundamentalsystem hat, wie es die Vielfachheit der reellen Wurzel oder die Vielfachheit des Paares komplexer Wurzeln angibt.

Beispiel 2.15 $y^{(4)} - 2y''' - y'' - 4y' + 12y = 0; \quad y = e^{\lambda x}$

$\Longrightarrow \quad \lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0$ *ist die charakteristische Gleichung.*
Mittels Hornerschema findet man die Lösungen

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, *d.h.* λ_1 *hat die Vielfachheit 2, und*
$\lambda_{3/4} = -1 \pm i\sqrt{2} = \alpha \pm i\beta$ *mit* $\alpha = -1$ *und* $\beta = \sqrt{2}$.
$\lambda_{3/4}$ *ist also ein Paar konjugiert komplexer Lösungen mit der Vielfachheit* 1.

Damit besteht das Fundamentalsystem aus den Funktionen

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\lambda_1 x} = e^{2x},\ y_2 = xe^{\lambda_1 x} = xe^{2x},\ \text{da } \lambda_1 \text{ die Vielfachheit 2 hat} \\ y_3 &= e^{\alpha x}\cos\beta x = e^{-x}\cos\left(\sqrt{2}x\right),\ y_4 = e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{-x}\sin\left(\sqrt{2}x\right) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist dann eine Linearkombination der 4 Funktionen aus dem Fundamentalsystem:

$$\begin{aligned} y_h(x) &= C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4 \\ &= C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3e^{-x}\cos\left(\sqrt{2}x\right) + C_4e^{-x}\sin\left(\sqrt{2}x\right), \quad C_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Beispiel 2.16 $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0; \quad y = e^{\lambda x}$

$\Longrightarrow$ *Die charakteristische Gleichung lautet* $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0$ *und hat die Lösungen*
$\lambda_{1/2} = 2i$ *und* $\lambda_{3/4} = -2i$, *d.h. es liegt ein Paar konjugiert komplexer Lösungen*
$\lambda = \pm 2i$ *mit der Vielfachheit 2 vor,* $\alpha = 0$; $\beta = 2$.
Damit besteht das Fundamentalsystem aus den Funktionen

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x}\cos\beta x = e^0\cos(2x) = \cos(2x);\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x = \sin(2x) \\ y_3 &= xe^{\alpha x}\cos\beta x = xe^0\cos(2x) = x\cos(2x),\ y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x = x\sin(2x) \end{aligned}$$

da das Paar konjugiert komplexer Lösungen $\lambda = \pm 2i$ *die Vielfachheit 2 hat.*
$\Longrightarrow$ *allgemeine Lösung:*

$$\begin{aligned} y_h(x) &= C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4 \\ &= C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + C_3x\cos 2x + C_4x\sin 2x, \quad C_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Beginnen Sie nun, ein Arbeitsblatt zur Lösung der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu erstellen, das Sie dann in der Übung und der Klausur nutzen können. Jetzt steht die Frage: Was muss ich machen, um eine homogene Differentialgleichung dieser Art zu lösen? Bitte beachten Sie, dass keine realen Beispielaufgaben enthalten sind.

2.4.2 Die inhomogene Gleichung

Gesucht ist nun eine partikuläre Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung n-ter Ordnung:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f.$$

Wir nehmen jetzt also wieder den Inhomogenitätsterm mit in die Rechnung auf. Das allgemeine weitere Vorgehen entspricht der Methode der Variation der Konstanten, wie wir sie bei der inhomogen, linearen Differentialgleichung 1. Ordnung kennengelernt haben. Diese Methode wollen wir hier aber nur fakultativ weiterführen, da sie oft auf schwer lösbare Integrale führt. Dann muss man numerische Methoden einsetzen, die hier aber nicht Gegenstand sind.

Variation der Konstanten*)

Fakultativer Abschnitt:

Aus der bekannten Lösung y_h der homogenen Differentialgleichung

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x)$$

wobei $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$ ein Fundamentalsystem bildet, wird im allgemeinen Fall ein Ansatz für die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung y_p gewonnen:

$$y_p(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) + ... + C_n(x)\, y_n(x) .$$

Da die Funktion $y_p(x)$ die Differentialgleichung erfüllen muss, wird sie differenziert, und die Ableitungen werden in die Differentialgleichung eingesetzt. Mehrfache Wiederholung dieses Vorganges und Vereinfachungen zur Eindämmung der entstehenden Flut von Termen aufgrund der Produktregel beim Ableiten führt zu fogendem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} y_1 C_1' + y_2 C_2' + ... + y_n C_n' &= 0 \\ y_1' C_1' + y_2' C_2' + ... + y_n' C_n' &= 0 \\ & \cdots \\ y_1^{(n-1)} C_1' + y_2^{(n-1)} C_2' + ... + y_n^{(n-1)} C_n' &= f. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}$$

Die Systemdeterminante ist die sogenannte Wronskideterminante W. Weil die Funktionen $y_i, \quad i = 1, 2, ..., n$ linear unabhängig sind, gilt $detW \neq 0$, d.h. das Gleichungssystem ist immer eindeutig lösbar. Die Lösung $C_1'(x), C_2'(x), ...C_n'(x)$ liefert anschließend durch Integration die gesuchten Funktionen $C_1(x), C_2(x), ...C_n(x)$. Mit dem Einsetzen in den Ansatz für y_p erhält man dann die gesuchte partikuläre Lösung der Differentialgleichung. ZUm Schluss wird die Gesamtlösung bestimmt durch

$$y_{ges}(x) = y_p(x) + y_h(x).$$

Beispiel 2.17 $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y'' + y = 0$ *lautet mit der charakteristischen Gleichung* $\lambda^2 + 1 = 0; \quad \lambda_{1/2} = \pm i$. *Damit erhalten wir über das Fundamentalsystem* $\{y_1 = \sin x, y_2 = \cos x\}$ *die Lösung der homogenen Differentialgleichung und daraus den Ansatz für* $y_p(x)$

$$\begin{aligned} y_h(x) &= C_1 \sin x + C_2 \cos x. \\ y_p(x) &= C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x \end{aligned}$$

Mit diesem Ansatz für entsteht das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin x} \end{pmatrix}.$$

Zum Lösen dieses Gleichungssystems wird die Cramersche Regel benutzt:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \\ D_1 &= \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \frac{1}{\sin x} & -\sin x \end{vmatrix} = -\frac{\cos x}{\sin x} \\ D_2 &= \begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende Gleichungen für die unbekannten Funktionen $C_1'(x)$ *und* $C_2'(x)$:

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= \frac{D_1}{D} = \frac{\cos x}{\sin x} \\ C_2'(x) &= \frac{D_2}{D} = -1 \\ C_1(x) &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \cot x dx = \ln|\sin x| + K_1 \\ C_2(x) &= \int -1 dx = -x + K_2 \end{aligned}$$

Die Konstanten K_1 und K_2 werden null gewählt, weil nur eine partikuläre Lösung benötigt wird. Somit gilt: $C_1(x) = \ln|\sin x|$ und $C_2(x) = -x$. Durch Einsetzen in den Ansatz für y_p ergibt sich:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x \\ &= \ln|\sin x|\sin x - x\cos x. \end{aligned}$$

Die Gesamtlösung lautet folglich:

$$\begin{aligned} y_{ges}(x) &= y_p(x) + y_h(x) \\ &= \ln|\sin x|\sin x - x\cos x + C_1\sin x + C_2\cos x \end{aligned}$$

Diese Lösungsmethode ist universell einsetzbar, aber sehr rechenaufwendig und führt schon bei einfachen rechten Seiten zu komplizierten Integralen.
Ende des fakultativen Abschnittes

Wir wollen nun noch eine andere Methode kennenlernen, die nicht so universell ist, aber in vielen praktischen Fällen leichter zum Ziel führt, die

Ansatzmethode

Wenn die rechte Seite der Differentialgleichung $f(x)$, auch Störfunktion genannt, eine bestimmte Struktur hat, kann man die partikuläre Lösung mit der Ansatzmethode bestimmen. Der Ansatz für die partikuläre Lösung wird dann nach der folgenden Tabelle entsprechend der Gestalt der rechten Seite (Störfunktion) aufgestellt:

Störfunktion $f(x)$	Ansatzfunktion $y_p(x)$
$e^{\alpha x}(b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m)$	$x^l e^{\alpha x}(B_0 + B_1 x + ... + B_m x^m)$
$e^{\alpha x}(k_1\cos\beta x + k_2\sin\beta x)$	$x^l e^{\alpha x}(K_1\cos\beta x + K_2\sin\beta x)$
$e^{\alpha x}[(k_{10} + k_{11}x + ... + k_{1m}x^m)\cos\beta x + +(k_{20} + k_{21}x + ... + k_{2m}x^m)\sin\beta x]$	$x^l e^{\alpha x}[(K_{10} + K_{11}x + ... + K_{1m}x^m)\cos\beta x + +(K_{20} + K_{21}x + ... + K_{2m}x^m)\sin\beta x]$

Dabei bedeuten die Konstanten auf der linken Seite α, β, b_i, k_i, und k_{ij} fest vorgegebene Zahlenwerte aus der Aufgabenstellung, die man aus der Störfunktion ablesen kann. Wichtig dabei sind insbesondere die Werte α un β. Die Konstanten B_i, K_i, und K_{ij} auf der rechten Seite sind unbestimmte Koeffizienten, die im Laufe der weiteren Rechnung ausgerechnet werden müssen. Bei einer konkreten Rechnung kann man dann der Einfachheit halber auch nicht indizierte Buchstaben verwenden. Die Größe l ist 0, wenn die Zahl $\lambda = \alpha \pm i\beta$ keine Lösung der zugehörigen charakteristischen Gleichung

der entsprechenden homogenen Gleichung ist, anderenfalls ist sie gleich der Vielfachheit dieser Lösung (Resonanzfall).
Hat man den Ansatz erfolgreich aufgestellt, wird er in die Differentialgleichung eingesetzt, und die unbestimmten Koeffizienten aus dem Ansatz werden über einen Koeffizientenvergleich bestimmt.
Da nur mit dem richtigen Ansatz die nachfolgende Rechnung auch ausführbar ist, wollen wir zunächst die Aufstellung des Ansatzes diskutieren und üben.
Bei der Aufstellung der Ansatzfunktionen ist Folgendes zu beachten:

1. In der Ansatzfunktion sind stets alle Koeffizienten B_0 bis B_m, K_1, K_2 bzw. K_{10} bis K_{1m} und K_{20} bis K_{2m} mitzuführen, auch wenn einige der entsprechenden Koeffizienten in der Störfunktion nicht auftreten/Null sind.

   Beispiel 2.18

Störfunktion $f(x)$	*Ansatzfunktion* $y_p(x)$
$7x^2$	$A + Bx + Cx^2$
$-4\sin 3x$	$Asin3x + Bcos3x$

   Der Grund dafür liegt in der Differentiation des Ansatzes, die durchgeführt werden muss, um ihn in die Differentialgleichung einsetzen zu können. Dann wird z.B. aus einem Sinus ein Cosinus oder der Grad des Polynoms wird kleiner. Es hängt dann von der konkreten Differentialgleichung ab, ob alle Summanden auch wirklich in der Lösung auftreten. Man kann aber von vornherein i.Allg. keinen ausschließen.

2. **Lautet die Störfunktion**

   $$f(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m$$

   und ist $\lambda = 0$ l-fache Wurzel des charakteristischen Polynoms der entsprechenden homogenen Differentialgleichung,
   oder lautet die Störfunktion

   $$f(x) = e^{\alpha x}(k_1 \cos \beta x + k_2 \sin \beta x)$$

   und ist $\lambda = \alpha \pm i\beta$ l-fache Wurzel des charakteristischen Polynoms der entsprechenden homogenen Differentialgleichung,so muss der Term x^l als Faktor in den Ansatz aufgenommen werden. (Resonanzfall)

3. Ist die Störfunktion $f(x)$ eine Linearkombination von mehreren Störfunktionen entsprechend Tabelle, so ist der Lösungsansatz eine Linearkombination der entsprechenden Ansatzfunktionen.

Wegen dem Superpositionsprinzip für lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung kann dann auch mit den einzelnen Ansatzfunktionen getrennt gerechnet und erst danach die Gesamtlösung zusammengesetzt werden .

Um die Bestimmung des Ansatzes möglichst einfach zu gestalten, stellt man zunächst den Ansatz ohne Betrachtungen zum Resonanzfall auf und untersucht danach, ob der Resonanzfall vorliegt. Wir wollen uns das nun an ein paar Beispielen anschauen, dann werden Sie diese Regeln besser verstehen.

Beispiel 2.19 *für den Lösungsansatz:*

Zu lösen ist die Differentialgleichung $y'' - 5y' + 6y = e^{3x}(2x-1)$
Zuerst wird die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung bestimmt:
$\Longrightarrow$ *Die charakteristische Gleichung:* $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ *hat die Lösungen*

$$\Longrightarrow \quad \lambda_{1/2} = 2.5 \pm \sqrt{6.25 - 6} = 2.5 \pm 0.5;$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = 3; \quad \lambda_2 = 2$$

$\Longrightarrow \quad y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$
Nun schauen wir auf die rechte Seite der Differentialgleichung $f(x) = e^{3x}(2x-1)$ *und suchen in der Tabelle einen Ansatz heraus. In der Störfunktion können wir durch Vergleich mit der 1. Zeile der linken Spalte der Tabelle ablesen:* $\alpha = 3$, $b_0 = -1$ *und* $b_1 = 2$. *(*b_0 *und* b_1 *haben erst später für die weitere Rechnung eine Bedeutung.) In der rechten Spalte der 1. Zeile der Tabelle finden wir den Ansatz ohne den Resonanzfall zu beachten, d.h. ohne den Faktor* x^l*:*
$\Longrightarrow \quad y_{p(ohne\ Resonanz)} = e^{3x}(A + Bx)$
Zur Einschätzung, ob der Resonanzfall vorliegt, fehlt noch β. *Die Zahl* β *ist nur dann von Null verschieden, wenn wir in der rechten Seite* $f(x)$ *Winkelfunktionen vorfinden. Das ist hier nicht der Fall, damit gilt* $\beta = 0$. *Nun vergleichen wir die komplexe Zahl* $\nu = \alpha \pm i\beta = 3 \pm 0i = 3$, *die sich aus der rechten Seite ergibt, mit den Lösungen der charakteristischen Gleichung. Gibt es dabei Übereinstimmung, so wie in dieser Aufgabe:* $\nu = 3 = \lambda_1$, *so liegt der Resonanzfall vor, und wir müssen unseren Ansatz mit* x^l *multiplizieren, wobei* l *die Vielfachheit der Nullstelle der charakteristischen Gleichung ist. In unserem Fall gilt* $l = 1$.
$\Longrightarrow \quad y_p = x^1 e^{3x}(A + Bx) = xe^{3x}(A + Bx)$
Das ist nun der endgültige Ansatz für unsere partikuläre Lösung.

Beispiel 2.20 *für den Lösungsansatz:*

Zu lösen ist die Differentialgleichung $y'' - 4y' + 5y = 7e^{2x}\sin x$
Zuerst wird die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung bestimmt:
$\Longrightarrow$ *charakteristische Gleichung:* $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 - 5} = 2 \pm i;$$

$\Longrightarrow \quad y_h = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
Jetzt schauen wir auf die rechte Seite der Differentialgleichung $f(x) = 7e^{2x} \sin x$. *Aus der Störfunktion lesen wir ab:* $\alpha = 2$ *und* $\beta = 1$. *Nun suchen wir in der Tabelle in der 2. Zeile rechts den Ansatz heraus ohne den Resonanzfall zu beachten, d.h. ohne den Faktor* x^l*:*
$\Longrightarrow \quad y_{p(ohne\ Resonanz)} = e^{2x}(A \cos x + B \sin x)$
Nun vergleichen wir die komplexe Zahl $\nu = \alpha \pm i\beta = 2 \pm i$*, die sich aus der Störfunktion ergibt, mit den Lösungen der charakteristischen Gleichung. Gibt es dabei Übereinstimmung, so wie in dieser Aufgabe,* $\nu = 2 \pm i = \lambda_{1/2}$*, so liegt der Resonanzfall vor und wir müssen unseren Ansatz mit* x^l *multiplizieren, wobei* l *die Vielfachheit der Nullstelle der charakteristischen Gleichung ist. In unserem Fall gilt* $l = 1$*, weil die Vielfachheit des Paares zählt, wenn die Nullstelle nicht reell ist.*

$$\Longrightarrow \quad y_p = x^1 e^{2x}(A \cos x + B \sin x) = xe^{2x}(A \cos x + B \sin x)$$

Das ist nun der endgültige Ansatz für unsere partikuläre Lösung.

Beispiel 2.21 *für den Lösungsansatz:*

Zu lösen ist die Differentialgleichung $y''' + 2y'' - 3y = x^2 - 5xe^{2x}$
Zuerst wird die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung bestimmt:
$\Longrightarrow$ *charakteristische Gleichung:* $\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2/3} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$$
$$\Longrightarrow \quad \lambda_2 = -3;\ \lambda_3 = 1$$

$\Longrightarrow \quad y_h = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^x$
Nun schauen wir auf die rechte Seite der Differentialgleichung $f(x) = x^2 - 5xe^{2x}$ *und suchen in der Tabelle den Ansatz heraus. Diesmal besteht die rechte Seite aus 2 Summanden, für die jeweils einzeln ein Ansatz aufgestellt werden muss, da die Summe insgesamt nicht in der Tabelle auftritt.*
Für den ***1. Summanden*** x^2 *gehen wir in die 1. Zeile der Tabelle und erhalten mit* $\alpha_1 = 0 = \beta_1$ *das Polynom* $A + Bx + Cx^2$. *Es ergibt sich dann* $\nu_1 = 0 \pm 0i = 0 = \lambda_1$*, also Resonanz mit der 1. Nullstelle der charakteristischen Gleichung. Diese hat wieder die Vielfachheit 1, also müssen wir mit* $x^1 = x$ *multiplizieren, und der 1. Summand des Ansatzes lautet* $x(A + Bx + Cx^2)$.
Für den ***2. Summanden*** $-5xe^{2x}$ *gehen wir wieder in die 1. Zeile der Tabelle und erhalten mit* $\alpha_2 = 2, \beta_2 = 0$ *den Ansatz ohne Resonanz* $e^{2x}(D + Ex)$. *Es ergibt sich dann* $\nu_2 = 2 \pm 0i \neq \lambda_i$*, für* $i = 1, 2, 3$*, d.h. keine Resonanz. Der Ansatz bleibt wie er ist. Insgesamt gilt nach Addition beider Summanden für den gesamten Ansatz*
$\Longrightarrow \quad y_p = x^1(A + Bx + Cx^2) + e^{2x}(D + Ex)$

Beispiel 2.22 *zur Berechnung partikulärer Lösungen*

$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = x^2 + e^{-x} \quad \Longrightarrow \quad$ *charakteristische Gleichung:* $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1; \lambda_{2/3} = 2$$

$\Longrightarrow \quad y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}$

$f(x) = x^2 + e^{-x}$
Für den 1. Summanden der rechten Seite gilt dann mit
$\alpha_1 = 0 = \beta_1 \Longrightarrow \nu_1 = 0 \pm 0i = 0 \neq \lambda_i$; *für* $i = 1, 2, 3$
$\Longrightarrow \quad y_{p(ohne\ Resonanz)} = A + Bx + Cx^2 + De^{-x}$
Für den 2. Summanden der rechten Seite gilt dann mit
$\alpha_2 = -1; \beta_2 = 0 \Longrightarrow \nu_2 = -1 \pm 0i = -1 \neq \lambda_i$; *für* $i = 1, 2, 3$
Der gesamte Ansatz lautet dann
$\Longrightarrow \quad y_p = A + Bx + Cx^2 + De^{-x}$

$\Longrightarrow \quad y_p' = B + 2Cx - De^{-x}$

$\Longrightarrow \quad y_p'' = 2C + De^{-x}$

$\Longrightarrow \quad y_p''' = -De^{-x}$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert: (Achtung: Klammern setzen um die Summen beim Multiplizieren!)

$$\begin{aligned}
x^2 + e^{-x} &= y_p''' - 5y_p'' + 8y_p' - 4y_p \\
&= (-De^{-x}) - 5\left(2C + De^{-x}\right) + 8\left(B + 2Cx - De^{-x}\right) - 4\left(A + Bx + Cx^2 + De^{-x}\right) \\
&= e^{-x}(-D - 5D - 8D - 4D) + x^2(-4C) + x(-4B + 16C) - 10C + 8B - 4A \\
&= e^{-x}(-18) + x^2(-4C) + x(-4B + 16C) - 10C + 8B - 4A
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich über den Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
-18D &= 1 \quad \Longrightarrow \quad D = -\frac{1}{18} \\
-4C &= 1 \quad \Longrightarrow \quad C = -\frac{1}{4} \\
-4B + 16C &= 0 \quad \Longrightarrow \quad B = 4C = -1 \\
-10C + 8B - 4A &= 0 \quad \Longrightarrow \quad A = (-10\left(-\frac{1}{4}\right) + 8(-1))\frac{1}{4} = \frac{-22}{16} = -\frac{11}{8}
\end{aligned}$$

Als partikuläre Lösung erhalten wir somit:

$$y_p = -\frac{11}{8} - x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{18}e^{-x}$$

Die Gesamtlösung lautet dann

$$\begin{aligned}
y_{ges} &= y_p + y_h \\
&= -\frac{11}{8} - x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{18}e^{-x} + C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}
\end{aligned}$$

Beispiel 2.23 *zur Berechnung partikulärer Lösungen*

$$\begin{array}{lll}
y'' + y = \sin x & \Longrightarrow & \text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 + 1 = 0 \\
& \Longrightarrow & \lambda_{1/2} = \pm i \quad \Longrightarrow \quad y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x \\
f(x) = \sin x & \Longrightarrow & \quad \alpha = 0; \ \beta = 1 \\
& \Longrightarrow & y_{p(ohne\ Resonanz)} = A \sin x + B \cos x \\
& \Longrightarrow & \nu = \alpha \pm \beta i = \pm i = \lambda_{1/2}
\end{array}$$

Wir haben also Resonanz mit $l = 1$

$\Longrightarrow \quad y_p = x(A \sin x + B \cos x)$

$\Longrightarrow \quad y_p' = A \sin x + B \cos x + x(A \cos x - B \sin x)$

$\Longrightarrow \quad y_p'' = A \cos x - B \sin x + A \cos x - B \sin x + x(A(-\sin x) - B \cos x)$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
\sin x &= y_p'' + y_p \\
&= 2A \cos x - 2B \sin x - xA \sin x - xB \cos x + x(A \sin x + B \cos x) \\
&= 2A \cos x - 2B \sin x.
\end{aligned}$$

Im Resonanzfall haben Sie immer eine Rechenkontrolle: Die mit den $x-$*Potenzen multiplizierten Terme müssen sich vor der Konstantenberechnung aufheben, sonst haben Sie einen Rechenfehler gemacht.*
Über den über den Koeffizientenvergleich ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
2A &= 0 \quad \Longrightarrow \quad A = 0 \\
-2B &= 1 \quad \Longrightarrow \quad B = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Als partikuläre Lösung erhalten wir also:

$$\begin{aligned}
y_p &= x(A \sin x + B \cos x) = -\frac{1}{2} x \cos x \quad \Longrightarrow \\
y_{ges} &= y_p + y_h \\
&= -\frac{1}{2} x \cos x + C_1 \sin x + C_2 \cos x.
\end{aligned}$$

Sie sehen, es ist auch hier ein langer Weg zur Lösung, aber frei von Integrationen, und in der Klausur wird es sicher nicht ganz so aufwendig. Sollte einmal die Konstantenberechnung nicht funktionieren, prüfen Sie bitte den Ansatz noch einmal. Meist liegt dann dort der Fehler.
Arbeiten Sie nun am Arbeitsblatt zur Lösung der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten weiter und ergänzen Sie sie um eine

Anleitung zur Bestimmung der partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Damit sind Sie dann gut vorbereitet für die Lösung der restlichen Seminaraufgaben.
Im folgenden Abschnitt möchte ich Ihnen die Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung näher erläutern, da sie in vielen technischen Disziplinen auftritt und der Name „Resonanzfall" begründet wird. Es handelt sich dabei um anwendungsorientiertes Wissen für spezielle Module aus Ihrem Studienprogramm, nicht unbedingt um prüfungsrelevantes Wissen in Mathe 2.

2.5 Die Schwingungsdifferentialgleichung

Die homogene Gleichung

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a > 0, b > 0$$

entspricht der freien gedämpften harmonischen Schwingung. Es sei $y = y(t)$. Mit dem Ansatz $y = e^{\lambda t}$ ergibt sich durch Einsetzen in der Ausgangsdifferentialgleichung die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

In Abhängigkeit von a und b gibt es entweder

1. zwei verschiedene reelle Nullstellen λ_1 und λ_2
2. eine zweifache reelle Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2$
3. ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen $\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$.

1. Fall: $\lambda_1 \neq \lambda_2; \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}; \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Der Lösungsansatz liefert $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}; \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$. Damit ergibt sich

$$y_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Das ist der aperiodische Fall. Er tritt ein, wenn der Koeffizient a, d.h. der Reibungsanteil, hinreichend groß ist. Der Radikant ist dann positiv, aber kleiner als $\frac{a^2}{4}$. Damit ist die Wurzel kleiner als $\frac{a}{2}$ und folglich $\lambda_1 < 0; \quad \lambda_2 < 0$. Die $e-$Funktionen haben einen negativen Exponenten und klingen ab für $t \to \infty$. Die Reibung bremst also die Bewegung so sehr, dass sie ausklingt und keine Schwingung zustande kommt. (Denken Sie dabei z.B. an einen Federschwinger im Honigtopf.)

2. Fall: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2} \in \mathbb{R}$,d.h. der Radikant ist Null.

Der Lösungsansatz liefert $y_1(t) = e^{-\frac{a}{2}t}$; $y_2(t) = te^{-\frac{a}{2}t}$: Das ist der aperiodische Grenzfall.

$$y_h(t) = C_1 e^{-\frac{a}{2}t} + C_2 t e^{-\frac{a}{2}t}$$

Da die e-Funktion schneller wächst oder fällt als jedes Polynom ergibt sich auch hier keine Schwingung, und die Lösung klingt ab für $t \to \infty$.

3. Fall: $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C}$, d.h. der Radikant ist negativ

Es gilt dann $\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \beta i$ mit $\beta = \sqrt{-\frac{a^2}{4} + b}$.

Der Lösungsansatz liefert mit den Fundamentallösungen
$y_1(t) = e^{-\frac{a}{2}t} \cos \beta t$; $y_2(t) = e^{-\frac{a}{2}t} \sin \beta t$

$$y_h(t) = C_1 e^{-\frac{a}{2}t} \cos \beta t + C_2 e^{-\frac{a}{2}t} \sin \beta t$$

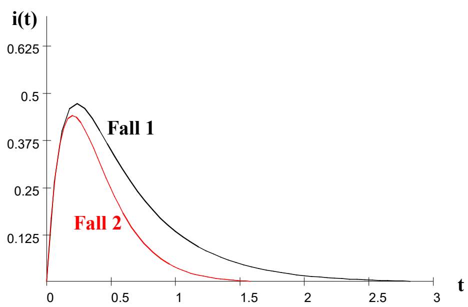
Dieser Fall entspricht einer harmonischen Schwingung mit Dämpfung, d.h. einer abklingenden Schwingung.

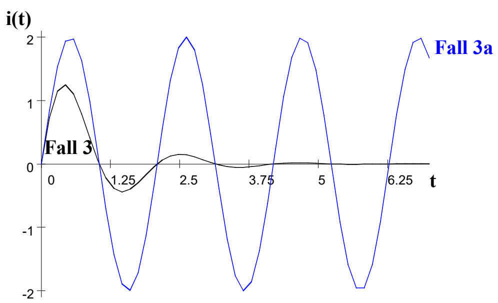
Fall 3a: Fehlende Reibung, d.h. $a = 0$
Damit gilt $\lambda_{1/2} = \pm\widetilde{\beta} i$ mit $\widetilde{\beta} = \sqrt{b}$

$$y_h(t) = C_1 \cos \widetilde{\beta} t + C_2 \sin \widetilde{\beta} t$$

Dieser Fall entspricht einer harmonischen Schwingung ohne Dämpfung, d.h. einer konstanten Schwingung.

Die folgenden Bilder sind für eine Funktion $y(t) = i(t)$ hergestellt worden und zeigen den prinzipiellen Verlauf der Lösungsfunktionen in den einzelnen Fällen.





Die inhomogene Gleichung

$$y'' + ay' + by = f(t) = c\cos\omega t, \quad \omega \neq \beta$$

beschreibt eine erzwungene Schwingung mit der Störfunktion $f(t) = c\cos\omega t$. Für die partikuläre Lösung ergibt sich dann nach der Ansatzmethode

$$y_p(t) = K_1 \cos\omega t + K_2 \sin\omega t.$$

Wir betrachten nur den Fall 3 der geringen Dämpfung ($a \neq 0$, klein) und benutzen das entsprechende y_h von oben:

$$\begin{aligned}
y_{ges} &= y_h + y_p \\
&= C_1 e^{-\frac{a}{2}t}\cos\beta t + C_2 e^{-\frac{a}{2}t}\sin\beta t + K_1\cos\omega t + K_2\sin\omega t \\
&= e^{-\frac{a}{2}t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t) + (K_1\cos\omega t + K_2\sin\omega t) \\
&= \quad e^{-\frac{a}{2}t} C\sin(\beta t + \phi) \qquad + \qquad K\sin(\omega t + \psi) \qquad \text{(NR siehe unten)} \\
&= \quad \text{Einschwingvorgang} \qquad + \qquad \text{Dauervorgang}
\end{aligned}$$

(Nebenrechnung: $C\sin(\beta t + \phi) = C\sin\beta t \cdot \cos\phi + C\sin\phi \cdot \cos\beta t \stackrel{!}{=} C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t$
$\Longrightarrow C\cos\phi = C_1; \quad C\sin\phi = C_2; \quad C^2 = C_1^2 + C_2^2; \quad \tan\phi = \frac{C_2}{C_1}$);
Analoges gilt für den 2. Summanden.)
Durch die abklingende $e-$Funktion wird der 1. Summand nach einer endlichen Zeit praktisch nicht mehr nachweisbar sein: Das ist der Einschwingvorgang, der abklingt. Der Federschwinger schwingt nach dem Einschwingen entsprechend dem 2. Summanden dauerhaft weiter mit der Erregerfrequenz ω. Die Amplitude $K \neq c$ und die Phasenverschiebung $\psi \neq 0$ sind verschieden zu der Erregerschwingung. Kritisch werde kann es ohne Dämpfung (oder mit sehr geringer Dämpfung):

Im Fall 3a ohne Dämpfung kommt es zu einer Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen, zuerst einmal von unterschiedlicher Frequenz:

$$\begin{aligned}
y_{ges} &= y_h + y_p \\
&= C\sin(\widetilde{\beta}t + \phi) + K\sin(\omega t + \psi), \quad \omega \neq \widetilde{\beta}.
\end{aligned}$$

Wenn zusätzlich die beiden Frequenzen gleich sind, d.h. $\omega = \widetilde{\beta}$, so sind wir im Resonanzfall und die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung hat die Gestalt

$$y_p(t) = Kt\sin(\widetilde{\beta}t + \psi)$$

Weiter gilt für die Gesamtlösung

$$\begin{aligned}
y_{ges} &= y_h + y_p \\
&= C\sin(\widetilde{\beta}t + \phi) + Kt\sin(\widetilde{\beta}t + \psi).
\end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung sorgt damit bei $t \to \infty$ für ein unbeschränktes betragsmäßiges Wachstum der Gesamtlösung. Es kommt zur Resonanzkatastrophe. Der Name prophezeit Schlimmes, z.B. einen Brückeneinsturz bei Sturm, wenn die Eigenfrequenz gleich der anregenden Frequenz ist, die im Sturm auftritt, oder z.B. eine Waschmaschine, die beim Schleudern außer Kontrolle gerät. Aber beim Abstimmen der Senderfrequenz im Radio wird dieser Effekt auch positiv genutzt oder bei einer Geige oder anderen Musikinstrumenten.
Die folgenden Beispiele führen tiefer in die Praxis, sind aber wegen ihrer Spezifik fakultativ.
Fakultativer Abschnitt:

Beispiel 2.24 *Elektrischer Schwingkreis:*

$$\begin{aligned}\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt}+\frac{i(t)}{LC} &= 0\\ i(0) &= 0\\ i'(0) &= \frac{U}{L}\end{aligned}$$

Fall 1: aperiodische Lösung: $a=\frac{R}{L};\quad b=\frac{1}{LC};$

$$\lambda_{1/2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\frac{R}{2L}\pm\omega_1\quad mit\ \omega_1=\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}$$

$$\begin{aligned}i_h(t) &= C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}\\ &= C_1e^{(-\frac{R}{2L}+\omega_1)t}+C_2e^{(-\frac{R}{2L}-\omega_1)t}\\ &= e^{-\frac{R}{2L}t}\left(C_1e^{\omega_1 t}+C_2e^{-\omega_1 t}\right)\end{aligned}$$

Die Anpassung an die Anfangswerte ergibt:

$$\begin{aligned}i(0) &= 0 \quad\Longrightarrow 0=C_1+C_2\Longrightarrow C_1=-C_2\\ i'(0) &= \frac{U}{L}\Longrightarrow\\ \frac{U}{L} &= C_1(-\frac{R}{2L}+\omega_1)e^0+C_2(-\frac{R}{2L}-\omega_1)e^0\\ &= -C_2(-\frac{R}{2L}+\omega_1)+C_2(-\frac{R}{2L}-\omega_1)\\ \frac{U}{L} &= -2C_2\omega_1\\ C_2 &= -\frac{U}{2L\omega_1};\quad C_1=\frac{U}{2L\omega_1}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} i_h(t) &= e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{U}{L\omega_1}(\frac{1}{2}e^{\omega_1 t} - \frac{1}{2}e^{-\omega_1 t}) \\ &= e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{U}{L\omega_1}\sinh(\omega_1 t). \end{aligned}$$

Fall 2: aperiodischer Grenzfall: $\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} = -\frac{R}{2L} \Longrightarrow$

$$i_h(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}(C_1 + C_2 t)$$

Die Anpassung an die Anfangswerte ergibt:

$$\begin{aligned} i(0) &= 0 \quad \Longrightarrow 0 = C_1 \\ i'(0) &= \frac{U}{L} \Longrightarrow \\ \frac{U}{L} &= (C_2 e^{-\frac{R}{2L}t} + C_2 t\left(-\frac{R}{2L}\right)e^{-\frac{R}{2L}t})|_{t=0} \\ \frac{U}{L} &= C_2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$i_h(t) = \frac{U}{L}te^{-\frac{R}{2L}t}$$

Fall 3: geringe Dämpfung:

$$\begin{aligned} \lambda_{1/2} &= -\tfrac{a}{2} \pm \sqrt{\tfrac{a^2}{4} - b} = -\tfrac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\tfrac{R}{2L}\right)^2 - \tfrac{1}{LC}} \\ &= -\tfrac{R}{2L} \pm i\sqrt{-\left(\tfrac{R}{2L}\right)^2 + \tfrac{1}{LC}} = -\tfrac{R}{2L} \pm i\omega_2 \quad \textit{mit } \omega_2 = \sqrt{-\left(\tfrac{R}{2L}\right)^2 + \tfrac{1}{LC}} \end{aligned}$$

$$i_h(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}\left(C_1 \cos\omega_2 t + C_2 \sin\omega_2 t\right)$$

Die Anpassung an die Anfangswerte ergibt:

$$\begin{aligned} i(0) &= 0 \Longrightarrow 0 = C_1 \\ i'(0) &= \frac{U}{L} \Longrightarrow \\ \frac{U}{L} &= e^{-\frac{R}{2L}t}C_2\omega_2 \cos\omega_2 t|_{t=0} \\ &= C_2\omega_2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$i_h(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}\frac{U}{L\omega_2}\sin\omega_2 t$$

Fall 3a: ohne Dämpfung: $R = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 0$

$\Longrightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{1}{LC}} = \pm i\sqrt{\frac{1}{LC}} = \pm i\omega_3$

$$i_h = C_1\cos\omega_3 t + C_2\sin\omega_3 t$$

Die Anpassung an die Anfangswerte ergibt:

$$\begin{aligned}
i(0) &= 0 \Longrightarrow 0 = C_1 \\
i'(0) &= \frac{U}{L} \Longrightarrow \\
\frac{U}{L} &= C_2\omega_3\cos\omega_3 t|_{t=0} \\
C_2 &= \frac{U}{L\omega_3} = \frac{U}{L\sqrt{\frac{1}{LC}}} = u\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$i_h(t) = U\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\sqrt{\frac{1}{LC}}t$$

Bei einer Anregung von außen gilt :

$$\begin{aligned}
f(t) &= C\cos(\omega t) \\
i_{ges} &= i_h + i_p \\
&= C_1\sin(\omega_3 t + \phi_3) + C_2\sin(\omega t + \phi)
\end{aligned}$$

Im Resonanzfall gilt: $\omega_3 = \omega \quad \Longrightarrow$

$$i_{ges} = C_1\sin(\omega_3 t + \phi_3) + C_2 t\sin(\omega_3 t + \phi)$$

Die Anpassung an die Anfangswerte ergibt:

$$\begin{aligned}
i(0) &= 0 \Longrightarrow 0 = C_1\sin\phi_3 \Longrightarrow 0 = C_1 \\
i'(0) &= \frac{U}{L} \Longrightarrow \\
\frac{U}{L} &= C_2[\sin(\omega_3 t + \phi) + t\omega_3\cos(\omega_3 t + \phi)]|_{t=0} \\
\frac{U}{L} &= C_2\sin\phi
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$i_{ges} = \frac{U}{L\sin\phi}t\sin(\omega t + \phi),$$

d.h. eine betragsmäßig unbeschränkt wachsende Funktion für $t \to \infty$.

2.6 Dynamische Systeme

Ein dynamisches System ist ein mathematisches Modell eines zeitabhängigen Prozesses,dessen weiterer Verlauf nur vom Anfangszustand, aber nicht von der Wahl des Anfangszeitpunktes abhängt. Der Begriff des dynamischen Systems geht auf die Mathematiker Henri Poincaré und George David Birkhoff zurück.
Man unterscheidet zwischen diskreter und kontinuierlicher Zeitentwicklung und erhält folglich zeitdiskrete, zeitkontinuierliche und hybride dynamische Systeme.
Zur Beschreibung eines dynamischen Systems benötigt man eine Menge T, die den Zeitraum beschreibt, eine nichtleere Menge X, die die möglichen Zustände des Systems enthält sowie eine Operationϕ, die TxX auf X abbildet. Diese muss für beliebige $s, t \in T$ und $x \in X$ den folgenden beiden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} 1.\ \phi(0,x) &= x \text{ (Identitätseigenschaft)} \\ 2.\ \phi(s,\phi(t,x)) &= \phi(s+t,x) \text{ (Halbgruppeneigenschaft).} \end{aligned}$$

Beispiel 2.25 *zeitliche Entwicklung der Populationsgröße einer ungehindert wachsenden Bakterienkultur*
Zu einem festen Zeitpunkt hat die Population die Größe $x \in \mathbb{R}^+$. Die Populationsgröße beschreibt also den Zustand des Systems, das heißt, der Zustandsraum des Systems ist die Menge $X = [0, \infty) = \mathbb{R}^+$. Betrachtet man zunächst die Zustände $x_0, x_1, x_2, \ldots$ zu den diskreten Zeitpunkten $t = 0, 1, 2, \ldots$ erhält man ein zeitdiskretes dynamisches System: Der Zeitraum T enthält die natürlichen Zahlen zuzüglich $t = 0$, d.h. $T = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}_0$. Es gilt weiter $x_t = ax_{t-1}$ mit dem konstanten Wachstumsfaktor a. Damit erhalten wir für den Zustand zu einem Zeitpunkt $t \in T$:

$$x_t = ax_{t-1} = a^2 x_{t-2} = ... = a^t x_0.$$

x_0 bezeichnet dabei den Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t = 0$. Wählen wir nun den Zeitpunkt $s \in T, s > t$ und untersuchen den Zustand des Systems zu diesem Zeitpunkt:

$$x_s = a^s x_t = a^s a^t x_0 = x_{s+t}.$$

Bezogen auf die Funktion ϕ heißt das aber

$$\begin{aligned} \phi(0,x_0) &= x_0, \\ \phi(t,x) &= x_t = a^t x_0 \\ \phi(s,\phi(t,x)) &= \phi(s,x_t) = a^s a^t x_0 = x_{s+t} = \phi(s+t,x). \end{aligned}$$

Damit sind die Identitäts- und Halbgruppeneigenschaft von ϕ erfüllt und das Tripel (T, X, ϕ) bildet ein dynamisches System.

Die Verbindung zum aktuellen Inhalt dieses Moduls ergibt sich aus der Tatsache, dass das wichtigste Mittel zur Beschreibung zeitkontinuierlicher dynamischer Systeme autonome gewöhnliche Differentialgleichungen sind. Das sind gewöhnliche Differentialgleichungen, die nicht explizit von der unabhängigen Variablen abhängen:

$$y^{(n)}(x) = f(y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)).$$

Sie können in ein Differentialgleichungssystem von n gekoppelten Differentialgleichungen umgeformt werden. Diese damit beschriebenen dynamischen Systeme bezeichnet man auch als autonome Systeme.

Beispiel 2.26 *Federoszillator*
Im allgemeinen Fall lautet die Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + kx(t) = F(t), \quad r > 0, k > 0.$$

Mit dieser allgemeinen rechten Seite ist die Differentialgleichung jedoch nicht autonom, da dort eine explizite Abhängigkeit von t vorhanden ist. Wir setzen also $F(t) = 0$ und entfernen damit die von außen wirkende Kraft:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + kx(t) &= 0 \\ \ddot{x}(t) &= -\frac{r}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}x(t) \\ &= f(x(t), \dot{x}(t)) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $x(t)$ die Gestalt einer autonomen gewöhlichen Differentialgleichung, deren Lösungen translationsinvariant sind, d.h. es gilt

$$x(t) = x(s+t) \quad \textit{mit } s \in \mathbb{R}$$

Wir benutzen als Zeitraum $T = [0, \infty)$ und als Größen, die den Zustand des Oszillators beschreiben, das geordnete Paar $(x(t), v(t))$ aus dem Ort $x(t)$ und der Geschwindigkeit $v(t) = \dot{x}(t)$,die die schwingende Masse m zum Zeitpunkt t hat. Als Ausgangszustand benutzen wir die Werte $x(0) = x_0$ sowie $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$.Damit lassen sich die Eigenschaften des dynamischen, autonomen Systems beweisen und der Federoszillator ist ein solches.
Will man den allgemeinen Fall mit der rechten Seite $F(t)$ mit einschließen, so muss man die Ausgangsdifferentialgleichung formal in ein entsprechendes Differentialgleichungssystem überführen.
Wir setzen

$$\begin{aligned} y_0(t) &= x(t) \\ y_1(t) &= \dot{x}(t) = \frac{dy_0}{dt}. \\ \frac{dy_2}{dt} &= 1 \Leftrightarrow y_2(t) = t \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $y_1(t)$ die Gestalt einer autonomen gewöhlichen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1(t)}{dt} &= \ddot{x}(t) = -\frac{r}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}x(t) + \frac{F(t)}{m} \\
&= -\frac{r}{m}y_0(t) - \frac{k}{m}y_1(t) + \frac{F(y_2(t))}{m} \\
&= f(y_0(t), y_1(t), y_2(t)).
\end{aligned}$$

Ende des fakultativen Abschnittes

3 Skalare Funktionen mehrerer unabhängiger Variabler

3.1 Definition

Aus dem 1. Semester ist der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ bekannt: Es ist die Menge der geordneten n-Tupel $\underline{x}= (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ reeller Zahlen. Jedem geordneten n-Tupel entspricht ein Punkt des n-dimensionalen Raumes mit den Koordinaten $(x_1, x_2, ..., x_n)^T$. Bekannt ist weiterhin die Euklidische Norm $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ als Abstand des Punktes $\overrightarrow{x}$ vom Ursprung. Diese Norm entspricht der Zuordnung einer reellen Zahl zu dem Punkt $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definition 3.1 *Es sei D_f eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$: $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$. Wenn durch eine Vorschrift jedem Punkt $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in D_f$ genau eine reelle Zahl $y \in W_f \subseteq \mathbb{R}$ zugeordnet wird, so ist durch die Vorschrift auf D_f eine reelle Funktion von n unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2, ...x_n$ mit dem Wertebereich W_f erklärt.*
explizite Form: $y = f(x_1, x_2, ...x_n) = f(\overrightarrow{x}) = f(P)$
implizite Form: $F(x_1, x_2, ...x_n, y) = F(\overrightarrow{x}, y) = 0$

Beispiel 3.1 $f(\overrightarrow{x}) = \|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$

Beispiel 3.2 $\phi(x, y, z) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$: *elektrostatisches Potential, das im Punkt $P = (x, y, z)^T$ durch die Punktladung Q im Ursprung erzeugt wird.*

Beispiel 3.3 $T(x, y, z, t)$: *Temperatur im Punkt $(x, y, z)^T$ des Zimmers zur Zeit t*

Beispiel 3.4 $p(x, y, z)$: *Luftdruck im Punkt $(x, y, z)^T$ eines Geländestückes*

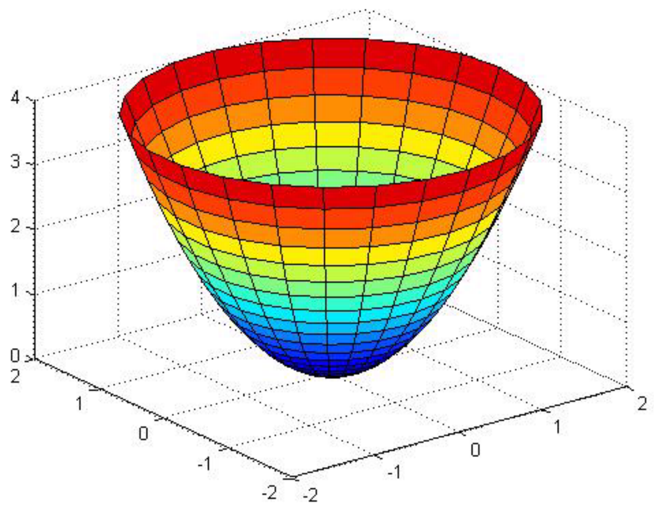
Reelle Funktionen von n unabhängigen Veränderlichen werden auch skalare Felder genannt (in der Technik manchmal unzulässig verallgemeinernd Potentiale).

3.2 Geometrische Veranschaulichung skalarer Funktionen

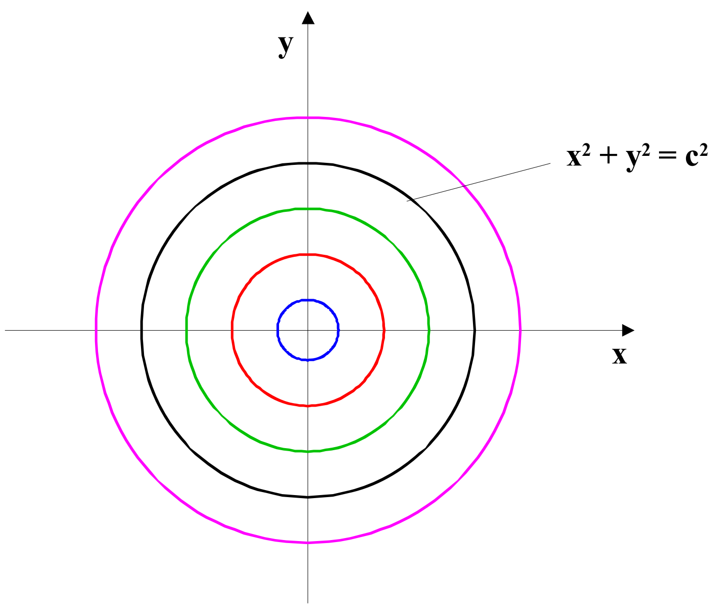
1. Wir betrachten Punkte $P \in D_f \mid f(P) = c = const.$. Die Menge dieser Punkte heißt Niveaufläche, wenn $D_f \subseteq \mathbb{R}^3$ bzw. Niveaulinie, wenn $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, auch Äquipotentialfläche bzw. Äquipotentiallinie.

Beispiel 3.5 *Isobaren auf der Wetterkarte sind Linien, die Orte gleichen Luftdruckes verbinden.*

Beispiel 3.6 $z = x^2 + y^2$



Niveaulinien: $z = x^2 + y^2 = c^2 = const.$
Die Niveaulinien sind folglich Kreise mit dem Radius c.



Beispiel 3.7 $w = x^2 + y^2 + z^2$
Niveauflächen: $w = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 = const.$
Die Niveauflächen sind folglich die Oberflächen der Kugeln mit dem Radius c.

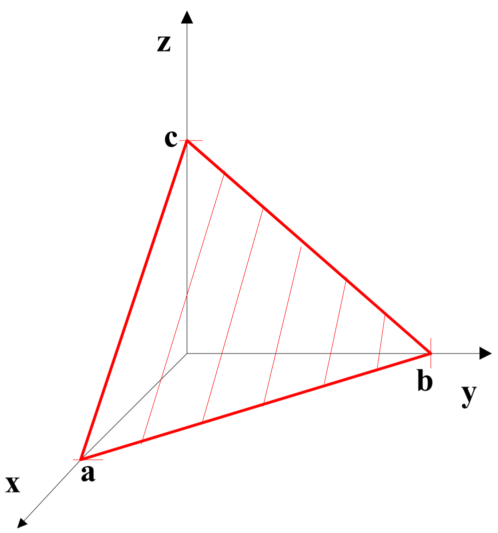
Beispiel 3.8 $\phi = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
Niveauflächen: $\phi = \dfrac{K}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = c = const.$
$\Longrightarrow \quad \widetilde{c} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$\Longrightarrow \quad \widetilde{c}^2 = x^2+y^2+z^2$
Die Niveauflächen sind ebenfalls Kugeloberflächen mit dem Radius $\widetilde{c}$.

2. Wir betrachten Schnittflächen der Art: $x_i = c = const.$

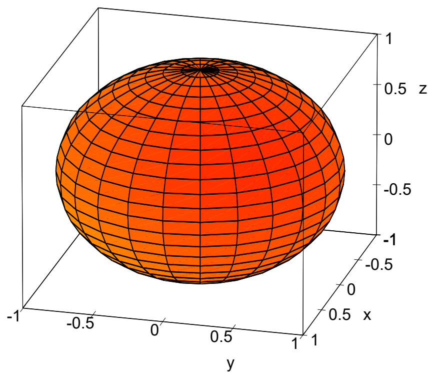
Beispiel 3.9 $z = x^2 + y^2$
Sei $x = 0 = const. \quad \Longrightarrow \quad z = y^2$: *Parabel über der y-Achse;*
Sei $y = 0 = const. \quad \Longrightarrow \quad z = x^2$: *Parabel über der x-Achse;*

3. Speziell bei Funktionen mit nur zwei unabhängigen Veränderlichen kann eine Darstellung im $\mathbb{R}^3$ erfolgen.

Beispiel 3.10 *Achsenabschnittsform der Ebenengleichung:*
$\widetilde{a}x + \widetilde{b}y + \widetilde{c}z = d \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

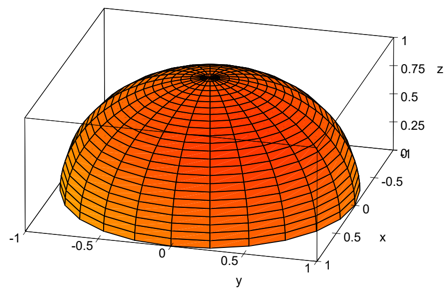


Beispiel 3.11 *Implizite Funktion:* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$:

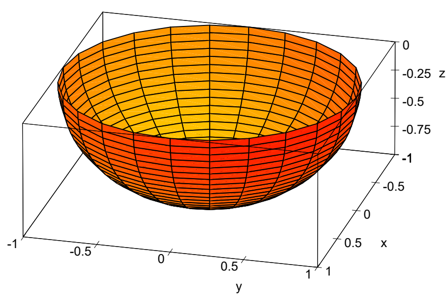


Einheitskugel

$\Longrightarrow \qquad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$: *obere Halbkugel*



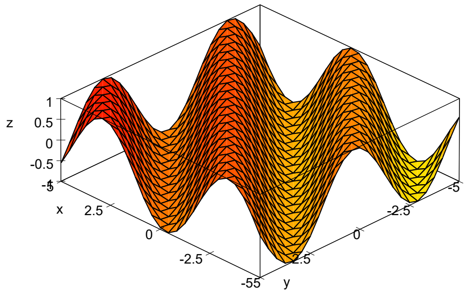
$\Longrightarrow \qquad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$: *untere Halbkugel*



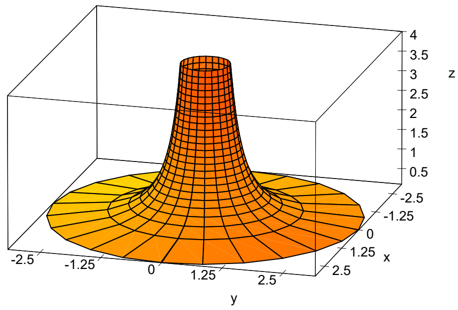
$D_f = \{(x, y)^T \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$: *Fläche des Einheitskreises im* $\mathbb{R}^2$

$W_f = [-1; 1]$: *Intervall auf der z-Achse*

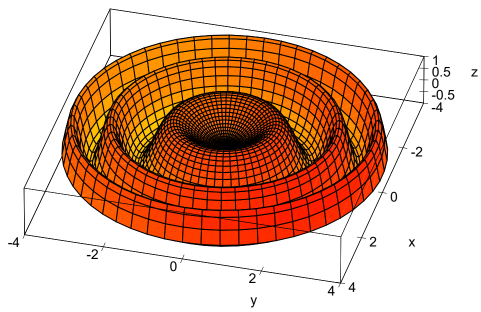
Beispiel 3.12 $f(x, y) = \sin(x + y)$



Beispiel 3.13 $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$



Beispiel 3.14 $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$



3.3 Grenzwerte und Stetigkeit skalarer Funktionen mit 2 Veränderlichen

Definition 3.2 *Die Funktion $f(x,y)$ sei mindestens in einer Umgebung U_{P_0} des Punktes $P_0 = (x_0, y_0)^T \in D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Ausnahme von P_0 definiert. Dann hat f in P_0 den Grenzwert α, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $P = (x,y)^T \in D_f$ mit $d(P, P_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ gilt $|f(x,y) - \alpha| < \varepsilon$.*

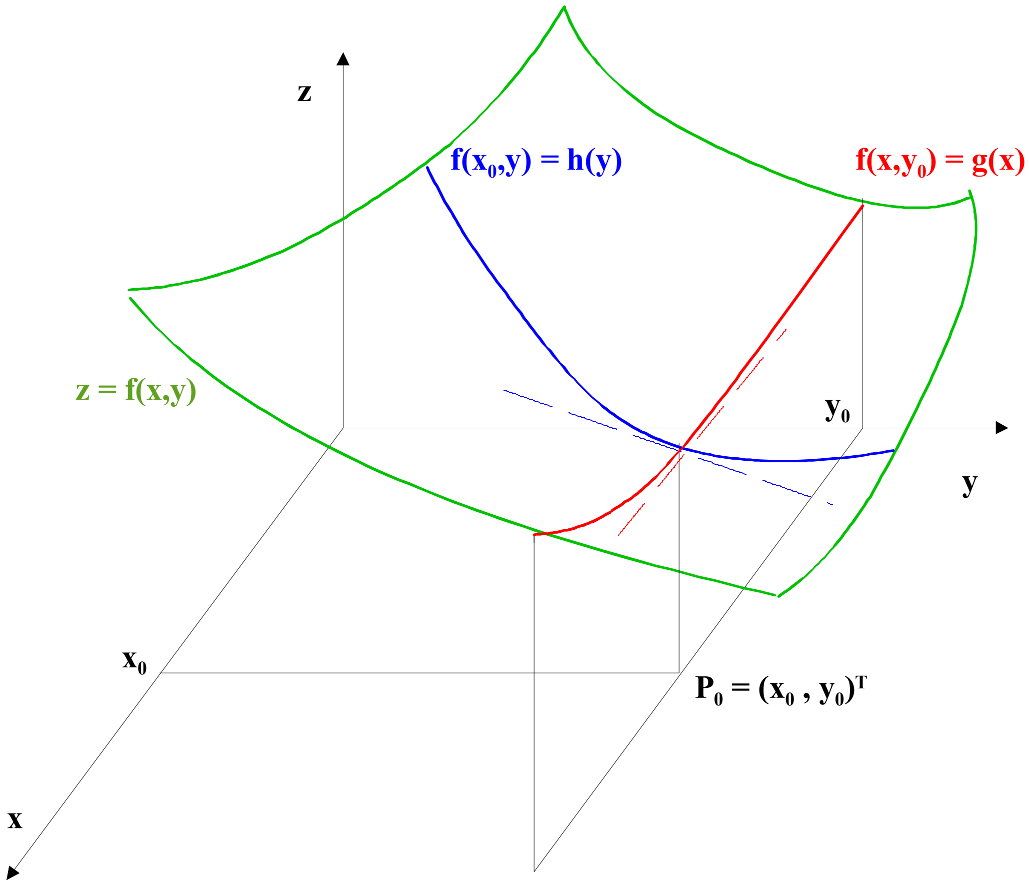
Schreibweise: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \alpha$ *oder* $\lim\limits_{P\to P_0} f(x,y) = \alpha$

Definition 3.3 *Die Funktion $f(\overrightarrow{x})$ heißt im Punkt $P^0 = \overrightarrow{x}^0$ stetig, wenn*

a) $P^0 \in D_f$ *und*
b) $\lim\limits_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{x}^0} f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}^0)$ *gilt.*

4 Differentialrechnung von skalaren Funktionen

4.1 Partielle Ableitungen 1. Ordnung



Für festes x_0 bzw. y_0 sind die Funktionen $g(x) = f(x, y_0)$ und $h(y) = f(x_0, y)$ von einer Veränderlichen abhängig und können in der bekannten Weise differenziert werden:

$$\left.\frac{\partial f(x, y_0)}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \frac{dg(x)}{dx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{g(x_0 + \triangle x) - g(x_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x}$$

$$\left.\frac{\partial f(x_0, y)}{\partial y}\right|_{y=y_0} = \frac{dh(y)}{dy} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{h(y_0 + \triangle y) - h(y_0)}{\triangle y} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)}{\triangle y}.$$

Diese beiden Grenzwerte charakterisieren das Anstiegsverhalten der Funktion $f(x,y)$ im Punkt $P_0 = (x_0, y_0)^T$ in x- bzw. y-Richtung. Sie heißen partielle Ableitungen nach x bzw. y. Ist $f(x,y)$ differenzierbar für alle $(x,y) \in M \subseteq \mathbb{R}^2$, so sind die partiellen Ableitungen selbst wieder Funktionen von x und y. Als Voraussetzung wird benötigt, dass $f(\overrightarrow{x}) = f(x_1, x_2)$ in $U(\overrightarrow{x}^0)$ definiert ist. Bezeichnung: $\left.\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial x}\right|_{\overrightarrow{x}=\overrightarrow{x}^0}$ oder $f_x(\overrightarrow{x}^0)$ bzw. $\left.\frac{\partial f(\overrightarrow{x})}{\partial y}\right|_{\overrightarrow{x}=\overrightarrow{x}^0}$ oder $f_y(\overrightarrow{x}^0)$

Partielle Ableitungen lassen sich analog bei Funktionen mit n Veränderlichen definieren. Es werden dann bei der Grenzwertbildung für die Ableitung alle die Variablen festgehalten, nach denen gerade **nicht** abgeleitet wird.

Die Ableitungsregeln sind entsprechend der Definition analog zu den Regeln bei der Ableitung von Funktionen einer Veränderlichen.

Es sei $u = u(x,y); \quad v = v(x,y); \quad f = f(t)$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(u \pm v)}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial v}{\partial x} \\
\frac{\partial(u \cdot v)}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x} \\
\left(\frac{u}{v}\right)_x &= \frac{u_x v - u v_x}{v^2} \\
\frac{\partial f(u(x,y))}{\partial x} &= \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (Kettenregel).
\end{aligned}
$$

Beispiel 4.1 $z = f(x,y) = ax + by + c; \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

$z_x = a; \qquad z_y = b$

Beispiel 4.2 $z = f(x,y) = 3x^2y^4$

$z_x = 6xy^4 \qquad z_y = 12x^2y^3$

Beispiel 4.3 $\phi(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(x^2 + y^2 + z^2)^{-0.5}$

$$
\begin{aligned}
\phi_z &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1.5}(2z) \\
&= -\frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1.5}
\end{aligned}
$$

Beispiel 4.4 $w(x,y,z) = x^2 + 2x^2yz^2 + \sin z^2$

$w_x = 2x + 4xyz^2; \qquad w_y = 2x^2z^2; \qquad w_z = 4x^2yz + 2z\cos z^2$

4.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Es sei $f(\overrightarrow{x}) = f(x_1, x_2, ...x_n)$, $\overrightarrow{x} \in G \subseteq \mathbb{R}^n$. Existiert $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ im gesamten Gebiet G, so ist diese Funktion wieder von den n Veränderlichen abhängig und möglicherweise differenzierbar:

$$\frac{\partial}{\partial x_l}(\frac{\partial f}{\partial x_k}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}.$$

Diese Ableitung heißt partielle Ableitung 2. Ordnung. Analog werden partielle Ableitungen beliebiger, endlicher Ordnung definiert.

Beispiel 4.5 $f = f(x, y); \quad n = 2$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

Für gemischte partielle Ableitungen 2. Ordnung gilt der Satz von SCHWARZ (1843 - 1921):

Satz 4.1 *Satz von SCHWARZ:*
Es sei $f = f(x, y)$. f_{xy} *und* f_{yx} *seien stetig in der offenen Menge* $G \subseteq \mathbb{R}^2$. *Dann gilt*

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

Bemerkung 4.1 *Dieser Satz gilt analog auch für* $n > 2$.

Bemerkung 4.2 *Dieser Satz gilt analog auch für gemischte partielle Ableitungen höherer Ordnung.*

Beispiel 4.6 $z = z(x, y) = x^y$

$$z_x = yx^{y-1} \qquad z_y = x^y \ln x$$

$$z_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x \qquad z_{yx} = yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x}$$
$$z_{xy} = x^{y-1}(1 + y \ln x) \qquad z_{yx} = x^{y-1}(y \ln x + 1)$$

4.3 Das totale Differential

$f = f(x, y)$ besitze stetige partielle Ableitungen in der Umgebung $U_\triangle$ des betrachteten Punktes $P_0 = (x_0, y_0)^T$. Weiter sei $P_{0\triangle} = (x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y)^T$ ein Punkt aus dieser Umgebung. In Analogie zum eindimensionalen Fall $f = f(x)$ stellen wir nun die Frage:

4.3 Das totale Differential

In der Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen haben wir mit dem vollständigen oder totalen Differential die Tangente an eine Kurve bestimmen können und Fehlerrechnung durchführen können. Letzteres war wegen der Abhängigkeit der Funktion von nur einer Messgröße leider nicht sehr realitätsnah. Wir konnten nur ganz einfache Probleme damit bearbeiten, wie z.B. den Fehler des Würfelvolumens in Abhängigkeit von der gemessenen Kantenlänge oder den Fehler des Kugelvolumen in Abhängigkeit vom gemessenen Radius bestimmen. Das wollen wir nun ändern und die Theorie des totalen Differentials auf Funktionen mehrerer Veränderlicher ausweiten. Zunächst bertrachten wir der Einfachheit halber Funktionen zweier Veränderlicher $f(x, y)$.
$f = f(x, y)$ besitze stetige partielle Ableitungen in der Umgebung $U_\triangle$ des betrachteten Punktes $P_0 = (x_0, y_0)^T$. Weiter sei $P_{0\triangle} = (x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y)^T$ ein Punkt aus dieser Umgebung. In Analogie zum eindimensionalen Fall $f = f(x)$ stellen wir nun die Frage: Wie groß ist der Zuwachs des Funktionswertes $\triangle f = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)$?
Fakultativer Abschnitt:

Bei Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung in einer Koordinatenrichtung erhält man:

$$\begin{aligned}\triangle f &= f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)\\ &= f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0 + \triangle y) + f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)\\ &= f_x(x_0 + \tau_1 \triangle x, y_0 + \triangle y)\triangle x + f_y(x_0, y_0 + \tau_2 \triangle y)\triangle y \qquad (MWS)\\ &= \left(f_x(x_0, y_0) + \phi(\overrightarrow{\triangle x})\right)\triangle x + \left(f_y(x_0, y_0) + \psi(\overrightarrow{\triangle x})\right)\triangle y\end{aligned}$$

Mit $\overrightarrow{\triangle x} = \binom{\triangle x}{\triangle y}$ und der Stetigkeit von f_x und f_y in $U_\triangle$ folgt

$$\begin{aligned}\lim_{\overrightarrow{\triangle x} \to \vec{0}} \phi(\overrightarrow{\triangle x}) &= 0\\ \lim_{\overrightarrow{\triangle x} \to \vec{0}} \psi(\overrightarrow{\triangle x}) &= 0.\end{aligned}$$

Ende des fakultativen Abschnittes

Bei Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung in $\overrightarrow{\triangle x}$ gilt:

$$\triangle f \approx f_x(x_0, y_0)\triangle x + f_y(x_0, y_0)\triangle y.$$

Dieser in $\triangle x$ und $\triangle y$ lineare Anteil des Funktionszuwachses heißt **totales Differential**. Für Funktionen von mehr als 2 Veränderlichen ergänzt man für jede weitere Veränderliche einen Summanden gleicher Struktur:

$$\triangle f \approx f_x(\overrightarrow{x}^0)\triangle x + f_y(\overrightarrow{x}^0)\triangle y + f_z(\overrightarrow{x}^0)\triangle z + f_u(\overrightarrow{x}^0)\triangle u + ...$$

Das kann man auf analogem Weg wie oben nachweisen, es auszuführen würde hier aber zu weit gehen. Allgemein ergibt sich folgende Definition:

Definition 4.1 *Es sei $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ stetig partiell differenzierbar nach $x_1, x_2, ...x_n$. Für $\overrightarrow{x}^0 \in D_f$ und beliebige Zuwächse $\overrightarrow{\triangle x} = (\triangle x_1, \triangle x_2, ..., \triangle x_n)^T$ gelte*

$$\triangle f = f(\overrightarrow{x}^0 + \overrightarrow{\triangle x}) - f(\overrightarrow{x}^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\overrightarrow{x}^0)}{\partial x_i} \triangle x_i + \phi(\overrightarrow{\triangle x}) \left\| \overrightarrow{\triangle x} \right\|$$

mit $\lim_{\overrightarrow{\triangle x} \to \overrightarrow{0}} \phi(\overrightarrow{\triangle x}) = 0$. *Dann heißt $f(\overrightarrow{x})$ total differenzierbar und*

$$df(\overrightarrow{x}^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\overrightarrow{x}^0)}{\partial x_i} dx_i$$

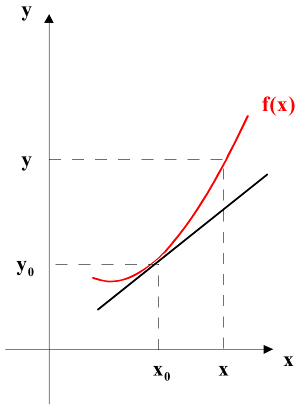
das totale Differential von f in $\overrightarrow{x}^0$ bezüglich des Zuwachses $\overrightarrow{dx}$.

Die totale Differenzierbarkeit in einem Punkt $\overrightarrow{x}^0$ ist eine höhere Forderung an die Glattheit der Funktion als die Forderung der Existenz der partiellen Ableitung in diesem Punkt. Der Term heißt totales Differential, weil er die gesamte Information über die Ableitung in einem Punkt $\overrightarrow{x}^0$ enthält, während die partiellen Ableitungen nur Information über die Ableitung in Richtung der Koordinatenachsen enthalten. Die totale Differenzierbarkeit einer Funktion in einem Punkt bedeutet, dass man diese Funktion in der Umgebung des betrachteten Punktes lokal durch eine lineare Abbildung annähern kann - die Tangentialebene.
Verständnisaufgabe: Nehmen als Ebenenersatz eine A4-Pappe und halten Sie diese an einen gewölbten Gegenstand, z.B. an den Bauch einer Vase. Dann stellt die 3D-Fläche der Vase unsere Funktion dar, die Pappe die Tangentialebene, die die Vase nur an einem Punkt berührt. In der Umgebung der Berührungsstelle ist der Unterschied zwischen Vasen- und Ebenenkoordinaten sehr gering und verkleinert sich kontinuierlich je näher man dem Berührungspunkt kommt. D.h. in einer sehr kleinen Umgebung des Berührungspunktes kann man die Vasenfläche durch die Ebene ersetzen und wird keinen großen Fehler begehen. Macht man die Umgebungen größer, wird der Fehler sichtbar, weil dann die Vase aussieht als wäre sie wie ein Fußball aus kleinen Ebenenstücken zusammengesetzt. (Beim Fußball fällt das im aufgeblasenen Zustand nicht auf, da sich das Material wölbt.) Legt man die Ebene dagegen an eine Kante der Vase

an, kippelt sie über die Kante und man weiß nicht, wo sie wirklich anliegen soll. Die mathematische Ursache dafür ist, dass über die Kante hinweg keine klassische Ableitung existiert. Legt man dort einen Schnitt darüber, hat man Verhältnisse wie bei der Betragsfunktion an der Stelle $x = 0$, wo ebenfalls keine Ableitung existiert.
Vergleichen Sie nun die Aussagen für Funktionen einer und zweier Veränderlicher. Für noch mehr Veränderliche kann man zwar nichts zeichnen, das Prinzip bleibt aber erhalten.

Gegenüberstellung:

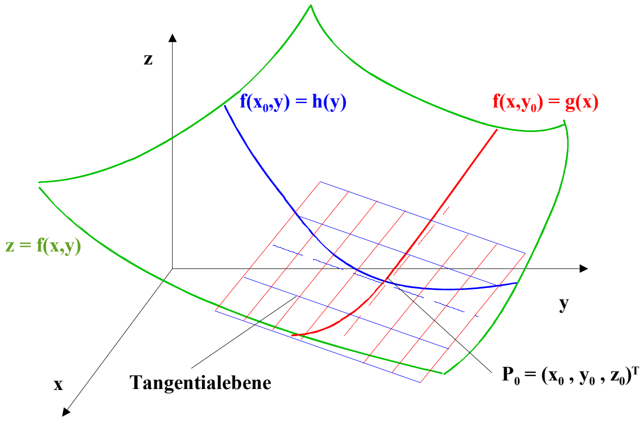
$y - y_0 = f'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)$



Geradengleichung für dieTangente an $f(x)$ im Punkt $P_0 = (x_0, y_0)^T$

Anstieg der Tangenten: $f'(x_0)$

$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$



Ebenengleichung für die Tangentialebene an $f(x, y)$ im im Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$

Diese Ebene wird aufgespannt durch die Tangenten an die Schnittkurven
$z = h(y) = f(x_0, y)$ und
$z = g(x) = f(x, y_0)$:
$z = h(y) = z_0 + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$
$z = g(x) = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0)$

Das totale Differential gibt den linearen Anteil des Funktionszuwachses an, d.h. den Funktionszuwachs, der entsteht, wenn die Bildfläche von f im Punkt P_0 durch die Tangentialebene ersetzt wird. Durch Auswertung der Formel für das totale Differential kann die Gleichung für die Tangentialebene aufgestellt werden. Im Fall $n = 2$ gilt:

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

Ersetzt man nun die Differentiale durch Differenzen, erhält man die Ebenengleichung für die Tangentialebene (s. Gegenüberstellung von oben):

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Beispiel 4.7 *Sei $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$. Wir bestimmen die Tangentialebene an diese Funktion im Punkt $P_0 = (1,1)^T$.*

$$\begin{aligned}
z - z_0 &= f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\
z - \ln\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{P_0} &= \frac{2x}{2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\Bigg|_{P_0}(x-x_0) + \frac{2y}{2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\Bigg|_{P_0}(y-y_0) \\
z - \ln\sqrt{2} &= \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) \\
z - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y &= \frac{1}{2}\ln 2 - 1.
\end{aligned}$$

Weitere Anwendungen des totalen Differentials liegen z.B. in

- der Fehlerrechnung,
- der Lösung von totalen Differentialgleichungen,
- der Lösung von Differentialgleichungen mittels integrierendem Faktor,
- der Prüfung der Wegunabhängigkeit bei Kurvenintegralen 2. Art, ...

Beispiel 4.8 *Abschätzung des absoluten (relativen) Fehlers einer der unmittelbaren Messung nicht zugänglichen Größe $\widetilde{z}$, die von den Variablen $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ abhängt*
Die Werte x, y der Variablen $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ können gemessen werden.
Es sei also $\widetilde{z} = f(\widetilde{x},\widetilde{y})$; $\quad \triangle z = \widetilde{z}(\widetilde{x},\widetilde{y}) - z(x,y)$,
wobei die Messwerte x und y mit den maximalen Messfehlern von $\triangle x$ und $\triangle y$ bestimmt werden und $\widetilde{x}$ bzw. $\widetilde{y}$ die wirklichen Werte von x bzw. y sind:

$$\begin{aligned}
|\widetilde{y} - y| &\leq \triangle y \quad \text{d.h. } -\triangle y \leq \widetilde{y} - y \leq \triangle y \Longrightarrow y - \triangle y \leq \widetilde{y} \leq y + \triangle y \\
|\widetilde{x} - x| &\leq \triangle x \quad \text{d.h. } -\triangle x \leq \widetilde{x} - x \leq \triangle x \Longrightarrow x - \triangle x \leq \widetilde{x} \leq x + \triangle x.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $\triangle z = \widetilde{z}(\widetilde{x},\widetilde{y}) - z(x,y)$

$$\begin{aligned}
|\triangle z| &\approx |dz| \\
&= |f_x(x,y)\triangle x + f_y(x,y)\triangle y| \\
&\leq |f_x(x,y)||\triangle x| \ + \ |f_y(x,y)||\triangle y|.
\end{aligned}$$

Gegeben seien nun die Messwerte $a = (10\pm0.01)cm$, $b = (6\pm0.01)cm$, $c = (5\pm0.01)cm$ und $m = (270\pm0.5)g$ für einen Quader. Gesucht ist eine näherungsweise Abschätzung *für den Maximalfehler der Dichte .*

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{m}{V} = \frac{m}{abc} = \rho(a,b,c,m) \\
|\triangle\rho| &\approx |d\rho| \\
&\leq \left|\frac{\partial\rho}{\partial a}\right| |\triangle a| + \left|\frac{\partial\rho}{\partial b}\right| |\triangle b| + \left|\frac{\partial\rho}{\partial c}\right| |\triangle c| + \left|\frac{\partial\rho}{\partial m}\right| |\triangle m| \\
&= \left|-\frac{m}{a^2bc}\right| |\triangle a| + \left|-\frac{m}{ab^2c}\right| |\triangle b| + \left|-\frac{m}{abc^2}\right| |\triangle c| + \left|\frac{1}{abc}\right| |\triangle m|
\end{aligned}$$

Diese Formel kann man zwar mit dem Taschenrechner auswerten, aber sie ist sehr unübersichtlich und birgt das Potential von Eingabefehlern. Klammert man die gesuchte Größe, hier die Dichte ρ, formelmäßig aus, verbessert sich die Struktur. In Klammern findet man dann in unserem Fall die Summe der relativen Messfehler der einzelnen Messgrößen, und die Auswertung gelingt leichter:

$$\begin{aligned}
|\triangle\rho| &\lesssim \frac{m}{abc}\left(\frac{|\triangle a|}{a} + \frac{|\triangle b|}{b} + \frac{|\triangle c|}{c} + \frac{|\triangle m|}{m}\right) \\
&= \rho\left(\frac{|\triangle a|}{a} + \frac{|\triangle b|}{b} + \frac{|\triangle c|}{c} + \frac{|\triangle m|}{m}\right) \qquad (o) \\
&= \frac{270g}{10\cdot 6\cdot 5cm^3}\left(\frac{0.01}{10} + \frac{0.01}{6} + \frac{0.01}{5} + \frac{0.5}{270}\right) \\
&\approx 0.00587\frac{g}{cm^3}
\end{aligned}$$

Für den relativen Fehler ergibt sich danach ausgehend von der Formel (o):

$$\begin{aligned}
|\triangle\rho| &\lesssim \rho\left(\frac{|\triangle a|}{a} + \frac{|\triangle b|}{b} + \frac{|\triangle c|}{c} + \frac{|\triangle m|}{m}\right) \\
\frac{|\triangle\rho|}{\rho} &\leq \frac{0.01}{10} + \frac{0.01}{6} + \frac{0.01}{5} + \frac{0.5}{270} \\
&\approx 0.00652 \mathrel{\widehat{=}} 0.652\%.
\end{aligned}$$

Beachten Sie bitte, dass der absolute Fehler stets die Einheit der berechneten Größe haben muss. Das kann auch als Rechenkontrolle benutzt werden. Der relative Fehler hingegen ist eine reelle Zahl ohne Maßeinheit und kann durch Multiplikation mit 100% in Prozent angegeben werden.
Im folgenden Abschnitt wird der Gradient eingeführt, eine Größe, die in der Vektoranalysis von großer Bedeutung ist. Der Abschnitt ist eigentlich nur eine Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse unter einem neuen Gesichtspunkt. Sollten Sie die Absicht haben, ein Masterstudium in einer Ingenieurfachrichtung anzuschließen, empfehle ich Ihnen, diesen Anschnitt zu lesen, obwohl er fakultativ ist, also nicht zum Prüfungsstoff gehört.

Fakultativer Abschnitt:

4.4 Gradient*

Definition 4.2 *Es sei $f(\overrightarrow{x})$ partiell differenzierbar,*
$\overrightarrow{\triangle x} = (\triangle x_1, \triangle x_2, ..., \triangle x_n)^T = \triangle x_1 \overrightarrow{e_1} + \triangle x_2 \overrightarrow{e_2} + ... + \triangle x_n \overrightarrow{e_n}$. *Der Vektor*

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\overrightarrow{x}^0} \overrightarrow{e_1} + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\overrightarrow{x}^0} \overrightarrow{e_2} + ... + \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\overrightarrow{x}^0} \overrightarrow{e_n}$$

heißt Gradient der Funktion f im Punkt $\overrightarrow{x}^0$.

Schreibweise: $gradf(\overrightarrow{x}^0) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\overrightarrow{x}^0} \\ \vdots \\ \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\overrightarrow{x}^0} \end{pmatrix}$; *für* $n = 3$ *gilt:* $gradf(\overrightarrow{x}^0) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\overrightarrow{x}^0} \\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\overrightarrow{x}^0} \\ \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{\overrightarrow{x}^0} \end{pmatrix}$.

Bemerkung 4.3 *Durch Einführen des formalen Vektors* $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$, *dem sogenannten Nablaoperator, folgt im* $\mathbb{R}^3$: $gradf = \nabla f$.

Bemerkung 4.4 *Folglich kann man das totale Differential mit Hilfe des Gradienten darstellen und die Notation verkürzen.*

$$\begin{aligned} df(\overrightarrow{x}^0) &= \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\overrightarrow{x}^0} \triangle x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\overrightarrow{x}^0} \triangle x_2 + ... + \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{\overrightarrow{x}^0} \triangle x_n \\ &= gradf(\overrightarrow{x}^0) \cdot \overrightarrow{\triangle x} \qquad (Skalarprodukt!) \end{aligned}$$

Beispiel 4.9 $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ $\curvearrowright$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} \\ f_y &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2} \\ gradf &= \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen f_x und f_y sind außer im Ursprung stetig. Damit ist f total differenzierbar in $D_f = \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)^T$:

$$df = \frac{1}{x^2+y^2}(xdx + ydy) = gradf \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

Im Punkt $P_0 = (1,1)^T$ *gilt folglich* $gradf|_{P_0} = \left.\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|_{P_0} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel 4.10 $F = \dfrac{\gamma m_1 m_2}{x^2+y^2+z^2}$

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{-\gamma m_1 m_2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\cdot 2x \\ \nabla F &= \frac{-\gamma m_1 m_2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\cdot\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Rechenregeln:

Voraussetzungen: $a, b \in \mathbb{R}$; $\quad a, b = const.$;
$f(\overrightarrow{x}), g(\overrightarrow{x})$ seien skalare Felder, $h = (x),\ x \in \mathbb{R}$ eine Funktion einer Veränderlichen. Aufgrund der Rechenregeln für die Ableitungen gelten folgende Regeln für den Gradienten. (Zum Nachweis schreibe man die linken Seiten der Gleichungen mit allen Komponenten aus, differenziere jede Komponente einzeln und fasse die Vektoren wieder zusammen.)

1. $grad(af + bg) = agradf + bgradg$
2. $grad(f \cdot g) = (gradf)g + f\,(gradg)$
3. $gradh(f) = \dfrac{dh}{df}\cdot gradf$

Beispiel 4.11 *Für das obige Beispiel ergibt sich damit als Gleichung für die Tangentialebene im Punkt* P_0 *(Vergleiche mit oben!).*

$$\begin{aligned} z - z_0 &= z - f(P_0) \simeq df(P_0) \\ &= gradf(P_0)\cdot\overrightarrow{\triangle x} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \\ z - \frac{1}{2}\ln 2 &= \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z &= \frac{1}{2}\ln 2 - 1. \end{aligned}$$

Nach Einführung einer Richtungsableitung kann man zeigen, dass der Gradient in die Richtung des Raumes zeigt, in der die Funktion am schnellsten wächst. Die Änderung von f pro Wegeinheit hat im Punkt $\overrightarrow{x}^0$ in Richtung von *gradf* ihren Maximalwert, nämlich $\|gradf\,(\overrightarrow{x}^0)\|$. In der zum Gradienten senkrecht stehenden Richtung gilt: $f = const.$ ($\|\overrightarrow{x}\|$ heißt Norm des Vektors $\overrightarrow{x}$ und bezeichnet den Abstand des Vektors vom Koordinatenursprung.)

Definition 4.3 *Die Zusammenstellung aller ersten partiellen Ableitungen einer Funktion $f(\overrightarrow{x})$ an der Stelle $\overrightarrow{x}^0$ in einer Matrix nach folgendem Schema bezeichnet man als JACOBI-Matrix:*

$$J_f(\overrightarrow{x_0}) = \left. \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \right|_{\overrightarrow{x}^0}$$

Ende des fakultativen Abschnittes

4.5 Extremwertaufgaben

Im Fall von Funktionen einer Veränderlichen wurden mit der Differentialrechnung auch relative (lokale) Extrema der Funktion bestimmt. Beachten Sie bitte, dass globale Extrema auch auf dem Rand von D_f auftreten können.
Im Fall von mehreren Veränderlichen verläuft der Prozess der Extremwertbestimmung dazu analog. Um die entstehenden nichtlinearen Gleichungssysteme möglichst klein und lösbar zu halten, schränken wir uns wieder auf Funktionen zweier Veränderlicher ein. Wir betrachten also $f = f(x, y)$: eine gekrümmte Fläche im Raum. Stellen Sie sich vielleicht ein (Funktions-)Gebirge vor. Stehen Sie auf dem höchsten Punkt eines Berges, sind Sie in einem Maximum der Funktion. Bewegen Sie sich auch nur einen Schritt davon weg, verlieren Sie an Höhe. Aber im Maximum selbst stehen Sie sicher, weil die Ableitungen in alle Richtungen Null sind.
Bei Extremwerten liegt also die Tangentialebene parallel zur $x - y-$Ebene.$\curvearrowright$

$$\begin{aligned} 0 &= df(P_0) \\ 0 &= f_x(P_0)\,dx + f_y(P_0)\,dy \end{aligned}$$

Da dx und dy nicht Null sind, folgt

$$\left. \begin{aligned} f_x(P_0) = 0 \\ f_y(P_0) = 0 \end{aligned} \right\} : \quad \text{Gleichungssystem } (*) \text{ für } P_0 = (x_0, y_0)^T$$

Dieses Gleichungssystem ist im allgemeinen Fall nichtlinear und macht beim Lösen u.U. Probleme.

Satz 4.2 *Notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums*
Es sei $f = f(x, y)$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, f sei partiell differenzierbar. Ist $P^0 = (x_0, y_0)^T$ die Stelle eines relativen Extremums, so gilt $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = 0$ und $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = 0$.

Diese Bedingung ist nicht hinreichend, denn es gilt:

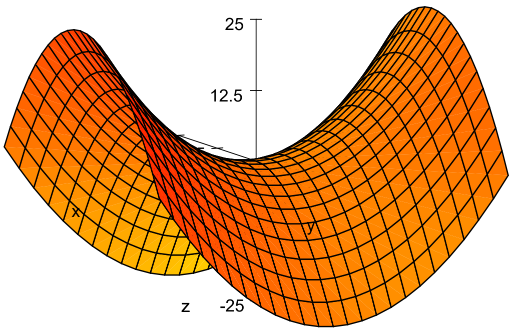
Beispiel 4.12 $f(x,y) = x^2 - y^2, \qquad P_0 = (0,0)^T$

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= 2x|_{P_0} = 0 \\ f_y(0,0) &= -2y|_{P_0} = 0 \end{aligned}$$

aber andererseits gilt weiter

$$\begin{aligned} f(x,0) &= x^2 \geq 0 \ \textit{in}\ U(P_0) \\ f(0,y) &= -y^2 \leq 0 \ \textit{in}\ U(P_0) \\ f(0,0) &= 0, \end{aligned}$$

d.h. es liegt ein Sattelpunkt vor.



Wenn man aus dem Gleichungssystem $(*)$ *einen Punkt* $P^0 = (x_0, y_0)^T$ *bestimmt hat, ist dieser also nur „extremwertverdächtig" und muss weiter untersucht werden, genau wie im Fall einer eindimensionalen Funktion.*

Satz 4.3 *Hinreichende Bedingungen für einen Extremalpunkt*
Es sei $f = f(x,y)$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, f *besitze stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung. Gilt:*

1. $\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{P_0} = 0$ *und* $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0} = 0$

2. $D(P_0) = f_{xx}(P_0) f_{yy}(P_0) - [f_{xy}(P_0)]^2 > 0$

3. $f_{xx}(P_0) < 0$, *so liegt bei* P_0 *ein relatives Maximum vor.*

4. $f_{xx}(P_0) > 0$, *so liegt bei* P_0 *ein relatives Minimum vor.*

Bemerkung 4.5 $D = f_{xx}f_{yy} - [f_{xy}]^2 = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ *heißt Diskriminante von* f.

Bemerkung 4.6 *Wenn* $D(P_0) > 0$ *gilt, also ein Extremum vorliegt, muss* $f_{xx}f_{yy} > 0$ *gelten, d.h.* f_{xx} *und* f_{yy} *haben in diesem Fall dassselbe Vorzeichen. Damit können die Bedingungen 3 und 4 aus dem obigen Satz auch mit* f_{yy} *formuliert werden. Wenn* f_{xx} *sehr kompliziert ist und* f_{yy} *nicht, bringt das bei der Überprüfung eine Vereinfachung.*

Bemerkung 4.7 *Gilt an einer extremwertverdächtigen Stelle* P_0
a) $D(P_0) < 0$, *dann liegt in* P_0 *ein Sattelpunkt vor.*
b) $D(P_0) = 0$, *dann ist keine Aussage zu* P_0 *möglich. Zur Entscheidung müssen höhere Ableitungen von* f *herangezogen werden.*

Die 4 Punkte aus dem obigen Satz liefern uns die Arbeitsanweisung für die Bestimmung der Extrempunkte:

1. Bestimme aus dem Gleichungssystem $(*)$ die extremwertverdächtigen Punkte. Dann gilt dort $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_i} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{Pi} = 0$ für $i = 0, 1, 2, ...m$.
2. Berechne an den Stellen P_i die Diskriminante $D(P_i) = [f_{xx}f_{yy} - [f_{xy}]^2]_{P_i}$ für $i = 0, 1, 2, ...m$.
3. Entscheide, ob $D(P_i) > 0$ gilt und damit ein Extremum vorliegt.
4. Entscheide im Fall eines Extremums, ob es sich um ein Maximum $(f_{xx}(P_i) < 0)$ oder ein Minimum $(f_{xx}(P_i) > 0)$ handelt.
5. Bestimme die Funktionswerte an den Extremstellen.

Achtung! Ein häufiger Fehler ist das Überspringen vom 3. Arbeitsschritt, weil dieser gegenüber dem eindimensionalen Fall neu ist!
Fakultativer Abschnitt:

Bemerkung 4.8 *Im Fall von mehr als zwei Veränderlichen kann die notwendige Bedingung erweitert werden auf*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\overrightarrow{x}^0} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Hinreichende Bedingungen für diesen Fall sind komplizierter. Es gilt

Satz 4.4 *Es sei* $f = f(\overrightarrow{x})$; $\overrightarrow{x} \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n$. *Weiter sei* f *zweimal stetig differenzierbar in* D_f. *Gilt:*

1. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}^0} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$

2. $A = (a_{ik}); \qquad a_{ik} = \dfrac{\partial^2 f(\vec{x}^0)}{\partial x_i \partial x_k}$ *besitzt durchweg positive (negative) Eigenwerte, dann hat* $f(\vec{x})$ *bei* $\vec{x} = \vec{x}^0$ *ein relatives Minimum (Maximum).*

Ende des fakultativen Abschnittes

Beispiel 4.13 $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2} - 4xy + 9y^2 + 3x - 14y + \dfrac{1}{2}; \qquad D_f = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f_x &= x - 4y + 3 = 0 \\ f_y &= -4x + 18y - 14 = 0 \end{aligned}$$

Da in der Funktion f als Nichtlinearitäten nur quadratische Funktionen auftreten, entsteht ein lineares Gleichungssystem, das mit dem Gaußalgorithmus gelöst werden kann. Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems durch Multiplikation der 1. Zeile mit 4 und Addition zur 2. ergibt

$$\begin{aligned} 2y - 2 &= 0 \\ y_0 &= 1 \\ x_0 &= 4y_0 - 3 = 1 \end{aligned}$$

In diesem Beispiel entsteht also nur ein einziger extremwertverdächtiger Punkt: $P_0 = (1,1)^T$. *Nun wird die hinreichende Bedingung überprüft:*

$$\begin{aligned} f_{xx}(1,1) &= 1 \\ f_{yy}(1,1) &= 18 \\ f_{xy}(1,1) &= f_{yx} = -4 \\ D(1,1) &= 1 \cdot 18 - (-4)(-4) = 18 - 16 = 2 > 0. \end{aligned}$$

Damit liegt in P_0 ein Extremum vor. Da $f_{xx}(1,1) = 1 > 0$ gilt, ist es ein Minimum. Wir erhalten also einen Minimumspunkt in $P_0 = (1,1,-5)^T$.

Für den Fall von Zusatz- oder Nebenbedingungen in Gleichungsform in einer Extrempunktbestimmung ist es sinnvoll, mit diesen zusätzlichen Gleichungen durch Umstellen nach einer Variablen und Einsetzen dieser in die Zielfunktion die Anzahl der Variablen zu reduzieren. Denn damit reduziert sich auch die Anzahl der Gleichungen in dem nichtlinearen Gleichungssystem zur Bestimmung der extremwertverdächtigen Punkte und macht es leichter lösbar.

Beispiel 4.14 *Es liege ein Quader mit den Kantenlängen x, y, z vor. Gegeben ist die Summe der Kantenlängen $S = x + y + z$. Für welche Werte von x, y, z ist das Volumen des Quaders maximal?*

$$\begin{aligned} V &= x \cdot y \cdot z \\ z &= S - x - y \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von z in V ergibt sich eine Zielfunktion, die nur noch von zwei Veränderlichen abhängig ist:

$$\begin{aligned} V &= x \cdot y \cdot (S - x - y) \\ &= xyS - x^2y - xy^2. \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen lauten:

$$\begin{aligned} V_x &= yS - 2xy - y^2 = y(S - 2x - y) = 0 \\ V_y &= xS - x^2 - 2xy = x(S - x - 2y) = 0. \end{aligned}$$

Durch Nullsetzen der Faktoren in den verschiedenen Kombinationen ergeben sich die extremwertverdächtigen Punkte:

1. $P_1 = (0, 0)^T$, *wenn man die Faktoren x und y null setzt.*

2. $P_2 = (\frac{S}{3}, \frac{S}{3})^T$, *wenn man die Faktoren $(S - 2x - y)$ und $(S - x - 2y)$ null setzt:*

$$\begin{aligned} S &= 2x + y \\ S &= x + 2y \quad \curvearrowright \\ -S &= -3y \end{aligned}$$

3. $P_3 = (0, S)^T$, *wenn man die Faktoren x und $(S - 2x - y)$ null setzt:*

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ S &= 2x + y = y \end{aligned}$$

4. $P_4 = (S, 0)^T$, *wenn man die Faktoren y und $(S - x - 2y)$ null setzt:*

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ S &= x + 2y = x. \end{aligned}$$

Offensichtlich können die Punkte P_1, P_3, P_4 keine Maxima liefern, da wegen einer

Kantenläge gleich Null das Volumen ebenfalls Null sein muss. Die Überprüfung der hinreichenden Bedingungen ergibt Folgendes:

$$\begin{aligned} D &= V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2 \\ &= (-2y)(-2x) - (S-2y-2x)^2 \\ &= 4xy - (S-2y-2x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(P_1) &= 0 - S^2 < 0 \quad \curvearrowright \quad \textit{Sattelpunkt in } P_1 \\ D(P_2) &= 4\frac{S}{3}\frac{S}{3} - (S - \frac{2S}{3} - \frac{2S}{3})^2 \\ &= \frac{4}{9}S^2 - \frac{1}{9}S^2 > 0 \quad \curvearrowright \quad \textit{Extrempunkt in } P_2 \\ D(P_3) &= 0 - (-S)^2 < 0 \quad \curvearrowright \quad \textit{Sattelpunkt in } P_3 \\ D(P_4) &= 0 - (-S)^2 < 0 \quad \curvearrowright \quad \textit{Sattelpunkt in } P_4 \end{aligned}$$

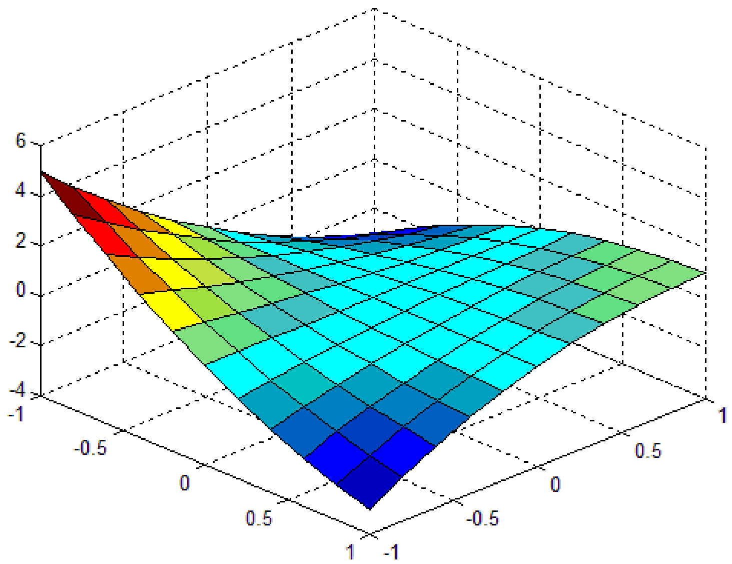
Im Punkt P_2 wird nun auf Maximum oder Minimum geprüft:

$$V_{xx}|_{P_2} = (-2y)|_{P_2} = -2\frac{S}{3} < 0.$$

Folglich liegt im Punkt $(\frac{S}{3}, \frac{S}{3})^T$ ein Maximum vor. Der zugehörige $z-$Wert und das Volumen lauten

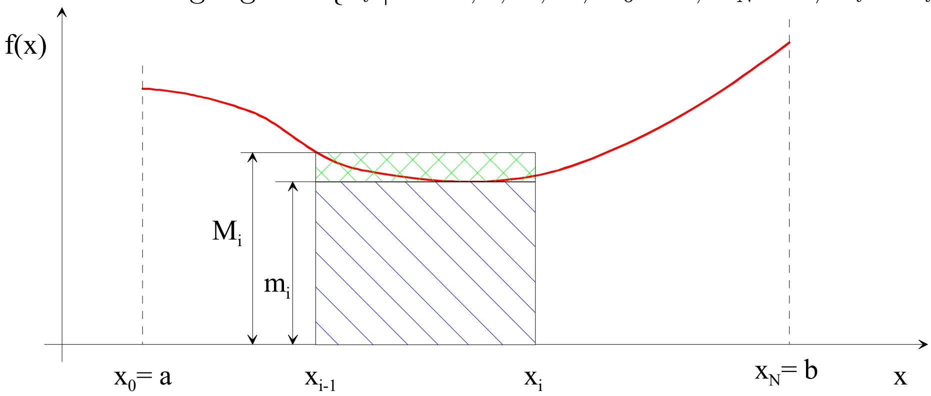
$$\begin{aligned} z &= S - x - y = \frac{S}{3} \\ V &= \frac{1}{27}S^3. \end{aligned}$$

Das folgende Bild zeigt die zum Maximum geführte Funktion $V = 3xy - xy^2 - x^2y$, d.h. es wurde $S = 3$ gewählt. Das Maximum, das dann bei $\frac{S}{3} = 1$ liegen müsste, ist aber leider nicht sehr gut erkennbar.


6
4
2
0
-2
-4
-1
-0.5
0
0.5
1
-1
-0.5
0
0.5
1

5 Integrale über ebene Bereiche (Flächenintegrale)

Nun wollen wir die bestimmte Integration auf Funktionen mehrerer Veränderlicher ausdehnen. Das verläuft komplett analog zum eindimensionalen Fall, den Sie bereits an der Schule besprochen haben und danach noch einmal im 1. Studiensemester.
Erinnern wir uns also an das bestimmte Integral zur Flächenberechnung: Die Fläche A zwischen einer positiven Funktion $f(x)$ und der $x-$Achse wurde mitttels Rechtecken angenähert, die als eine Seite ein kleines Teilintervall der $x-$Achse und als zweite Seite die Höhe von einem Funktionswert hatten. Zur Einteilung des Intervalls $[a, b]$ benutzten wir eine Zerlegung $\omega = \{x_i \mid i = 0, 1, ..., N;\ x_0 = a,\ x_N = b;\ h_i = x_i - x_{i-1}\}$:



Mit $m_i = \min\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ und $M_i = \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ liegt dann der Wert der Fläche zwischen Unter- und Obersumme:

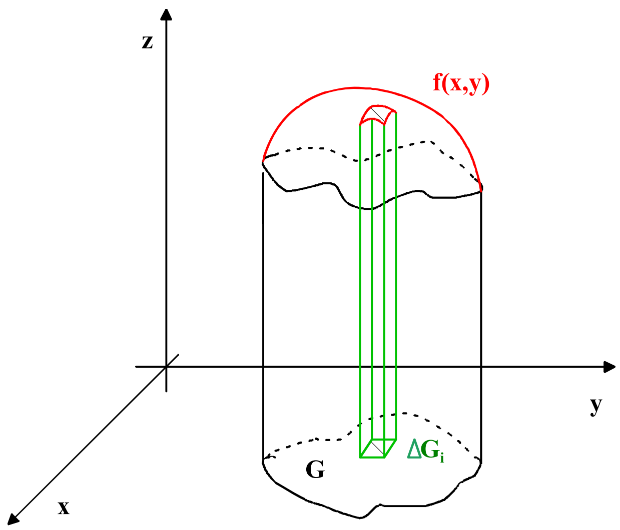
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i h_i}_{\text{(Untersumme)}} \quad \leq \quad A \quad \leq \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{N} M_i h_i}_{\text{(Obersumme)}}$$

Bei Verfeinerung der Zerlegung mit $\delta = \max\limits_i h_i \to 0$ gilt allgemein

$$\lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) h_i = A = \int_a^b f(x)dx$$

Dieses Berechnungsprinzip findet man analog bei allen möglichen verschiedenen bestimmten Integralen, z.B. bei Flächen-, Volumen- oder Kurvenintegralen. Wir wollen es bei den Flächenintegralen ausprobieren, da wir in diesem Fall wieder helfende Zeichnungen angeben können. Für Funktionen von 2 Veränderlichen kann man sich eine

Interpretation mit einem Volumen V an Stelle der Fläche A vorstellen:
Die zu integrierende Funktion $f(x, y)$ stellt dann ein "Gebirge"über der $x - y-$Ebene bzw. dem Definitionsgebiet D_f als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ dar. Das Integrationsgebiet ist eine Fläche G aus D_f bzw. dem $\mathbb{R}^2$. Zwischen Funktion(sgebirge) und Integrationsgebiet in der $x-y-$Ebene entsteht ein Volumen V analog zu der Fläche A im eindimensionanlen Fall:



Das Gesamtvolumen können wir nun als Summe der Quadervolumen über der Grundfläche $\triangle G_i$ mit der Höhe $f(\xi_i, \eta_i)$ annähern analog zum eindimensionalen Fall. Nimmt man als Funktionswert jeweils das Minimum bzw. Maximum der Funktionswerte über dem Gebiet $\triangle G_i$, so erhält man wieder eine Untersumme bzw. Obersumme und das gesuchte Volumen liegt dazwischen. Wir benötigen also eine Zerlegung des Gebietes G in Teilgebiete $\triangle G_i$, die sich außer auf den Rändern nicht überlappen und das gesamte Gebiet G ausfüllen. Um die Einschachtelung des Wertes für das Volumen V genauer zu machen, muss die Zerlegung des Gebietes verfeinert werden, ohne dass an irgendeiner Stelle ein Teilgebiet von der Verfeinerung ausgenommen wird, d.h. $i \to \infty$. Der Grenzwert der Unter- bzw Obersummen stellt dann den exakten Wert des Volumens V dar. Der allgemeine Weg zum Flächenintegral besteht damit aus den folgenden Voraussetzungen und der anschließenden Definition.
Voraussetzungen:

1. Wir bilden $V_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)|\triangle G_i|$ mit $(\xi_i, \eta_i) \in \triangle G_i$ für beliebige Zerlegungen ω des Gebietes G.

2. $f(x, y)$ sei stetig und beschränkt auf G

3. G sei beschränkt und abgeschlossen.

Definition 5.1 *Gilt für jede Zerlegung von G mit* $\lim_{i\to\infty} \max_i |\triangle G_i| = 0$

$$\lim_{n\to\infty} V_n(\omega) = I$$

mit ein und derselben Zahl I, so heißt

$$I = \iint_G f(x,y)dxdy$$

Flächenintegral von $f(x,y)$ über G.

Mathematisch gesehen stecken in jedem bestimmten Integral immer eine Summe und ein Grenzwert. Beides sind lineare mathematische Objekte, und diese Linearität überträgt sich damit auf das bestimmte Integral in der folgenden Art und Weise:
Eigenschaften, die aus der Definition folgen:

1. $\iint_G cf(x,y)dxdy = c\iint_G f(x,y)dxdy$
2. $\iint_G (f(x,y)+g(x,y))dxdy = \iint_G f(x,y)dxdy + \iint_G g(x,y)dxdy$
3. $\iint_G f(x,y)dxdy = \iint_{G_1} f(x,y)dxdy + \iint_{G_2} f(x,y)dxdy$
   $für\ G = G_1 \cup G_2 \ \wedge\ G_1 \cap G_2 = \emptyset$ (bzw. eine Menge vom Maß Null, d.h. eine Menge über der die Integration Null ergibt: Im Eindimensionalen ist das ein Punkt, im Zweidimensionalen eine Kurve.)

1. und 2. sind die Linearität bezüglich des Integranden, und 3. ist eine Additivität bezüglich des Integrationsgebietes. Wenn Sie das mit den Eigenschaften des bestimmten Integrals im eindimensionalen Fall vergleichen, so ist kein prinzipieller Unterschied erkennbar.

Bemerkung 5.1 *$dxdy$ ist zunächst allgemein als Symbol für das Flächenelement $\triangle G_i$ zu verstehen. Die Form von $\triangle G_i$ muss deshalb nicht als rechteckig vorausgesetzt werden. Manchmal schreibt man auch an Stelle von $dxdy$ ein Flächenintegrationselement dG.*

Bemerkung 5.2 *I gibt das Volumen des Zylinders mit der Grundfläche G und der Deckfläche $f(x,y)$ an.*

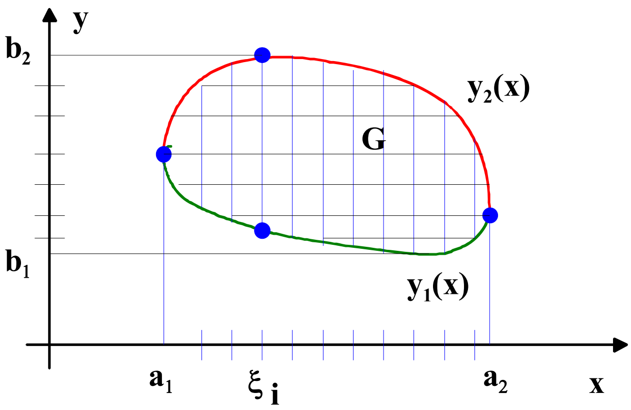
Bemerkung 5.3 *Gilt $f(x,y) \equiv 1$ über G, so gibt I zahlenmäßig den Flächeninhalt von G an, weil in dem Fall der konstanten Höhe 1 des Zylinders gilt:*

$$\begin{aligned} V &= Flächeninhalt\ der\ Grundfläche * Höhe \\ &= Flächeninhalt\ der\ Grundfläche * 1 \\ &= Flächeninhalt\ der\ Grundfläche. \end{aligned}$$

Die Definition ist jedoch zur Berechnung dieser Integrale ungeeignet, weil keiner alle möglichen beliebigen Zerlegungen mit $i \to \infty$ durchprobieren kann. Deshalb benötigen wir wie im eindimensionalen Fall zusätzlich eine möglichst einfache, ausführbare Anweisung zum Rechnen.

5.1 Berechnung von Flächenintegralen

Der Einfachheit halber wählen wir eine achsenparallele Zerlegung von G in m Teilintervalle in $x-$Koordinatenrichtung und in n Teilintervalle in $y-$Koordinatenrichtung. Die Begrenzungskurve von G wird in zwei Funktionen von x zerlegt: $y_1(x)$ sei die untere und $y_2(x)$ die obere Begrenzung:



$$I = \lim_{m\to\infty, n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j) \bigtriangleup x_i \bigtriangleup y_j$$

Fakultativer Abschnitt:

Heuristische Überlegung:
Wenn das Flächenintegral existiert, ist die Reihenfolge der beiden Grenzübergänge egal. Beginnen wir zuerst Ausführung des Grenzüberganges bzgl. j. Das führt zu einer Klammersetzung in der folgenden Art und Weise:

$$I = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j) \bigtriangleup y_j \right) \bigtriangleup x_i$$

Halten wir nun ξ_i fest, entsteht in der Klammer eine Integralsumme wie in einem Integral über eine Funktion einer Veränderlichen.
Interpretation: Wir befinden uns im Bild auf einer Parallelen zur y-Achse: $x = \xi_i$. Auf dieser Geraden liegt das Integrationsgebiet zwischen den beiden blauen Punkten unten und oben. Rücken Sie nun in Gedanken die Parallele ein Stückchen weiter nach rechts oder links, so ändert sich die Lage der blauen Punkte, d.h. es ändern sich Ein- und Austrittspunkt in unser Integrationsgebiet. Damit sind die Grenzen dieses bestimmten Integrals in der Klammer von ξ_i abhängig! Formelmäßig sieht das so aus: Aus der

Summe und dem Grenzwert wird das Integral, aus den veränderlichen Punkten η_j die Variable y und aus $\triangle y_j$ wird dy:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j) \triangle y_j = \int_{y_1(\xi_i)}^{y_2(\xi_i)} f(\xi_i, y) dy = F(\xi_i)$$

Letztlich hängt dieser Term aus der Klammer von dem festgewählten Punkt ξ_i ab, ist also eine Funktion $F(\xi_i)$. Damit ersetzen wir nun die Klammer in I und sehen bei $(*)$ wieder eine Integralsumme für eine Funktion einer Veränderlichen:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j) \triangle y_j \right) \triangle x_i \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} F(\xi_i) \triangle x_i \qquad (*) \\ &= \int_{a_1}^{a_2} F(x) dx \end{aligned}$$

Diesmal integrieren wir nach x und die Funktion $F(x)$ ist für Werte $a_1 \leq x \leq a_2$ definiert. Setzen wir nun für $F(x)$ das Integral von oben ein

$$F(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

erhalten wir eine
Ende des fakultativen Abschnittes

Berechnungsformel für das Flächenintegral:

$$\Rightarrow \qquad I = \iint_G f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \qquad (+)$$

Bemerkung 5.4 *Das in Klammern eingeschlossene Integral ist ein Parameterintegral, da der Integrand und die Grenzen von einem Parameter x abhängen. Dieser ist bei der Integration wie eine Konstante zu behandeln.*

Beispiel 5.1

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^{3-x} (x+y)dy \\ &= (xy + \frac{1}{2}y^2)\Big|_{y=1}^{y=3-x} \\ &= x(3-x) + \frac{1}{2}(3-x)^2 - x - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - x + 4 \end{aligned}$$

Dieses Parameterintegral wird aufgrund der Klammersetzung in der Formel (+) zuerst berechnet. Die Integralgrenzen sind die untere und die obere Begrenzungsfunktion des Integrationsgebietes (s. Zeichnung). Die Klammern in (+) kann man weglassen, wenn man die Berechnung beherrscht. Die Integrationselemente dy und dx in dieser Reihenfolge haben nun einen Bezug zu den eindimensionalen Integralen, sind an dieser Stelle nicht mehr vertauschbar!!

Vertauscht man nun in dem fakultativen Abschnitt am Anfang die Reihenfolge der Grenzwerte, entsteht auf analogem Weg eine **zweite Formel zur Berechnung des Flächenintegrals:**

$$I = \iint_G f(x,y)dxdy = \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right) dy \qquad (++).$$

Legen Sie nun beide Formeln (+) und (++) nebeneinander und vergleichen Sie! Außer der vertauschten Integrationsreihenfolge werden Sie feststellen, dass die Grenzen in beiden Formeln völlig unterschiedlich sind. Man darf also **beim Vertauschen der Integrationsreihenfolge nicht einfach die Grenzen tauschen, sondern muss die Grenzen neu bestimmen!** $x_1(y)$ bzw. $x_2(y)$ sind nämlich die linke bzw. rechte Begrenzung von G. Sie haben nichts mit der unteren Begrenzung $y_1(x)$ bzw. der oberen Begrenzung $y_2(x)$ von G zu tun.

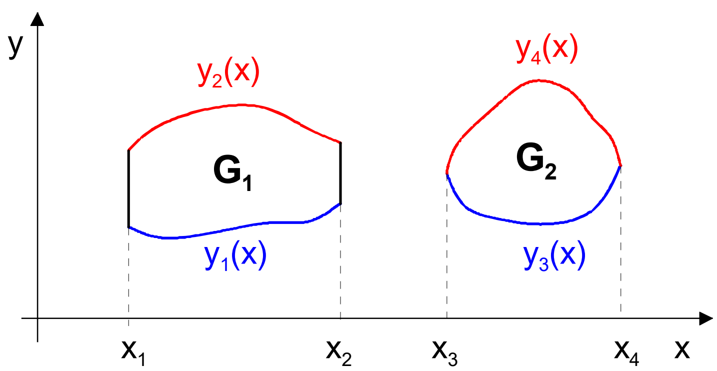
Verständnisaufgabe: Überlegen Sie, wie das Ergebnis eines bestimmten Integrals im eindimensionalen Fall aussieht: Es ist eine reelle Zahl. Im zweidimensionalen Fall ist das genauso. Prüfen Sie das an den Formeln (+) und (++): Das Parameterintegral im Inneren liefert jeweils eine Funktion von der Variablen, nach der gerade nicht integriert wurde, denn beim Einsetzen der Grenzen für das Parameterintegral wird die Integrationsvariable ersetzt und verschwindet damit aus der Rechnung (s. Bsp. oben). Bei der nachfolgenden 2. äußeren Integration gibt es jeweils konstante Grenzen, die beim Einsetzen wiederum die Integrationsvariable ersetzen. Also ist das Ergebnis eine reelle Zahl.

Das ist eine **Rechenkontrolle** für Sie. Wenn nämlich als Ergebnis keine Zahl, sondern

eine Funktion entsteht, haben Sie etwas in den Grenzen falsch gemacht, meist die Grenzen verwechselt! Um diesen Fehler zu vermeiden, ist es angeraten, an den Integrale die Grenzen mit den entsprechenden Variablen zu schreiben; also z.B. von $y = 0$ bis 3 im obigen Beispiel. Dann weiß man immer, für welche Variable in dem Rechenschritt die Grenze eingesetzt werden muss.
Zusammenfassend gilt der folgende Satz:

Satz 5.1 *Bei der Existenz des Flächenintegrals und des Parameterintegrals für $x \in [a_1, a_2]$ (bzw. $y \in [b_1, b_2]$) kann das Flächenintegral nach den oben angegebenen Formeln (+) und (++) berechnet werden.*

In der Praxis haben wir nun das Problem, die Begrenzungsfunktionen des Integrationsgebietes ausfindig zu machen. Für praktische Berechnungen wird G deshalb in endlich viele Normalbereiche zerlegt. Für die Auswertung der Formel (+) benötigt man Normalbereiche bezüglich der x- Achse, die wie folgt bestimmt werden:
<u>**Normalbereich bezüglich der x-Achse**</u>:

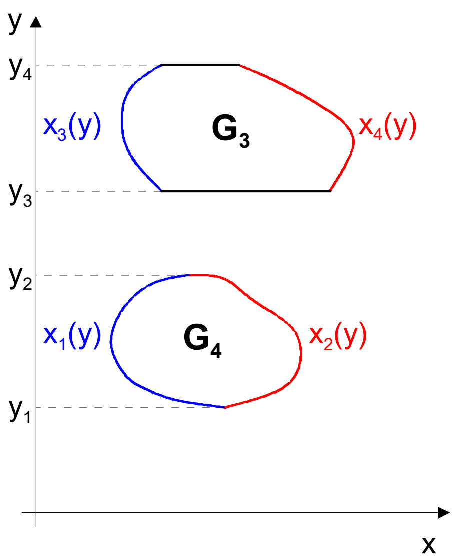


a) Projektion von G auf die x-Achse $\Longrightarrow$ x_1, x_2, x_3, x_4 (Das sind Zahlen!)
b) Ermittelung der unteren/oberen Funktionen $\Longrightarrow$ $y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x)$
Die Beschreibung des Normalbereichs erfolgt dann als Menge:

$$G_1 = \{(x, y) \quad | \quad x_1 \leq x \leq x_2; \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$
$$G_2 = \{(x, y) \quad | \quad x_3 \leq x \leq x_4; \quad y_3(x) \leq y \leq y_4(x)\}$$

Aus der Mengenbeschreibung übernimmt man die Grenzen für x und y in das Integral in der angebenen Reihenfolge, also in das äußere Integral stets die konstanten Grenzen. Für die Auswertung der Formel (++) benötigt man Normalbereiche bezüglich der y-Achse, die wie folgt bestimmt werden:

Normalbereich bezüglich der y-Achse:



a) Projektion von G auf die y-Achse $\Longrightarrow$ y_1, y_2, y_3, y_4 (Das sind Zahlen!)
b) Ermittelung der „linken/rechten" Funktionen $\Longrightarrow$ $x_1(y), x_2(y), x_3(y), x_4(y)$
Die Beschreibung des Normalbereichs erfolgt dann als Menge:

$$G_4 = \{(x, y) \quad | \quad y_1 \le y \le y_2; \quad x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$$
$$G_3 = \{(x, y) \quad | \quad y_3 \le y \le y_4; \quad x_3(y) \le x \le x_4(y)\}$$

Aus der Mengenbeschreibung übernimmt man die Grenzen für x und y in das Integral in der angebenen Reihenfolge, also in das äußere Integral stets die konstanten Grenzen.

Wenn Sie richtig arbeiten, dann liefern die beiden Formeln (+) und (++) dasselbe Ergebnis. Wenn Sie also einmal mit der einen Formel nicht zum Ziel kommen können, versuchen Sie es mit der anderen! Die Wahl der Integrationsreihenfolge kann sowohl den Rechenaufwand als auch die analytische Berechenbarkeit beeinflussen!

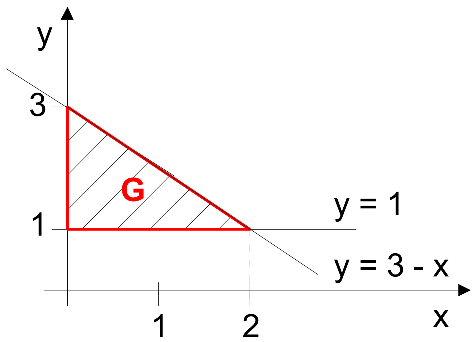
Diese Prozeduren zur Bestimmung der Normalbereiche sollten Sie sich in Ihr persönliches Tafelwerk einlegen. Sie enthalten keine Beispiele und sind damit erlaubt, beschreiben aber das Fundament einer richtigen Integralberechnung! Eine Folie dazu finden Sie auf r:\CB\Bernert\EI-MG-MD-EU\Semester2\Vorlesung_Fernlehre\Kapitel5-Fernlehre\...

Bemerkung 5.5 *Für rechteckige Bereiche G ist die Integrationsreihenfolge beliebig, weil die Grenzen alle konstant sind. Das ist der einfachste Fall.*

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dx \right) dy = \left(\int_c^d \int_a^b f(x,y)dy \right) dx.$$

Nun kommen wir zu 2 Beispielen der Integralberechnung. Diese können Sie sich auch in dem Video "VideoIntegrVorl.mp4äuf dem Laufwerk r:\CB\Bernert\EI-MG-MD-EU\Semester2\Vorlesung_Fernlehre\Kapitel5-Fernlehre\... ansehen. **Bitte nach den Beispielen noch die Einsatzgebiete dieser Flächenintegrale am Ende des Kapitels anschauen und in Ihre persönliche Formelsammlung aufnehmen.**

Beispiel 5.2 *Gesucht ist* $I = \iint\limits_G (x+y^2)dxdy$ *mit dem Gebiet G:*



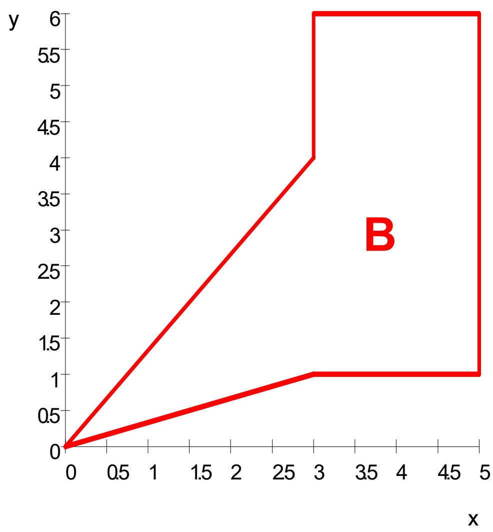
Normalbereich bzgl. der x-Achse : $G = \{(x,y) \quad | \quad 0 \le x \le 2; \quad 1 \le y \le 3-x\}$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \Big(\int_1^{3-x} (x+y^2)dy\Big)dx \\
&= \int_0^2 \left[xy + \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=1}^{y=3-x} dx \\
&= \int_0^2 (x(3-x) + \frac{1}{3}(3-x)^3 - x - \frac{1}{3})dx \\
&= \int_0^2 (-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 7x + \frac{26}{3})dx \\
&= \left[-\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{26}{3}x \right]_0^2 \\
&= -\frac{4\cdot 4}{3\cdot 4} + \frac{2\cdot 8}{3} - \frac{7\cdot 2\cdot 2}{2} + \frac{26\cdot 2}{3} = 7.3\overline{3}
\end{aligned}
$$

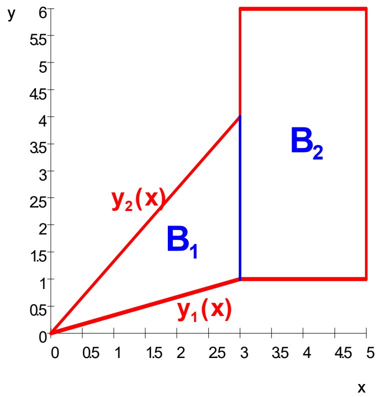
Normalbereich bzgl. der y-Achse : $G = \{(x,y) \quad | \quad 1 \le y \le 3; \quad 0 \le x \le 3-y\}$

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^3 \left(\int_0^{3-y} (x+y^2)dx \right) dy \\
&= \int_1^3 \left[\frac{1}{2}x^2 + y^2 x \right]_{x=0}^{x=3-y} dy \\
&= \int_1^3 \left(\frac{1}{2}(3-y)^2 + y^2(3-y) \right) dy \\
&= \int_1^3 (-y^3 + 3.5y^2 - 3y + 4.5) dy \\
&= \left[-\frac{1}{4}y^4 + \frac{3.5}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2 + 4.5y \right]_1^3 \\
&= -\frac{1}{4}3^4 + \frac{3.5}{3}3^3 - \frac{3}{2}9 + 4.5 \cdot 3 + \frac{1}{4} - \frac{3.5}{3} + \frac{3}{2} - 4.5 = 7.3\overline{3}
\end{aligned}$$

Beispiel 5.3 *$f(x,y) = 2x - y$ sei auf B definiert*



B besteht aus den Normalbereichen B_1 und B_2 bezüglich der x-Achse:



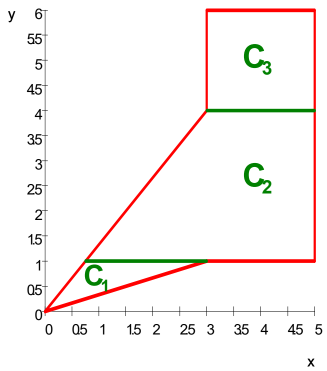
$B_1 = \{(x, y) \quad | \quad 0 \leq x \leq 3; \quad \frac{1}{3}x \leq y \leq \frac{4}{3}x\};$
$B_2 = \{(x, y) \quad | \quad 3 \leq x \leq 5; \quad 1 \leq y \leq 6; \}$

Gesucht: $I = \iint\limits_B f(x, y)dB$

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{B_1} f(x,y)dB + \iint\limits_{B_2} f(x,y)dB \qquad \text{(Aufspaltung von } B\text{)} \\
&= \int_0^3 (\int_{\frac{1}{3}x}^{\frac{4}{3}x} (2x - y)dy)dx + \int_3^5 (\int_1^6 (2x - y)dy)dx \qquad \text{(Herstellung der Doppelintegrale)} \\
&= \int_0^3 \left[2xy - \frac{1}{2}y^2\right]_{y=\frac{1}{3}x}^{y=\frac{4}{3}x} dx + \int_3^5 \left[2xy - \frac{1}{2}y^2\right]_{y=1}^{y=6} dx \\
&= \int_0^3 (2x\frac{4}{3}x - \frac{1}{2}\frac{16}{9}x^2 - 2x\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{9})dx + \int_3^5 (12x - \frac{1}{2}36 - 2x + \frac{1}{2})dx \\
&= \int_0^3 \frac{7}{6}x^2 dx + \int_3^5 (10x - \frac{35}{2})dx \\
&= \left[\frac{7}{6}\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 + \left[5x^2 - \frac{35}{2}x\right]_3^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{7}{2\cdot3\cdot3}3\cdot3\cdot3+125-\frac{35}{2}5-5\cdot9+\frac{35}{2}3 \\ &= \frac{21}{2}+80-\frac{70}{2}=\frac{111}{2}=55.5 \end{aligned}$$

Die Aufteilung von B in Normalbereiche bzgl. der y-Achse ergibt drei Teilgebiete und damit einen erhblich höheren Integrationsaufwand:



5.2 Anwendungen der Flächenintegrale

1. Falls gilt $f(x,y)\geq 0$ in B, so stellt $I=\iint\limits_B f(x,y)dB$ das Volumen eines Zylinders mit der Grundfläche B und der Höhe $f(x,y)$ dar. D.h. gilt $f(x,y)=const.=1$, so ergibt sich als Zahlenwert für I der Flächeninhalt A_B von B:

$$V=\iint\limits_B f(x,y)dB; \qquad A_B=\iint\limits_B 1dB$$

Ist die Bedingung $f(x,y)\geq 0$ in B nicht erfüllt, so muss bei der Volumenberechnung das Flächenintegral an der Kurve $f(x,y)=0$ geteilt werden (Analogie zur Flächenberechnung mit eindimensionalen Integralen!). Bereiche mit unterschiedlichen Vorzeichen von $f(x,y)$ sind getrennt zu behandeln und die Ergebnisse zum Schluss dem Vorzeichen entsprechend zu addieren.
Ist $f_1(x,y)$ die Grundfläche des Körpers,$f_2(x,y)$ die Deckfläche über B, dann gilt

$$V=\iint\limits_B [f_2(x,y)-f_1(x,y)]dB$$

2. Sei B mit einer Massenbelegung versehen. Dann kann jedem Punkt $P = (x,y)^T \in B$ eine stetige Flächendichte $\rho(x,y)$ zugeordnet werden. Für die Masse des Flächenstückes B gilt dann:

$$m = \iint_B \rho(x,y)dB$$

3. Berechnung des Flächenschwerpunktes eines ebenen Bereiches B mit der Flächendichte $\rho(x,y)$:

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{m}\iint_B x\rho(x,y)dB \\ y_s &= \frac{1}{m}\iint_B y\rho(x,y)dB. \end{aligned}$$

Ist die Dichte $\rho = \rho_0 = const.$, so kann in den obigen Formeln der Faktor ρ_0 vor das Integral gezogen werden. Mit $\frac{\rho_0}{m} = \frac{\rho_0}{B\rho_0} = \frac{1}{B}$ entstehen dann die Formeln für den **geometrischen Schwerpunkt**:

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{B}\iint_B x dB \\ y_0 &= \frac{1}{B}\iint_B y dB. \end{aligned}$$

4. Berechnung der Flächenträgheitsmomente eines ebenen Bereiches B mit der Flächendichte $\rho(x,y)$:
a) bezüglich der x- bzw. y-Achse:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_B y^2\rho(x,y)dB \\ I_y &= \iint_B x^2\rho(x,y)dB \end{aligned}$$

b) Polares Trägheitsmoment bzw. Trägheitsmoment bzgl. des Koordinatenursprunges

$$I_0 = \iint_B r^2\rho(x,y)dB = \iint_B (x^2+y^2)\rho(x,y)dB$$