

1 Integraltransformationen

1.1 Die Fouriertransformation

1.1.1 Einführung

Für Akustikingenieure und auch in der Bildbearbeitung ist es ausgesprochen wichtig, alle vorhandenen Signale analysieren, bearbeiten und filtern zu können. Am besten funktioniert das, wenn man die Zerlegung der Signale in ihre Frequenzbestandteile kennt bzw. wenn man das gewünschte Signal aus den gewünschten Frequenzen zusammensetzen kann.

In Mathematik 2 haben Sie kürzlich in diesem Zusammenhang die Fourierreihenentwicklung kennengelernt. Sie ist aber nur für periodische Signale $f(t)$ anwendbar:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

Wir hatten festgestellt, dass die Koeffizienten a_k, b_k und c_k darüber Auskunft geben, wie groß der Anteil der Frequenz $\omega_k = k\omega$ in dem Signal ist. Zur Analyse reichen im periodischen Fall die Grundfrequenz ω , und deren Vielfache $k\omega = \omega_k; k \in \mathbb{Z}$ aus.

In der Praxis treten jedoch häufig auch Einmalimpulse oder andere nichtperiodische Signale auf. Dann reichen zur Beschreibung die Grundfrequenz und ihre Vielfache nicht aus. Es müssen alle möglichen Frequenzen $\omega \in \mathbb{R}$ zugelassen werden. Folglich muss die Summation, die bisher nur über $k \in \mathbb{Z}$ lief, dann über $\omega \in \mathbb{R}$ erstreckt werden. Das sind aber „überabzählbar“ viele Frequenzen, wie der Mathematiker sagt. Eine Summe reicht dann nicht mehr. Wir benötigen an ihrer Stelle ein Integral, und die Fourierreihe geht in die Fouriertransformation über.

Die Fourierreihe ist demzufolge ein Spezialfall der Fouriertransformation für periodische Originalfunktionen. Deshalb bleiben auch die Anwendungsgebiete der Fourierreihenentwicklung bei der Fouriertransformation erhalten bzw. können bei der Fouriertransformation erweitert werden zu:

- Untersuchung von nichtperiodischen Signalen
- Dimensionierung von Filtern, z.B. von Bandpass-, Hochpass-, Tiefpassfiltern, Mehrwegboxen, ...
- Hilfsmittel zur Lösung von Differentialgleichungen und speziellen linearen Gleichungssystemen

Wir werden zunächst die analytische Definition der Fouriertransformation kennenlernen und einige einfache Beispiele rechnen, die sie dann in Tabellen wiederfinden werden. Im Anschluss lernen Sie mit Hilfe einer kleinen solchen Tabelle, einfache Funktionen analytisch zu transformieren, ohne Integration (Beleg Teil 3). Sie werden dabei erkennen, dass es leider nur wenige Funktionen gibt, bei denen das mit den Ihnen bekannten Funktionen klappt. Da diese Fouriertransformation aber so eminent wichtig in Ihrem Fachgebiet ist, werden wir Auswege aus dieser Situation suchen und sie einerseits in einer neuen Funktionenklasse, den Distributionen*), finden und andererseits in der numerischen Durchführung der Fouriertransformation, mittels Matlab (Beleg 2-2, 1 Aufgabe). Letzteres ist in der Praxis die Regel seit man eine schnelle Version der Fouriertransformation kennt und dazu auch noch schnelle Computer besitzt.

Die Fouriertransformation ist ein sehr wichtiges mathematisches Instrument, auch für andere Studienrichtungen, wie z.B. Elektrotechnik und Maschinenbau, weil auch dort nichtperiodische Signale in ihre Frequenzbausteine zerlegt und analysiert werden müssen. Aber nur der Studiengang MG hat sie noch im Programm. In gewisser Weise sind Sie also privilegiert! Vielleicht hilft Ihnen dieser Gedanke, wenn es einmal ein bisschen knifflig wird.

1.1.2 Definition der Fouriertransformation (FT)

Ausgangspunkt ist die Entwicklung periodischer Funktionen in eine Fourierreihe. Das ist aus Mathematik 2 bekannt. Die Frage ist nun, was passiert bei nichtperiodischen Funktionen, z.B. bei einem einmaligen Rechteckimpuls?

Mathematiker sind in gewisser Weise „faul“: Ehe sie eine neue Theorie aufstellen, wird erst einmal versucht, Bekanntes weiterzuentwickeln: In unserem Fall könnte man eine nichtperiodische Funktion als periodisch mit unendlich großer Periode betrachten und einen Grenzübergang zu dieser unendlich großen Periode suchen. Die folgende Rechnung geht diesen Weg, um Ihnen den Zugang zu der Definition zu ebnet. (Sie ist jedoch als heuristisch einzustufen, nicht exakt mathematisch, was aber in diesem Zusammenhang eher unbedeutend ist.)

Sei $f(t)$ periodisch. Dann gilt:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}, \quad \omega_k = \frac{2k\pi}{T} \quad \text{mit}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_k t} dt. \quad (o)$$

Fakultativer Abschnitt:

Sei $f(t)$ nichtperiodisch. Es gilt:

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2(k+1)\pi}{T} - \frac{2k\pi}{T} \\ &= \frac{2k\pi}{T} + \frac{2\pi}{T} - \frac{2k\pi}{T} \\ &= \frac{2\pi}{T}\end{aligned}$$

$\Delta\omega$ ist also interessanterweise nicht von k abhängig. Umstellen nach dem Faktor $\frac{1}{T}$, der in Formel (o) auftritt, liefert

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}.$$

Das und (o) setzen wir nun nacheinander in die Formel für $f(t)$ ein und erhalten

$$\begin{aligned}f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_k t} dt \right) e^{i\omega_k t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_k t} dt \right) e^{i\omega_k t} \Delta\omega\end{aligned}$$

Nun führen wir den Grenzprozess $T \rightarrow \infty$ aus und erhalten, dass $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ infinitesimal klein wird, d.h. $\Delta\omega \rightarrow d\omega$. Die betrachteten einzelnen Frequenzen ω_k rücken damit ganz eng zusammen, sie liegen dicht auf dem Zahlenstrahl: $\omega_k \rightarrow \omega$. Aus der Summe wird damit ein Integral und die Integralgrenzen streben ebenfalls gegen ∞ . Es ergibt sich damit:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} d\omega$$

Ende des fakultativen Abschnittes

Für eine nichtperiodische Funktion gilt:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (*) \quad \text{mit}$$

$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Man sagt, **das diskrete Spektrum geht in ein kontinuierliches über**, d.h. aus den einzelnen diskreten $c_k(\omega)$ wird eine Funktion $F(i\omega)$.

Verständnisaufgabe: Vergleichen Sie bitte mit den Formeln für die periodische Funktion oben: An Stelle der c_k , die über den Index k von dem Argument $k\omega$ abhängen, steht nun eine Funktion F , die von einem komplexen Argument $i\omega$ abhängt. Das ist etwas völlig Neues!

Nun fassen wir in den Definitionen und Bemerkungen unsere Erkenntnisse zusammen.

Definition 1.1 Sei $f(t)$ definiert für $-\infty < t < \infty$. Das Integral $F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ heißt Fouriertransformierte von $f(t)$, sofern es existiert. Die Zuordnung von $f(t)$ zu $F(i\omega)$ heißt Fouriertransformation: $\mathcal{FT}(f(t)) = F(i\omega)$.

Bemerkung 1.1 $f(t)$ heißt Originalfunktion, $F(i\omega)$ Bildfunktion. Die Menge der Originalfunktionen bildet den Originalbereich (Zeitbereich), und die Menge der Bildfunktionen den Bildbereich (Frequenzbereich).

Bemerkung 1.2 $F(i\omega)$ ist i. Allg. eine komplexwertige Funktion. Um den Anteil der einzelnen Frequenz ω in dem Signal $f(t)$ herauszubekommen, benötigt man deshalb den Betrag $|F(i\omega)|$.

Bemerkung 1.3 $F(i\omega)$ stellt die Verallgemeinerung der Fourierkoeffizienten dar. Sie enthält alle Information über die Ausgangsfunktion $f(t)$.

Bemerkung 1.4 Die Integrale sind uneigentliche Integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sim dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\lim_{B \rightarrow \infty} \right) \int_{-A}^B \sim dt$$

(Ihre Berechnung wird in dem Seminar Anwendungen der Integration, das diese Woche als Übungsvorlesung für Mathe 2 auf dem Laufwerk r eingestellt wird, ausführlich erläutert.) *) Falls das uneigentliche Integral nicht existiert, wird es als Cauchy'scher Hauptwert, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} \sim dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \sim dt$, berechnet.

Bemerkung 1.5 Es sind folgende Begriffsbildungen in der Technik üblich:

$F(i\omega)$: komplexe Amplitudendichte, Spektraldichte

$|F(i\omega)|$: Amplitudenspektrum

$\arg F(i\omega)$: Phasenspektrum.

Verständnisaufgabe: Fertigen Sie eine Übersicht über Formeln und Namen an, die hier eingeführt wurden: Schreiben Sie links die Originalfunktion $f(t)$ auf, rechts die Fouriertransformierte $F(i\omega)$, dazwischen einen Pfeil mit der Berechnungsformel. Ordnen Sie nun die eingeführten Begriffe entweder auf die linke oder die rechte Seite ein.

Bemerkung 1.6 **(fakultativ!)* Man kann aus der komplexen Amplitudendichte $F(i\omega)$ wieder die Ausgangsfunktion $f(t)$ berechnen. Diese sogenannte Rücktransformation wird durch die Formel (*) vermittelt:

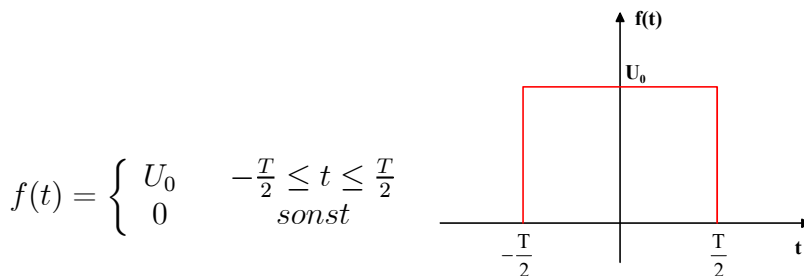
$\mathcal{FT}^{-1}(F(i\omega)) = f(t)$. \mathcal{FT}^{-1} wird als inverse Fouriertransformation bezeichnet.

Es besteht damit eine eindeutige Abbildung zwischen der Originalfunktion $f(t)$ und der Bildfunktion $F(i\omega)$. Diese Berechnung ist jedoch mit den vorhandenen Kenntnissen zur Integration nicht ausführbar, weil es sich um eine Integration bezüglich einer komplexen Variablen handelt. Dazu werden Mittel der Funktionentheorie benötigt, die nicht im Programm enthalten sind.

Zusammenfassung: Nichtperiodische Funktionen können nicht aus harmonischen Funktionen mit einer Grundfrequenz und deren Vielfachen ($\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) zusammengesetzt werden. Es werden immer alle Frequenzen ($-\infty < \omega < \infty$) mit den komplexen Amplituden $\frac{1}{2\pi}F(i\omega)$ überlagert. **Achtung! Die Zuordnung des Faktors $\frac{1}{2\pi}$ zu $F(i\omega)$ ist willkürlich und wird in der Literatur verschieden gehandhabt.** Wir werden nun 3 Beispiele rechnen. Das 1. Beispiel führt uns zu einer speziellen neuen

Funktion, die alle von Ihnen kennen sollten. Die Ergebnisse kommen in unsere kleine Tabelle, mit der wir dann weiterarbeiten wollen. Diese Tabelle finden Sie fertig auf Laufwerk r ... unter InfoSim\Arbeitsmittel\Gesetze_FT_mit_Tabelle.pdf

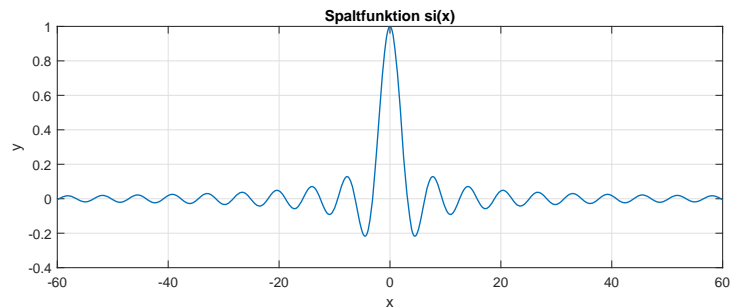
Beispiel 1.1 für die Berechnung einer Fouriertransformierten



$$f(t) = \begin{cases} U_0 & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{FT}(f(t)) = U_0 T \operatorname{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right) = U_0 T \frac{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\frac{\omega T}{2}}$$

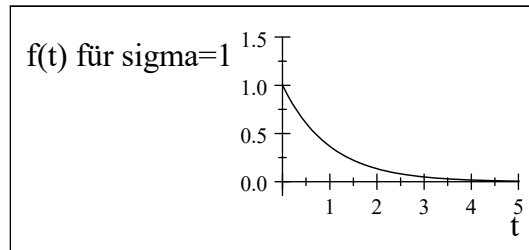
Die Funktion $si(x) = \frac{\sin x}{x}$ heißt Spalt- oder Samplingfunktion:



$$\begin{aligned}
 \mathcal{FT}(f(t)) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U_0 e^{-i\omega t} dt && \text{(TR oder Integraltabelle)} \\
 &= -\frac{U_0}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} && \text{(Grenzen einsetzen, erweitern mit 2)} \\
 &= -\frac{2U_0}{\omega} \frac{e^{-i\omega T/2} - e^{i\omega T/2}}{2i} && \text{(Formel für den Sinus / Ma 2)} \\
 &= \frac{2U_0}{\omega} \sin \frac{\omega T}{2} && \text{(erweitern mit } \frac{T}{2}\text{)} \\
 &= 2U_0 \frac{T}{2} \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} && \text{(Definition der Spaltfunktion)} \\
 &= U_0 T si\left(\frac{\omega T}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Beispiel 1.2 für die Berechnung einer Fouriertransformierten

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\sigma t} & 0 \leq t \\ 0 & t < 0 \\ \text{mit} & \sigma > 0 \end{cases}$$

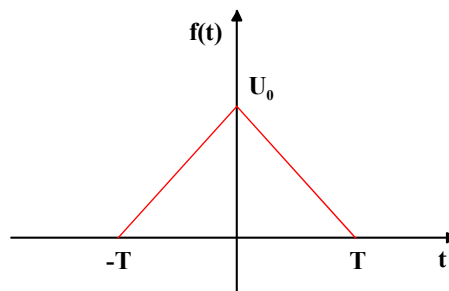


$$\mathcal{FT}(f(t)) = \frac{1}{\sigma + i\omega}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{FT}(f(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+i\omega)t} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\sigma + i\omega} e^{-(\sigma+i\omega)t} \right]_0^A \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} -\frac{1}{\sigma + i\omega} (e^{-(\sigma+i\omega)A} - 1) \\ &= \frac{1}{\sigma + i\omega} \end{aligned}$$

Beispiel 1.3 für die Berechnung einer Fouriertransformierten

$$f(t) = \begin{cases} \frac{U_0}{T}t + U_0 & -T \leq t \leq 0 \\ -\frac{U_0}{T}t + U_0 & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$



$$\mathcal{FT}(f(t)) = \frac{2U_0}{T\omega^2}(1 - \cos\omega T)$$

Fakultativer Abschnitt:

An dieser Stelle gelingt nur eine aufwendige Rechnung. Unter Beachtung der Symmetrie der Funktion ergibt sich weiter hinten eine deutlich einfachere Rechnung zur Bestimmung der Fouriertransformierten.

$$\begin{aligned}
\mathcal{FT}(f(t)) &= \int_{-T}^0 \frac{U_0}{T} t e^{-i\omega t} dt + \int_0^T -\frac{U_0}{T} t e^{-i\omega t} dt + \int_{-T}^T U_0 e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{U_0}{T} \left(\left[-\frac{t}{i\omega} e^{-i\omega t} + \int \frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} dt \right]_{-T}^0 - \left[-\frac{t}{i\omega} e^{-i\omega t} - \frac{1}{i^2 \omega^2} e^{-i\omega t} \right]_0^T \right) + \frac{2U_0}{\omega} \sin \omega T \\
&= \frac{U_0}{T} \left(\left[0 + \frac{-T}{i\omega} e^{i\omega T} + \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} e^{i\omega T} \right] - \left[-\frac{T}{i\omega} e^{-i\omega T} + \frac{1}{\omega^2} e^{-i\omega T} + 0 - \frac{1}{\omega^2} \right] \right) \\
&\quad + \frac{2U_0}{\omega} \sin \omega T \\
&= 2 \frac{U_0}{T} \frac{1}{\omega^2} + \frac{U_0}{T} \frac{T}{i\omega} (e^{-i\omega T} - e^{i\omega T}) - \frac{U_0}{T} \frac{1}{\omega^2} (e^{i\omega T} + e^{-i\omega T}) + \frac{2U_0}{\omega} \sin \omega T \\
&= 2 \frac{U_0}{T} \frac{1}{\omega^2} + \frac{2U_0}{\omega} \sin \omega T + \frac{2U_0}{\omega} \frac{(e^{-i\omega T} - e^{i\omega T})}{2i} - \frac{2U_0}{T\omega^2} \frac{(e^{i\omega T} + e^{-i\omega T})}{2} \\
&= \frac{2U_0}{T\omega^2} + \frac{2U_0}{\omega} \sin \omega T - \frac{2U_0}{\omega} \sin \omega T - \frac{2U_0}{T\omega^2} \cos \omega T \\
&= \frac{2U_0}{T\omega^2} (1 - \cos \omega T)
\end{aligned}$$

Ende des fakultativen Abschnittes

In allen 3 Beispielen war die Originalfunktion nur auf einem Teil der t -Achse von Null

verschieden. Dadurch wurde das Definitionsintegral für die FT deutlich leichter lösbar. Allgemein kann man feststellen, dass bei Originalfunktionen, deren Betrag mit $t \rightarrow \infty$ schnell abfällt, die FT existiert und selbst wieder betragsmäßig gegen Null konvergiert für $|\omega| \rightarrow \infty$.

Satz 1.1 Existiert $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$, so existiert die Fouriertransformierte $F(i\omega)$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$. $F(i\omega)$ ist dann beschränkt und stetig; Es gilt $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} |F(i\omega)| = 0$.

1.1.3 Rechengesetze und Eigenschaften der Fouriertransformation

Wenn die Originalfunktion eine Symmetrie bezüglich des Koordinatenursprunges besitzt, kann diese wie bei den Fourierreihen ausgenutzt werden, und man erhält vereinfachte Formeln.

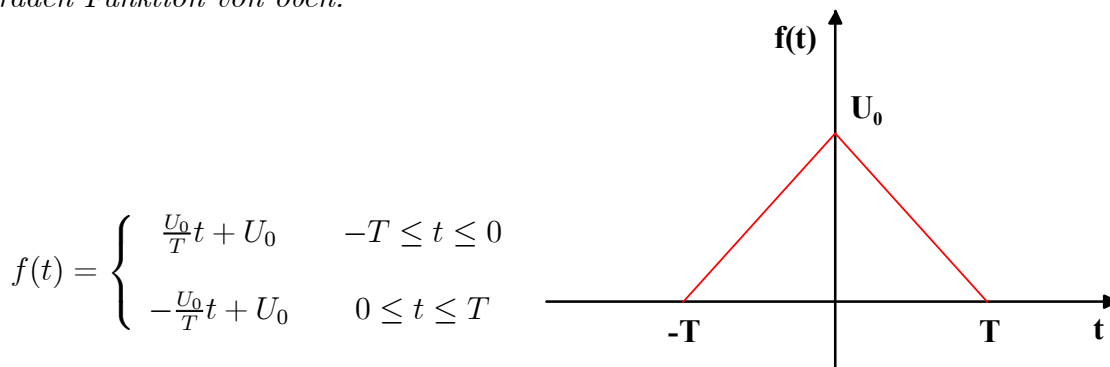
1. Sei $f(t)$ fouriertransformierbar und gerade, d.h. $f(t) = f(-t)$. Dann gilt:

$$\mathcal{FT}(f(t)) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

2. Sei $f(t)$ fouriertransformierbar und ungerade, d.h. $f(t) = -f(-t)$. Dann gilt:

$$\mathcal{FT}(f(t)) = -2i \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Beispiel 1.4 Nutzung von Nr. 1 zur Berechnung der Fouriertransformierten der geraden Funktion von oben:



$$f(t) = \begin{cases} \frac{U_0}{T}t + U_0 & -T \leq t \leq 0 \\ -\frac{U_0}{T}t + U_0 & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{FT}(f(t)) &= 2U_0 \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cos \omega t dt \quad (\text{partielle Integration, TR oder Tabelle}) \\ &= 2U_0 \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \frac{1}{\omega} \sin \omega t - \frac{1}{T\omega^2} \cos \omega t \right]_0^T \\ &= 2U_0 \left[0 - \frac{1}{\omega} \sin 0 - \frac{1}{T\omega^2} (\cos \omega T - \cos 0) \right] \\ &= \frac{2U_0}{T\omega^2} [1 - \cos \omega T] \end{aligned}$$

Rechengesetze der Fouriertransformation

Aufgrund der Eigenschaften von Integralen und Grenzwerten kann man viele interessante Eigenschaften der FT finden. Von den folgenden werden bei uns insbesondere der Additionssatz, der Verschiebungssatz und der Faltungssatz zur Lösung der Aufgaben angewendet.

Es sei $F(i\omega) = \mathcal{FT}(f(t)); \quad G(i\omega) = \mathcal{FT}(g(t))$

1. Additionssatz:

$$\mathcal{FT}(af(t) + bg(t)) = aF(i\omega) + bG(i\omega); \quad a, b \in \mathbb{C}$$

Interpretation: Soll eine Linearkombination von Funktionen fouriertransformiert werden, so kann jeder Summand einzeln transformiert werden. Konstante Faktoren können aus der Transformation herausgezogen werden.

2. Verschiebungssatz:

$$\mathcal{FT}(f(at + b)) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{ib\omega}{a}} F\left(\frac{i\omega}{a}\right); \quad a \neq 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Den Verschiebungssatz werden wir speziell für den Fall $a = 1$ benutzen:

$$\mathcal{FT}(f(t + b)) = e^{ib\omega} F(i\omega); \quad b \in \mathbb{R}$$

D.h. eine Verschiebung der Funktion im Originalbereich um b (nach links) ergibt im Bildbereich die Multiplikation der FT mit $e^{ib\omega}$.

3. Dämpfungssatz*:

$$\mathcal{FT}(e^{ibt} f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{i\omega - b}{a}\right); \quad a > 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{C}$$

4. Faltungssatz:

$$\exists \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt$$

$$\Rightarrow \quad \exists \quad a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau : \quad \text{Faltung,}$$

$$\mathcal{FT}(a(t)) = F(i\omega) \cdot G(i\omega)$$

Produkte im Integranden sind i.Allg. nur über die Regel der partiellen Integration auswertbar. Besonders schwierig wird es, wenn ein Faktor dabei noch ein verschobenes Argument enthält. Die Transformation des Faltungsintegrals müsste also

sehr kompliziert sein. Der Faltungssatz sagt das Gegenteil: Es ist „nur“ das Produkt der beiden entsprechenden Fouriertransformierten aus dem Integranden. Das Faltungsintegral wird in der Akustik gebraucht, wenn es um die digitalen Erzeugung von Hall und Echos geht sowie zur Anpassung von Klangeigenschaften. Dazu wird die Impulsantwort des Raumes, dessen Klangcharakteristik man übernehmen möchte, mit dem Signal, das man beeinflussen möchte, gefaltet.

5. Integrationsatz*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0 \implies \mathcal{FT} \left(\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right) = \frac{1}{i\omega} F(i\omega)$$

6. Differentiationsatz*:

Ist $f^{(n)}(t)$ fouriertransformierbar, $n \in \mathbb{N}$,
 $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0, \dots, \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f^{(n-1)}(t) = 0$
 $\implies \mathcal{FT}(f^{(n)}(t)) = (i\omega)^n F(i\omega)$

7. Multiplikationsatz*:

Ist $f(t)$ fouriertransformierbar, $n \in \mathbb{N} \implies \mathcal{FT}(t^n f(t)) = i^n F^{(n)}(i\omega)$

8. Parsevalscher Satz*:

$$\exists \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt, \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \implies \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega$$

9. Interpretation in Elektrotechnik / Elektronik:

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ ist die Energie, die ein Signal $f(t)$ in einem Widerstand der Größe 1Ω in Wärme umsetzt.

Tabellen für die Fouriertransformation sind z.B. zu finden in Minöl / 10, in Bronstein: Taschenbuch der Mathematik, in Oberhettinger "Tabellen zur Fouriertransformation". Dabei ist zu beachten, dass in der Literatur die Darstellung der Fouriertransformation mit anderen Vorfaktoren als in der Vorlesung erfolgen kann!

Setzen Sie nun Ihr Studium fort mit dem A-Teil der zugehörigen Übung zur Fouriertransformation. Die Videos der Übungsvorlesung zur Fouriertransformation kommen nächste Woche. Dort wird erklärt, wie wir mit Hilfe der Liste der 3 FT und den Rechenregeln die belegrelevanten Aufgaben lösen können.

1.1.4 Anwendung der Fouriertransformation

Die Anwendungen der Fouriertransformation sind sehr vielfältig in Naturwissenschaft, Technik und Mathematik, so dass zu den Einzelheiten auf die speziellen Fachgebiete verwiesen werden muss. Es seien stellvertretend genannt:

- Analyse und Synthese von Signalen
- Untersuchungen von linearen Systemen, z.B. zur Dimensionierung von Filtern....
- Lösung von partiellen Differentialgleichungen mit Anfangs- oder Randwerten
- schnelle Lösung spezieller linearer Gleichungssysteme
- Berechnung von uneigentlichen Integralen
- digitale Bildverarbeitung
- Datenkompression: (Anhand der letzten beiden Punkte können Sie sehen, dass gerade in der heutigen Zeit die Anwendung der Fouriertransformation noch einmal stark an Bedeutung hinzugewonnen hat - und ein Ende ist bisher nicht absehbar!)
- Beweis des Abtasttheorems:

Satz 1.2 *Es sei $f(t)$ eine mit Ω bandbegrenzte, d.h. $F(i\omega) \equiv 0$ für $|\omega| > \Omega$, stetige, stückweise glatte, absolut integrierbare Funktion. Gilt weiter $\int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|dt < \infty$ und $\Delta t = T = \frac{\pi}{\Omega}$, so lässt sich $f(t)$ darstellen mit*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \operatorname{si}(\Omega(t - nT)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{\pi}{\Omega}\right) \operatorname{si}(\Omega t - n\pi); \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die auftretende Reihe heißt Kardinalreihe. Das Besondere in diesem Fall ist, dass hier tatsächlich ein „=“ in der Formel steht, also tatsächlich die Funktion exakt durch die Kardinalreihe dargestellt wird! Die Bedingung $F(i\omega) \equiv 0$ für $|\omega| > \Omega$ ist in der Technik erfüllt: Signale mit unendlich großen Frequenzen gibt es nur in der Theorie. Die Ingenieure sprechen von einem frequenzbandbegrenzten Spektrum. Damit ist gesichert, dass sich das Signal aus den abgetasteten Werten $f(nT) = f(n\Delta t)$ zusammensetzen lässt. Die sogenannte Abtastperiode ist dann $T = \frac{\pi}{\Omega}$.

Fakultativer Abschnitt:

Da mein Fachgebiet die Mathematik ist, lassen Sie mich ein mathematisches Beispiel einfügen.

Beispiel 1.5 Berechnung von uneigentlichen Integralen*)

Wir benutzen

$$r_T(t) = \begin{cases} 1 & -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit der FT } F(i\omega) = 2T \operatorname{si}(T\omega).$$

mit $T = 1$ und die Rechenregel Nr. 8, den Satz von Parseval:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \int_{-1}^1 1 dt = 2 \quad (r_T(t) \text{ einsetzen}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega \quad (RR \text{ Nr. 8}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega} \right|^2 d\omega, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2} d\omega = \pi.$$

Diese Integral ist nach Definition der uneigentlichen Integrale sehr schwierig zu berechnen. Hier fällt es als „Abfallprodukt“ einfach so mit an...

[Ende des fakultativen Abschnittes](#)

Ist die Fouriertransformation ausführbar für eine bestimmte Funktion, so existiert eine **eindeutige Abbildung zwischen der Originalfunktion und der Bildfunktion**. Somit spielt es keine Rolle, ob man mit der Originalfunktion oder der Fouriertransformierten arbeitet. Daraus ergibt sich ein Vorteil: Berechnungen, die in einem der beiden Bereiche schwierig sind, können in den jeweils anderen Bereich verlegt werden. Damit tritt i.Allg. eine Vereinfachung der Rechnung ein.

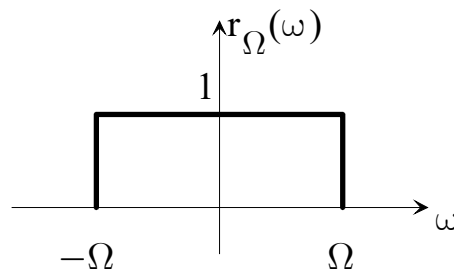
Das nutzt man z.B. bei der Filterung. Im Zeitbereich ist es völlig unklar, wie Teile des Signals ausgeschlossen werden sollen, da die Signale aus der Überlagerung vielen Teilsignalen unterschiedlicher Frequenzen bestehen und sich die Realisierung des Signals i.Allg. über die gesamte Zeitachse erstrecken. Jeder einzelne Punkt des Signals $f(t)$ im Zeitbereich ist also eine Summe der Wirkungen der Einzelschwingungen. Wie soll man dort einzelne Frequenzen ausschließen?? - Im Frequenzbereich ist das hingegen ganz einfach zu realisieren: Die Fouriertransformierte wird bei den auszuschließenden Frequenzen einfach Null gesetzt. Dann sind diese Frequenzen nicht mehr im Signal enthalten.

Beispiel 1.6 Ein ideales Tiefpassfilter lässt nur niedrige Frequenzen („tiefe Töne“) passieren, sperrt also Frequenzen mit $|\omega| > \Omega$. Im Frequenzbereich kann das leicht

realisiert werden, indem man die Fouriertransformierte $F(i\omega)$ des zu filternden Signales $f(t)$ mit der Funktion $G(i\omega)$ multipliziert:

$$G(i\omega) = r_\Omega(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega| < \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit}$$

$$g(t) = \mathcal{FT}^{-1}(G(i\omega)) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{FT}^{-1}(G(i\omega)) = g(t)$$



\mathcal{FT}^{-1} wird als inverse Fouriertransformation bezeichnet und realisiert den Übergang vom Frequenzbereich in den Zeitbereich. Beim Tiefpassfilter wird also die Fouriertransformierte des Signals außerhalb des Bereiches $[-\Omega, \Omega]$ ausgeblendet, weil dort der Faktor $r_\Omega(\omega) = 0$ ist. Das gefilterte Signal $f(t)$ im Zeitbereich erhält man dann durch die inverse Fouriertransformation von $F(i\omega) \cdot G(i\omega) = F(i\omega) \cdot r_\Omega(\omega)$. Eine direkte Berechnung der inversen Fouriertransformation ist für uns nicht möglich, da die dazu notwendige Mathematik nicht vermittelt wurde. Aber wir können Tabellen und Rechengesetze in der entgegengesetzten Richtung dafür benutzen. Für die Rücktransformation verwendet man hier nun den Faltungssatz:

$$\mathcal{FT}(a(t)) = F(i\omega) \cdot G(i\omega)$$

$$a(t) = \mathcal{FT}^{-1}(F(i\omega) \cdot G(i\omega)) \quad \text{mit}$$

$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau = (f * g)(t) : \quad \text{Faltung, RR Nr. 4}$$

D.h. um das gefilterte Signal $a(t)$ im Zeitraum zu bestimmen, benötigen wir die Funktion $g(t)$, von der bekannt ist

$$\mathcal{FT}(g(t)) = G(i\omega) = r_\Omega(\omega)$$

Fakultativer Abschnitt:

Bestimmung von $g(t)$:

Wir kennen die Fouriertransformation der Funktion $r_\Omega(t)$ aus unserer kleinen Tabelle der Fouriertransformierten, Nr. 1 mit $T = 2\Omega, U_0 = 1$:

$$\mathcal{FT}(r_\Omega(t)) = 2\Omega \text{si}(\Omega\omega), \quad \text{d.h. wegen der Linearität des Integrals gilt}$$

$$\mathcal{FT}\left(\frac{1}{2\Omega}r_\Omega(t)\right) = \text{si}(\Omega\omega) = H(\omega)$$

Aus der Definition der Fouriertransformation kann man die sogenannte „Symmetrieregeln“ für $H(t)$ ableiten:

$$\begin{aligned}\mathcal{FT}(H(t)) &= 2\pi \cdot h(-\omega) \text{ mit } \mathcal{FT}(h(t)) = H(\omega), \text{ d.h.} \\ h(t) &= \frac{1}{2\Omega} r_{\Omega}(t)\end{aligned}$$

Da $r_{\Omega}(\omega)$ eine gerade Funktion ist, gilt weiter

$$\begin{aligned}\mathcal{FT}(si(\Omega t)) &= \mathcal{FT}(H(t)) \\ &= 2\pi \cdot h(-\omega) \\ &= 2\pi \cdot h(\omega) \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2\Omega} r_{\Omega}(\omega) \\ &= \frac{\pi}{\Omega} r_{\Omega}(\omega), \text{ d.h.} \\ \mathcal{FT}\left(\frac{\Omega}{\pi} si(\Omega t)\right) &= r_{\Omega}(\omega)\end{aligned}$$

Ende des fakultativen Abschnittes

Wir erhalten

$$\begin{aligned}g(t) &= \mathcal{FT}^{-1}(G(i\omega)) = \\ &= \mathcal{FT}^{-1}(r_{\Omega}(\omega)) = \frac{\Omega}{\pi} si(\Omega t)\end{aligned}$$

↷ Die Bestimmung des Ausgangssignals im Zeitbereich erfolgt dann entsprechend:

$$y(t) = x(t) * g(t) = x(t) * \frac{\Omega}{\pi} si(\Omega t).$$

Wenn man mit der Faltung umgehen kann, ist es also möglich, das resultierende Zeitsignal einer Tiefpassfilterung zu berechnen. Die Faltung kann aber nur in wenigen einfachen Fällen analytisch berechnet werden. Deshalb wurden dafür numerische Algorithmen entwickelt, die heute einen vielfältigen Einsatz in der Technik finden und dort relativ einfach zu bedienen sind. Hinter Ihrem technischen Equipment im Studio stecken also tiefliegende mathematische Erkenntnisse.

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Fouriertransformation interessante Anwendungen besitzt, die aber etwas mathematisches Wissen voraussetzen, um sie richtig

ausnutzen zu können. Insofern ist es nötig, dass man auch möglichst viele Fouriertransformierte kennt, die man dann in die Rechnung einbeziehen kann. Die Konvergenzbedingung für die Existenz der Fouriertransformierten:

$$\exists \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

ist nun aber relativ streng. Bereits für $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$ ist sie nicht erfüllt, denn es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \int_0^{\infty} 1 dt = \text{„}\infty\text{“}.$$

Diese Ergebnis „ ∞ “ nützt uns deshalb nichts, weil es für sehr viele Funktionen bei der Fouriertransformation entsteht und damit die Eineindeutigkeit der Transformation verloren geht. Man erhält also keine Funktion $F(iw)$ und kann auch keine Rücktransformation ausführen. Damit ist das Einsatzgebiet der Fouriertransformation leider stark beschränkt. Es gibt zwei Möglichkeiten, dieses Problem zu lösen:

1. die Erweiterung der Klasse der betrachteten Funktionen auf die Distributionen und
2. die Veränderung des Integranden, so dass das uneigentliche Integral für mehr Funktionen der üblichen Art konvergiert.

Variante 2 führt zur Laplacetransformation, die speziell in der Elektrotechnik eine breite Anwendung findet. (s. nächstes Kapitel, das aber komplett fakultativ ist)

Variante 1:

Ich möchte den folgenden Abschnitt nicht komplett als fakultativ bezeichnen, da ich Ihnen in der Übungsvorlesung einige wenige Beispiele dazu zeigen möchte. Es ist ein informativer Abschnitt für Sie, d.h. bitte lesen, die Eckpunkte herausnehmen, auch wenn die Rechnung manchmal nicht komplett verstanden wird, und für den „Aha-Effekt“ sorgen, wenn z.B. die δ -Distribution einmal in einem anderen Modul auftaucht. Sie wird benötigt, um konstante Funktionen fouriertransformieren zu können. Das kommt in der Praxis gar nicht so selten vor, da bei der Höhenverschiebung einer Funktion eine Konstante addiert wird.

Die Distributionen sind verallgemeinerte Funktionen, deren exakte Definition über lineare Funktionale den Rahmen dieser Vorlesung sprengen würde. Der bekannteste Vertreter der nichtregulären Distributionen ist die Diracsche δ -Distribution, in der Technik oft auch „Dirac-Impuls“ genannt.

Fakultativer Abschnitt:

Sie dient z.B. zur korrekten Formulierung von kurzzeitig wirkenden Störfunktionen in der Theorie der Differentialgleichungen und ist in der Physik und der Technik sehr verbreitet. Wirkt der bekannte Gesamtimpuls $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$ in einer kurzen Zeitspanne $[t_0, t_1 = t_0 + \varepsilon]$ (z.B. bei Punktkräften), kann man zur Beschreibung einer Impulsfunktion folgender Art verwenden

$$\delta(t - t_0, \varepsilon) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } t_0 < t < t_0 + \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Konzentriert man den Impuls auf $t = t_0$, dann müsste

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(t - t_0, \varepsilon) = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 1/\varepsilon = \text{„}\infty\text{“} & \text{für } t = t_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Funktion definieren, was mathematisch keinen Sinn macht. Insofern wird die δ -Distribution hier durch ihre mathematischen Eigenschaften charakterisiert:

Ende des fakultativen Abschnittes

Es gilt mit

$$\delta(t - t_0, \varepsilon) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } t_0 < t < t_0 + \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(t - t_0, \varepsilon) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1, \quad (*) \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(t - t_0, \varepsilon) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} f(t) \frac{1}{\varepsilon} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (F(t_0 + \varepsilon) - F(t_0)) \\ &= f(t_0). \quad (**) \end{aligned}$$

In verschiedenen Büchern können Sie andere Funktionen finden, die in der Definition von $\delta(t - t_0, \varepsilon)$ auftreten. Das führt aber zum selben Ergebnis, solange die Fläche zwischen $\delta(t - t_0, \varepsilon)$ und der t -Achse den Wert 1 ergibt.

Verständnisaufgabe: Zeichnen Sie die Funktion $\delta(t-t_0, \varepsilon)$, schraffieren Sie die Fläche unter der Funktion. Wie groß ist die Fläche dieses Rechtecks? Überlegen Sie sich, wie sich die Zeichnung verändert, wenn ε kleiner wird, z.B. halbiert wird. Wie hoch ist dann das Rechteck? Welchen Flächeninhalt hat es?

Es gilt zu beachten, dass die in der obigen Rechnung auftretenden Integrale ebenfalls einer Erweiterung bedürfen, die hier nicht weiter verfolgt werden soll.

Die damit erreichten Ergebnisse (*) und (**) sind aber erstaunlich! Sie werden dadurch erzielt, dass der Grenzübergang in einer ganz bestimmten Art und Weise durchgeführt wird. Durch diese Eigenschaften der δ -Distribution können nun einige spezielle Funktionen doch noch fouriertransformiert werden.

Beispiel 1.7 Für die δ -Distribution selbst gilt wegen (**) an der Stelle $t_0 = 0$

$$\mathcal{FT}(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \delta(t) dt = e^{-i\omega \cdot 0} = 1$$

und folglich

$$\mathcal{FT}^{-1}(1) = \delta(t).$$

Beispiel 1.8 Damit lässt sich nun auch die Funktion $f(t) \equiv 1$ fouriertransformieren.

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \mathcal{FT}^{-1}(1) \quad (\text{Anwendung der Definition der inversen FT}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

Dieses Integral können wir eigentlich nicht ausrechnen, weil es bezüglich der komplexen Variablen ausgeführt werden muss. Mit einem Trick gelingt es aber dann doch:

Fakultativer Abschnitt:

Mit der Variablensubstitution $\omega' = t$ und $t' = -\omega$ kann dieses Integral auf die Form der Fouriertransformierten der Funktion $f(t) \equiv 1$ umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \delta(\omega') &= \frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} 1 \cdot \exp(i(-t')\omega')(-dt') \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \exp(-it'\omega') dt' \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{FT}(1), \end{aligned}$$

woraus durch Umstellen der Gleichung folgt:

Ende des fakultativen Abschnittes

$$\mathcal{FT}(1) = 2\pi \cdot \delta(\omega).$$

Diese beiden Ergebnisse bitte mit in Ihre private Tabelle der Fouriertransformierten aufnehmen, sind sehr wichtig für spätere Module, sind aber bei mir nicht prüfungsrelevant.

Beispiel 1.9 Das letzte Beispiel nutzt man nun zur Transformation von Sprungfunktionen, beispielsweise für

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Identität $s(t) = 0.5 + 0.5\text{sgn}(t)$ ist bis auf die Stelle $t = 0$ erfüllt, die aber bei der Integration keine Wirkung hinterlässt, da das Integral über einen Punkt stets Null ergibt. Damit ergibt sich: (Die Fouriertransformierte der Signumfunktion behandeln wir der Übung.)

$$\begin{aligned} \mathcal{FT}(s(t)) &= \mathcal{FT}(0.5) + \mathcal{FT}(0.5\text{sgn}(t)) \\ &= 0.5 \cdot 2\pi\delta(\omega) + 0.5 \cdot \frac{2}{i\omega} \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}. \end{aligned}$$

Fakultativer Abschnitt:

Diese neuen Möglichkeiten werden z.B für **LTI-Systeme** angewendet:

Als ein lineares zeitinvariantes System (LTI-System von linear time invariant system) wird ein Modell für einen Teil aus Natur oder Technik bezeichnet, wenn die darin auftretenden Abbildungen linear und unabhängig von zeitlichen Verschiebungen sind. Es besteht aus inneren Zustandsgrößen und einer Dynamik, die die zeitliche Entwicklung dieser Zustandsgrößen beschreibt.

Mathematisch wird das durch eine lineare Transformation g zwischen den Eingangssignalen $e_i(t)$ und Ausgangssignalen $a_i(t)$ beschrieben:

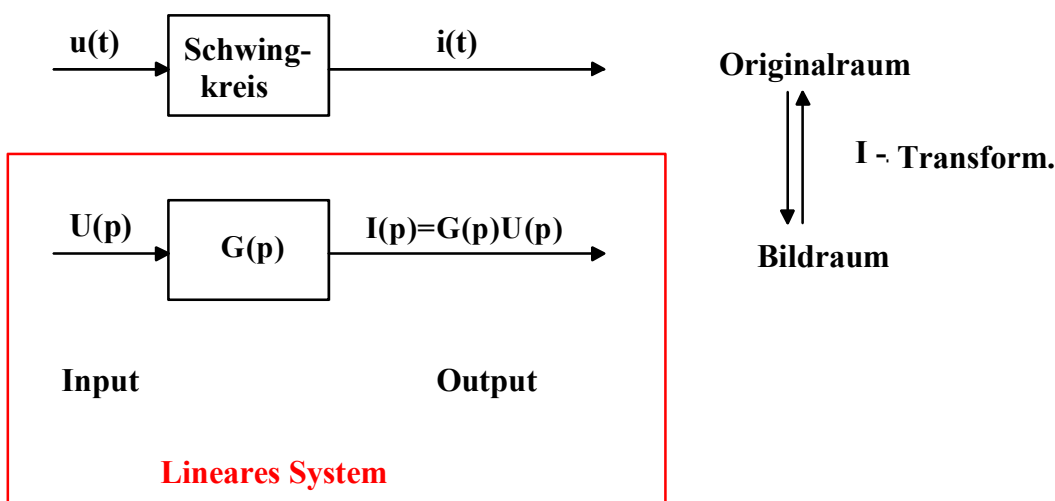
$$g\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i e_i(t)\right) = \sum_{i=1}^n \gamma_i (g(e_i(t))) = \sum_{i=1}^n \gamma_i a_i(t)$$

g wird Übertragungsfunktion des Systems genannt. D.h. die Superposition der Eingangssignale führt im Ausgang zu einer Superposition der einzeln transformierten Eingangssignale. Die Zeitinvarianz bedeutet in dieser Notation:

$$g(e(t - t_0)) = a(t - t_0)$$

Das heißt, auf ein verzögertes Eingangssignal liefert das System ein gleiches, entsprechend verzögertes Ausgangssignal. Einige LTI-Systeme lassen sich z.B. durch lineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben. Damit sind diese Systeme aber der Systemanalyse leicht zugänglich.

Viele technische Systeme in der Nachrichten- oder Regeltechnik, wie z.B. Übertragungssysteme, sind in guter Näherung LTI-Systeme. Im Zusammenhang mit den Integraltransformationen findet sich dort die Übertragungsfunktion G im Spektralbereich wieder, wie z.B. in bei der Modellierung eines elektrischen Schwingkreises mit der Spannung $u(t)$ als Eingangsgröße und der Stromstärke $i(t)$ als Ausgang. Der Schwingkreis selbst wird durch eine Funktion $g(t)$ vertreten, die die Umwandlung des Eingangssignals in das Ausgangssignal ausführt. Die Modellierung im Frequenzbereich ist dabei günstig, wenn man Systeme mit einem bestimmten Frequenzverhalten konstruieren möchte:



Es sei nun

$$e(t) = x(t) \circ \bullet X(i\omega),$$

(d.h. zu $x(t)$ gehört die FT $X(i\omega)$)

$$a(t) = y(t) \circ \bullet Y(i\omega)$$

und

$$g(t) \circ \bullet G(i\omega)$$

Mit $Y(i\omega) = G(i\omega)X(i\omega)$ folgt dann aus dem Faltungssatz der Fouriertransformation

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{FT}^{-1}(G(i\omega)X(i\omega)) \\ &= (g * x)(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)x(t - \tau)d\tau \end{aligned}$$

Nach der Anregung des Systems mit der Diracschen δ -Distribution

$$e(t) = x(t) = \delta(t) \circ \bullet 1$$

folgt

$$y(t) = \mathcal{FT}^{-1}(G(i\omega) \cdot 1) = g(t).$$

D.h., das Ausgangssignal, die Antwort des Systems im Zeitbereich, entspricht $g(t)$. Deshalb wird die Funktion $g(t)$ als Impulsantwort bezeichnet. [Ende des fakultativen Abschnittes](#)

1.2 *Laplace transformation(fakultativ)

Eine Wichtung des Integranden in der Fouriertransformation mit $e^{-\sigma t}$ dämpft das Wachstum des Integranden bei $\sigma > 0$. Die Chance, dass das Integral existiert, wird größer:

$$\begin{aligned} F_{\sigma}(i\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}e^{-\sigma t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt \end{aligned}$$

Wir betrachten nun Funktionen $u(t)$ mit $u(t) \equiv 0, \quad \forall t < 0$ (Einschaltvorgänge). Damit geht $F_{\sigma}(i\omega)$ mit $p = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$ über in

$$\begin{aligned} F_{\sigma}(i\omega) &= \int_0^{\infty} u(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt \\ &= \int_0^{\infty} u(t)e^{-pt}dt \\ &= U(p). \end{aligned}$$

$U(p)$ ist im Allgemeinen eine komplexwertige Funktion, eine Abbildung von \mathbb{R}^+ in \mathbb{C} .

2 Ausgewählte Probleme der Numerik

Sehr geehrte Studierende, Sie kennen jetzt die grundlegenden Funktionen des Programmsystems Matlab. Zusätzlich dazu enthält es eine Vielzahl von Toolboxen, die sich mit speziellen Problemen der Mathematik und der Technik beschäftigen, wie z.B. der Lösung von Optimierungsproblemen, der Messwertaufnahme und -verarbeitung, der Lösung von Problemen der künstlichen Intelligenz, der Fouriertransformation und vieler anderer mehr. Dazu werden Methoden der Numerik eingesetzt, d.h. die Probleme werden nicht exakt, nicht analytisch gelöst, sondern mit Hilfe von Rechnungen mit Zahlen. Daher der Name numerische Mathematik.

Nun ist die Zahldarstellung von reellen Zahlen im Computer immer ungenau, da reelle Zahlen unendlich viele Nachkommastellen haben können, wie z.B. die Zahl π , im Rechner aber nur endlich viele Stellen zur Verfügung stehen. Schon allein daraus resultieren Fehler bei der numerischen Bearbeitung eines Problems. Durch die Aufbereitung der mathematischen Probleme für die Numerik kommen weitere Fehlerquellen dazu.

Am Ende muss man sich eigentlich wundern, dass die Ergebnisse trotzdem mehrheitlich brauchbar sind. Aber denken Sie bitte an den (ungeliebten) Aufwasch: mit schmutzigem Geschirr, schmutzigem Wasser und schmutzigen Tüchern wird am Ende doch ausreichend sauberes Geschirr hervorgebracht. - Man muss nur einige Regeln dabei beachten. Ähnlich funktioniert es in der Numerik. Wenn Sie diese Regeln einhalten, werden Sie erfolgreich sein. Man sollte aber trotzdem in der Numerik immer die Ergebnisse auf Plausibilität prüfen und niemals in den Glauben verfallen, dass der Rechner wegen der maschinellen Abarbeitung stets richtige Ergebnisse produziert.

In dem folgenden Kapitel möchte ich Sie auf die Stellen aufmerksam machen, an denen es Probleme geben kann. Ich habe als Beispiele meist eine vierstellige Arithmetik gewählt, damit die Effekte schneller zu sehen sind. Matlab rechnet mit 16 Stellen, entsprechend später treten dann solche Erscheinungen auf. Aber ganz verhindern lassen sie sich nicht. Hat man z.B. sehr große lineare Gleichungssysteme mit mehreren Millionen Unbekannten, kann man niemals von einer „exakten“ numerischen Lösung sprechen. Vieles in diesem Kapitel ist fakultativ und dient der Begründung der Effekte. Nehmen Sie trotzdem ruhig manchmal Ihren Taschenrechner hervor und probieren Sie die Beispiele aus. Das überzeugt.

*) bezeichnet fakultative Abschnitte

2.1 Grundlagen

In der Wissenschaft und der Technik gibt es zahlreiche Probleme, die exakt bzw. mit analytischen Methoden nicht oder nur sehr aufwendig lösen lassen. Als Beispiele seien hier genannt:

- das Gauß'sche Fehlerintegral als ein bestimmtes Integral, für das keine analytische Stammfunktion existiert,
- die Lösung nichtlinearer Gleichungen,
- die Suche von Nullstellen höhergradiger Polynome,
- die Lösung sehr großer linearer Gleichungssysteme oder
- die Lösung von Differentialgleichungen oder Differentialgleichungssystemen mit Anfangs- und/oder Randwerten.

Das führte zur Entwicklung von speziellen Verfahren, die die Lösungen der Probleme annähern. Für die Durchführung dieser Verfahren werden heute Computer eingesetzt. Allerdings steht dort nur eine Zahldarstellung mit endlicher Stellenzahl zur Verfügung, was zu Rechenfehlern führt.

Hauptgegenstand der Numerischen Mathematik:

1. Bereitstellung von Lösungsverfahren für Probleme aus Algebra und Analysis
2. Untersuchung der Eigenschaften dieser Algorithmen
3. Umsetzung der Algorithmen auf dem Rechner

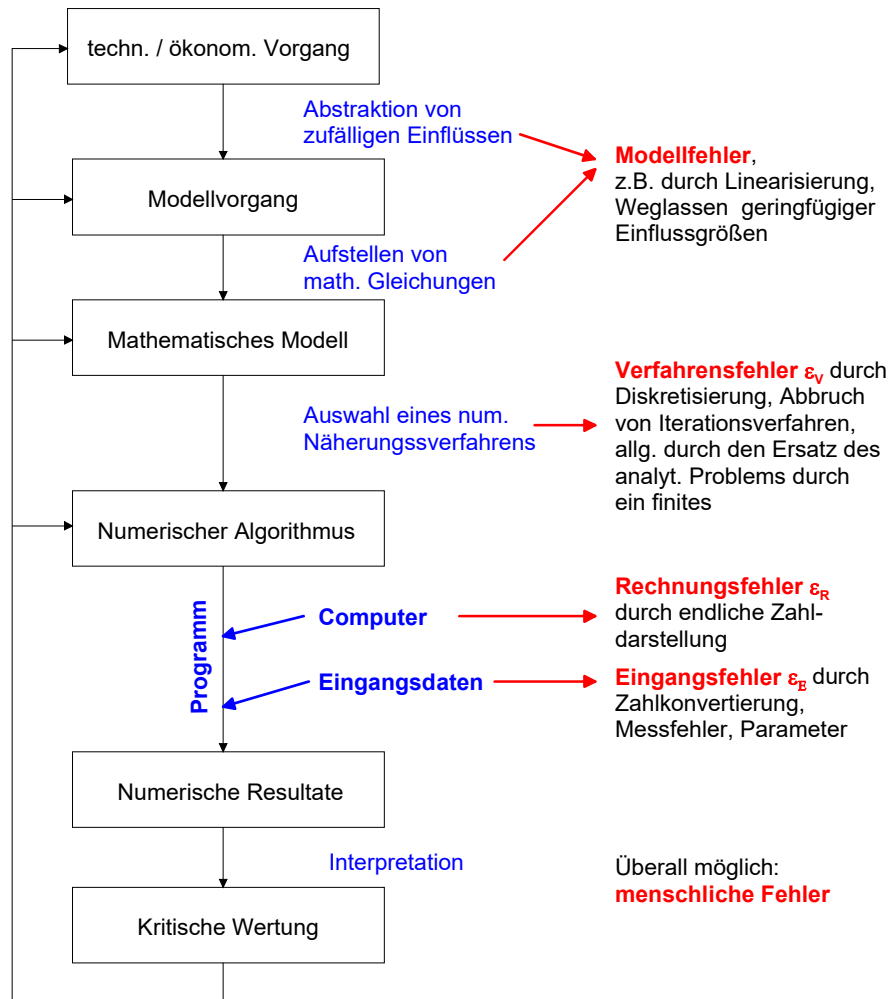
Die Algorithmen müssen dabei folgende Bedingungen erfüllen:

- Allgemeinheit für eine bestimmte Aufgabenklasse
- Determiniertheit: Schritte und Reihenfolge der rationalen Rechenoperationen sind eindeutig bestimmt
- Endlichkeit: Nach einer bestimmten Anzahl von Schritten erreicht man eine brauchbare Näherungslösung oder der Algorithmus bricht ab.

Es entwickelte sich im Laufe der Zeit eine enge Wechselbeziehung zwischen der Entwicklung der Numerik und der Rechentechnik, z.B. bezüglich der Sprachentwicklung, der Speicherbereichsentwicklung, Geschwindigkeitsanforderungen, Visualisierung der Ergebnisse...

2.2 Fehleranalyse

Fehler können an vielen Stellen des Lösungsprozesses auftreten. Es ist wichtig, sie und ihren Einfluss auf die Lösung zu kennen (**wichtig!**)



Es gelten dabei folgende Definitionen:

Definition 2.1 *Verfahrensfehler = exakte Lösung - Näherungslösung, wobei äußere Einflüsse, wie z.B. ungenaue Eingangsdaten oder die endliche Zahlendarstellung außen vor bleiben.*

Definition 2.2 *$|\text{Gesamtfehler}| = |\text{exakte Lösung} - \text{Näherungslösung}| \leq \epsilon_V + \epsilon_R + \epsilon_E$ (d.h. unter Beachtung aller Einflüsse!)*

2.2.1 Definition von Fehlergrößen

Absoluter und relativer Fehler (*bekannt aus Schule bzw. Semester 1*)

Es sei a : die gesuchte Zahl, a^* : ein Näherungswert dafür.

$$\begin{aligned} \text{wahrer Fehler von } a : \quad \Delta a &= a^* - a \\ \text{absoluter Fehler von } a : \quad |\Delta a| &= |a^* - a| \end{aligned}$$

Beide Größen sind nicht exakt angebar, da a i. Allg. nicht bekannt ist. Deshalb sucht man dafür Abschätzungen oder obere Schranken:

$$\begin{aligned} |a^* - a| \leq K_a &\iff -K_a \leq a^* - a \leq K_a \\ &\iff a^* - K_a \leq a \leq a^* + K_a \end{aligned}$$

K_a heißt absoluter Höchstfehler. Zum Vergleich der Qualität von Näherungsverfahren benutzt man häufig relative Fehler, um die Größe des Fehlers besser einschätzen zu können, z.B.

$$\begin{aligned} \text{den relativen Fehler von } a : \quad \rho_a &= \frac{|a^* - a|}{|a|} \\ \text{den relativen Höchstfehler } R_a \text{ von } a : \quad \frac{|a^* - a|}{|a|} &\leq R_a; \quad R_a > 0 \\ \text{den prozentualen Höchstfehler von } a : \quad P_a &= 100 \cdot R_a \cdot \% \\ \text{(wichtige Formeln, aber hoffentlich bekannt)} \end{aligned}$$

Beispiel 2.1 Man messe auf einen Millimeter genau $a_1 = 1m$ und $a_2 = 10cm$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |\Delta a_1| &= 1mm = |\Delta a_2|, \quad \text{aber} \\ \frac{|\Delta a_1|}{|a_1|} &= 0.\overline{001} \triangleq 0.1\% \\ \frac{|\Delta a_2|}{|a_2|} &= 0.\overline{1} \triangleq 11.1\%. \end{aligned}$$

Da a unbekannt ist, muss man aber bei der Abschätzung des relativen Fehlers im Nenner a^* statt a verwenden.

Fakultativer Abschnitt:

Welche Auswirkungen hat das?*)

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \left| \frac{\Delta a}{a^*} \right| = \left| \frac{\Delta a}{\Delta a + a} \right| = \left| \frac{\frac{\Delta a}{a}}{\frac{\Delta a}{a} + \frac{a}{a}} \right| = \rho_a \cdot \frac{1}{1 + \rho_a} \quad \curvearrowright \\ \rho_a &= \frac{\tilde{\rho}}{1 - \tilde{\rho}} = \tilde{\rho} (1 + \tilde{\rho} + \tilde{\rho}^2 + \dots) \quad (\text{Summe geom. Reihe!}) \\ &= \tilde{\rho} + \tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}^3 + \dots \end{aligned}$$

Die Benutzung von $\tilde{\rho} = \left| \frac{\Delta a}{a^*} \right|$ an Stelle von $\rho_a = \left| \frac{\Delta a}{a} \right|$ ist damit erlaubt, wenn $\tilde{\rho}^2$ und Glieder noch höherer Ordnung vernachlässigbar klein sind. Das ist dann der Fall, wenn wir voraussetzen, dass gilt:

$$\tilde{\rho} = \left| \frac{\Delta a}{a^*} \right| \ll 1 \quad \leadsto \quad \tilde{\rho} \approx \rho_a.$$

Das Zeichen „ \ll “ bedeutet „klein gegenüber“.

Ende des fakultativen Abschnittes

Beispiel 2.2 $a = \pi$; $a^* = 3.14 \quad \leadsto \quad |\Delta a| = |3.14 - \pi| \leq 0.0016 = K_\pi$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \left| \frac{\Delta a}{a^*} \right| \leq \frac{0.0016}{3.14} = 0.000509554 \approx 0.00051 = \tilde{R}_\pi \triangleq 0.051\% = \tilde{P}_\pi \\ \rho_a &= \left| \frac{\Delta a}{a} \right| \leq \frac{0.0016}{\pi} = 0.000509296 \approx 0.00051 = \tilde{\rho} \end{aligned}$$

2.2.2 Rundungsfehler/Rechnungsfehler

Fakultativer Abschnitt:

*) Sei $a \in \mathbb{R}$; $a_i \in \mathbb{N}$; $0 \leq a_i \leq 9$; $i \leq n$; $a_n \neq 0$.

Dann hat a folgende normalisierte Gleitpunktdarstellung:

$$\begin{aligned} a &= \pm(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_{n-t+1} \cdot 10^{n-t+1} + a_{n-t} \cdot 10^{n-t} + \dots) \\ &= \pm 0.a_n a_{n-1} \dots a_{n-t+1} a_{n-t} \dots \cdot 10^{n+1} \end{aligned}$$

Im Rechner steht nur eine endlichen Teilmenge der rationalen Zahlen zur Verfügung

\leadsto Rundung von a auf a^* :

$$\begin{aligned} a^* &= \pm(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_{n-t+1} \cdot 10^{n-t+1}) \\ &= \pm 0.a_n a_{n-1} \dots a_{n-t+1} \cdot 10^{n+1} \end{aligned}$$

Damit hat a^* t tragende Ziffern, d.h. a^* ist t -stellig.

Ende des fakultativen Abschnittes

Es gilt folgende Rundungsvorschrift auf t tragende Ziffern:

- 1) Ist $a_{n-t} < 5 \quad \leadsto \quad a_{n-t+1}$ bleibt unverändert
 - 2) Ist $a_{n-t} \geq 5 \quad \leadsto \quad a_{n-t+1} := a_{n-t+1} + 1$
- (wichtig, aber eigentlich bekannt)

Der absolute Fehler $|a^* - a|$ heißt Rundungsfehler von a . Es gilt $|a^* - a| \leq 0.5 \cdot 10^{n-t+1}$. Eine **Ziffer heißt sicher**, wenn sie in der Gleitkommadarstellung der Zahl genau wie in

der Originalzahl auftritt oder wenn bei der ersten verschiedenen Ziffer der Unterschied im Dezimalsystem < 5 ist.

Fakultativer Abschnitt:

*) Setzt man voraus, dass die letzte tragende Ziffer sicher ist, ergibt sich bei t tragenden Ziffern für den relativen Fehler:

$$\frac{|a^* - a|}{|a|} \leq \frac{\text{maximaler absoluter Fehler}}{\text{kleinste darstellbare Zahl}} = \frac{0.5 \cdot 10^{n-t+1}}{0.1 \cdot 10^{n+1}} = 5 \cdot 10^{-t}.$$

Beispiel 2.3 *Rundung auf $t = 4$ tragende Ziffern:*

$$\begin{aligned} 0.012358 &\implies 0.01236 = 0.1236 \cdot 10^{-1} \\ 4.2354 &\implies 4.235 = 0.4235 \cdot 10^1 \\ 4.2698 &\implies 4.270 = 0.4270 \cdot 10^1 \\ 3.2355 &\implies 3.236 = 0.3236 \cdot 10^1 \\ 42354 &\implies 0.4235 \cdot 10^5 \\ 42698 &\implies 0.4270 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

Ende des fakultativen Abschnittes

Wichtig! *Bei Differenzbildung geschieht nun beispielsweise Folgendes:*

<i>exakte Rechnung</i>	<i>relativer Fehler</i>	<i>Rechnung mit $t = 4$ tragenden Ziffern</i>
$42354 - 42698 = -344$		$0.4235 \cdot 10^5 - 0.4270 \cdot 10^5$ $= -0.0035 \cdot 10^5 = -350$
	$\frac{ a^* - a }{ a } = \frac{ -350 + 344 }{344}$ $= \frac{6}{344} \triangleq 1,74\%$	
$42354 - 42356 = -2$		$0.4235 \cdot 10^5 - 0.4236 \cdot 10^5 = -10$
	$\frac{ a^* - a }{ a } = \frac{8}{2} \triangleq 400\%$	

Merke: Durch Anhäufung von Rundungsfehlern entstehen Rechnungsfehler. Z.B. entfallen durch Stellenauslöschung bei der Subtraktion sichere Ziffern. Eine genaue Verifikation aller Rechenverfahren bringt aber keinen Erfolg, da die Abschätzungen im Allgemeinen zu grob sind.

Gegenmaßnahmen:

- Rechnen mit erhöhter Genauigkeit an kritischen Stellen (evtl. mit verlängerter Mantisse)
- Verwendung von stabilen Algorithmen (s. Kapitel 1.2)

2.2.3 Eingangsfehler und Kondition

Zu berechnen sei eine Größe y in Abhängigkeit von den Eingangsdaten x_1, x_2, \dots, x_n

$$y = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi(\underline{x}). \quad (2.1)$$

Definition 2.3 *wichtig!*

Die Berechnung von $y = \phi(\underline{x})$ heißt korrekt gestelltes Problem, wenn

1. y eindeutig aus den Eingangsgrößen $= (x_1, x_2, \dots, x_n)$ berechenbar ist und, wenn
2. y stetig von den x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ abhängig ist, d.h., wenn kleine Änderungen in den Eingangsdaten auch nur kleine Änderungen in y hervorrufen.

Beispiel 2.4 Die obige Differenzbildung zweier annähernd gleich großer Zahlen erfüllt die zweite Bedingung nicht!

Beispiel 2.5 für ein lineares Gleichungssystem:

$33x + 12y = 110$		$33.1x + 12y = 110$
$69x + 25y = 270$		$69x + 25y = 270$
\Downarrow	<i>exakte</i>	\Downarrow
	<i>Lösungen</i>	
$x = 163.\bar{3}$		$x = 980$
$y = -440$		$y = -2694$

Obwohl der Fehler in den Eingangsdaten nur $|33.1 - 33| = 0.1$ beträgt, entstehen zwei völlig verschiedene Lösungen. Testen Sie das am Taschenrechner, indem Sie die Lösungen einsetzen. Das Problem ist inkorrekt gestellt.

Die Korrektheit der Aufgabe ist aber eine unabdingbare Voraussetzung für die numerische Lösung des Problems. (Falls sie nicht vorhanden ist, kann man die Aufgabe u.U. regularisieren. Das entspricht dem Übergang zur benachbarten korrekten Aufgabe.)

Gegeben seien nun fehlerbehaftete Eingangsdaten $\underline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ mit $\Delta x_i = x_i^* - x_i$, aus denen entsprechend (2.1) $y^* = \phi^*(\underline{x}^*)$ berechnet wird.

Gesucht: $|\Delta y| = |y^* - y| \leq ?$ und $\frac{|\Delta y|}{|y|} \leq ?$

Aufspaltung von Δy ergibt:

$$\Delta y = \underbrace{\phi^*(\underline{x}^*) - \phi(\underline{x}^*)}_{\Delta y_R} + \underbrace{\phi(\underline{x}^*) - \phi(\underline{x})}_{\Delta y_E} = \Delta y_R + \Delta y_E$$

- Δy_E – Fehler, der nur auf den Einfluss von Fehlern in den Eingangsdaten zurückgeht, unvermeidbarer Fehler, der in der Natur des zu lösenden Problems liegt; einfach abschätzbar
- Δy_R – Rechenfehler bei der Funktionsauswertung mittels Gleitpunktoperationen, Fehler, der durch den Algorithmus zur Funktionsauswertung bestimmt wird; aufwendig abschätzbar

Fakultativer Abschnitt:

*) Abschätzung von $|\Delta y_E|$ und $\frac{|\Delta y_E|}{|y|}$:

Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt:

$$\begin{aligned} |\Delta y_E| &= |\phi(\underline{x}^*) - \phi(\underline{x})| \approx \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi(\underline{x}^*)}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \phi(\underline{x}^*)}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i| \\ \frac{|\Delta y_E|}{|y|} &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \phi(\underline{x}^*)}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} \right| \frac{|\Delta x_i|}{|x_i|} \end{aligned}$$

Definition 2.4 Die Zahlen $\left| \frac{\partial \phi(\underline{x}^*)}{\partial x_i} \right|$ heißen **absolute Konditionszahlen**. Sie geben an, mit welchem Faktor Δx_i zur Änderung von $|\Delta y_E|$ beiträgt

Definition 2.5 Die Zahlen $\left| \frac{\partial \phi(\underline{x}^*)}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} \right|$ heißen **relative Konditionszahlen**.

Beispiel 2.6 Es ist die Masse m eines Kegels mit dem Radius r , der Höhe h und der konstanten Dichte ρ zu berechnen.

Gegeben: $r^* = r(1 + \varepsilon_R)$; $\rho^* = \rho(1 + \varepsilon_\rho)$; $h^* = h(1 + \varepsilon_h)$

$\Delta r = r^* - r$; $\Delta \rho = \rho^* - \rho$, $\Delta h = h^* - h$

$\curvearrowright \varepsilon_R$ ist der relative Fehler von r , denn es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{r^*}{r} &= 1 + \varepsilon_R \\ \varepsilon_R &= \frac{r^*}{r} - 1 = \frac{r^* - r}{r} \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$m = \frac{1}{3} \pi r^2 h \rho \quad ; \quad m^* = \frac{1}{3} \pi (r^*)^2 h^* \rho^*$$

Gesucht: $|\Delta m| = |m^* - m| \leq ?$ und $\left| \frac{\Delta m}{m} \right| \leq ?$

$$\begin{aligned} |\Delta m| &\leq \left| \frac{\partial m}{\partial r} \right|_* |\Delta r| + \left| \frac{\partial m}{\partial h} \right|_* |\Delta h| + \left| \frac{\partial m}{\partial \rho} \right|_* |\Delta \rho| \\ &= \left(\frac{2}{3} \pi r^* h^* \rho^* \right) |\Delta r| + \left(\frac{1}{3} \pi (r^*)^2 \rho^* \right) |\Delta h| + \left(\frac{1}{3} \pi (r^*)^2 h^* \right) |\Delta \rho| \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\Delta m}{m} \right| \leq 2 \left| \frac{\Delta r}{r^*} \right| + 1 \left| \frac{\Delta h}{h^*} \right| + 1 \left| \frac{\Delta \rho}{\rho^*} \right| \approx 2 |\varepsilon_r| + 1 |\varepsilon_h| + 1 |\varepsilon_\rho|$$

$\frac{2}{3} \pi r^* h^* \rho^*$, $\frac{1}{3} \pi (r^*)^2 \rho^*$, und $\frac{1}{3} \pi (r^*)^2 h^*$ sind absolute Konditionszahlen; 2, 1, und 1 sind relative Konditionszahlen.

Eine andere Möglichkeit zur Abschätzung dieser Fehler besteht in der Untersuchung des mittleren Fehlers des Resultats, wobei die absoluten Fehler als voneinander unabhängige Zufallsgrößen mit dem Erwartungswert Null betrachtet werden. Dann gilt für die Standardabweichung σ von $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\sigma \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n (\phi_{x_i} |_{\underline{x}^*})^2 \cdot \sigma_i^2}$$

Diese stochastische Methode wird aber hier nicht weiter verfolgt.

[Ende des fakultativen Abschnittes](#)

Eingangsfehler der Grundrechenarten

1. **Addition/Subtraktion:** $z = \phi(x_1, x_2) = x_1 \pm x_2$

$$\begin{aligned} |\Delta z| &\leq \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right|_* |\Delta x_1| + \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right|_* |\Delta x_2| \\ &= 1 \cdot |\Delta x_1| + 1 \cdot |\Delta x_2| \quad \curvearrowright \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta z}{z} \right| &\leq \left| \frac{\Delta x_1}{x_1^* \pm x_2^*} \right| + \left| \frac{\Delta x_2}{x_1^* \pm x_2^*} \right| \\ &= \left| \frac{x_1}{x_1^* \pm x_2^*} \right| \left| \frac{\Delta x_1}{x_1^*} \right| + \left| \frac{x_2}{x_1^* \pm x_2^*} \right| \left| \frac{\Delta x_2}{x_2^*} \right| \end{aligned}$$

Im Falle $x_1 \pm x_2 \approx 0$ erfolgt eine Verstärkung des relativen Fehlers in z durch Auslöschung gemeinsamer Ziffern in der Mantisse.

2. **Multiplikation:** $z = \phi(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

Fakultativer Abschnitt:

$$\begin{aligned} |\Delta z| &\leq \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right|_* |\Delta x_1| + \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right|_* |\Delta x_2| \\ &= |x_2^*| |\Delta x_1| + |x_1^*| |\Delta x_2| \quad \curvearrowright \end{aligned}$$

Ende des fakultativen Abschnittes

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| \leq \left| \frac{\Delta x_1}{x_1^*} \right| + \left| \frac{\Delta x_2}{x_2^*} \right|$$

3. **Division:** $z = \phi(x, y) = \frac{x_1}{x_2}$

Fakultativer Abschnitt:

$$\begin{aligned} |\Delta z| &\leq \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right|_* |\Delta x_1| + \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right|_* |\Delta x_2| \\ &= \left| \frac{1}{x_2^*} \right| |\Delta x_1| + \left| \frac{x_1^*}{(x_2^*)^2} \right| |\Delta x_2| \quad \curvearrowright \end{aligned}$$

Ende des fakultativen Abschnittes

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| \leq \left| \frac{\Delta x_1}{x_1^*} \right| + \left| \frac{\Delta x_2}{x_2^*} \right|$$

Beispiel 2.7 *sehr wichtig für die Übung!*

$$z = 0.1236 + 1.234 - 1.356 = 0.0016 = 0.1600 \cdot 10^{-2} \quad (\text{exakt})$$

in vierstelliger Gleitpunktarithmetik ($t = 4$) gilt jedoch:

Variante	Rechnung	Bemerkung
a)	$0.1236 + 1.234 = 1.358$ $1.358 - 1.356 = 0.002 = 0.2000 \cdot 10^{-2}$	gerundet! führende Ziffer falsch
b)	$1.234 - 1.356 = -0.1220$ $0.1236 - 0.1220 = 0.1600 \cdot 10^{-2}$	exakt exakt

Damit ist die Reihenfolge der Additionen und Subtraktionen wichtig für den entstehenden Fehler!

Beispiel 2.8 *sehr wichtig für die Übung!*

$$z = 1 - \cos x = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \quad \text{für } |x| \approx 2k\pi$$

Bei der Auswertung von $1 - \cos x$ tritt für $|x| \approx 2k\pi$ Auslöschung auf, die durch Auswertung des äquivalenten Ausdruckes $\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ vermieden werden kann. Abschätzungen dieser Art sind i.Allg. grob, speziell bei vielen Operanden oder vielen Rechenoperationen. Sie geben aber Hinweise auf kritische Stellen in der Aufgabe bzw. dem Algorithmus.

Zusammenfassung:

Konditionszahlen geben an, wie stark sich der Eingangsfehler infolge der Berechnung vergrößern kann. Sie stehen als Faktor vor dem Eingangsfehler, d.h. kleine Konditionszahlen sind günstig. Bei kleinen Konditionszahlen spricht man von einem gut konditionierten Problem (2.1), anderenfalls von einem schlecht konditionierten Problem. (Betrachtet man den Gaußalgorithmus in Matlab heißt groß etwa 10^{16} . das werden wir im Praktikum ausprobieren.)

Merke:

- **Subtraktion annähernd gleicher Zahlen vermeiden!**
- **Unvermeidbare Subtraktionen möglichst an den Anfang der Rechnung legen!**
- **Das Assoziativgesetz gilt nicht, Reihenfolge beachten!**
- **Bei Multiplikation/Division ist der relative Fehler in z in der Größenordnung der relativen Fehler in x_1 und x_2 !** (Division durch Zahlen nahe Null verursacht große Fehler.)

2.3 Stabilität

Definition 2.6 wichtig!

Ein Algorithmus (numerisches Verfahren) heißt numerisch stabil gegenüber Rundungsfehlern, wenn gilt

$$|\Delta y_R| \leq C \cdot |\Delta y_E| \quad C = \text{const} > 0, \quad (2.2)$$

anderenfalls heißt er numerisch instabil.

Bemerkung 2.1 Je kleiner die Konstante C , um so stabiler ist das numerische Verfahren.

Bemerkung 2.2 Numerische Stabilität ist nicht identisch mit kleinen erzeugten Rundungsfehlern. Die Forderung (2.2) besagt, dass die Rundungsfehler gegenüber den (unvermeidlichen) Eingangsfehlern nicht beliebig groß werden dürfen.

Beispiel 2.9 Zu berechnen sei die Zahlenfolge

$$I_n = \frac{1}{e} \int_0^1 x^n e^x dx \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots, N$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{e} \int_0^1 e^x dx = \frac{1}{e} [e - 1] = 1 - \frac{1}{e} \\ I_n &= \frac{1}{e} \left[x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x dx \right]_0^1 \quad (\text{partielle Integration!}) \\ &= \frac{1}{e} \left[e - 0 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx \right] \\ &= 1 - n \cdot \frac{1}{e} \int_0^1 x^{n-1} e^x dx = 1 - n I_{n-1} \quad (*) \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$0 < I_{n+1} < I_n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$$

Mit Hilfe der Rekursionsformel (*) kommt man im Vergleich zu den exakten Werten zu folgender Tabelle:

n	$I_n(\text{exakt})$	$I_n^*(\text{numerisch, 2 Stellen nach Komma})$	
0	0.63	0.63	
1	0.37	0.37	
2	0.26	0.26	
3	0.21	0.22	
4	0.17	0.12	
5	0.15	0.40	Rechenfehler, die sich aus den Run- dungsfehlern im Ver- fahren summieren
6	0.13	-1.40	
7	0.11	10.80	
8	0.10	-85.40	

Dieses Beispiel ist offensichtlich instabil.

Verständnisaufgabe: Testen Sie die Rechnung an Ihrem Taschenrechner oder in Matlab, auch mit mehr Iterationen und einer besseren Startlösung, z.B. mit **0.6321**.

Fakultativer Abschnitt:

*) Die Ursache dafür liegt im Anwachsen des Rechenfehlers im Schritt n um den Faktor n , denn es gilt:

$$\begin{aligned}
I_0^* &= I_0 + \varepsilon; & \varepsilon &\leq 0.5 \cdot 10^{-3} \\
I_n^* &= 1 - nI_{n-1}^* \\
I_n &= 1 - nI_{n-1} & \curvearrowright \\
|I_n^* - I_n| &= |nI_{n-1} - nI_{n-1}^*| = n |I_{n-1}^* - I_{n-1}|
\end{aligned}$$

Ende des fakultativen Abschnittes

Wichtig: Ein kleinerer Eingangsfehler ε kann damit die falschen Ergebnisse der numerischen Rechnung zwar nach hinten verlagern, aber nicht beseitigen. Das Verfahren ist unbrauchbar, weil instabil. Der Ausweg besteht in der Konstruktion eines stabilen Verfahrens.

Fakultativer Abschnitt:

*) Im obigen Beispiel wird wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ gesetzt:

$$I_N = 0 \quad \text{für} \quad N \gg 1$$

Aus (*): $I_n = 1 - nI_{n-1}$ folgt

$$\begin{aligned}
I_{n-1} &= \frac{1}{n}(1 - I_n) \quad \text{und} \\
I_{n-1}^* &= \frac{1}{n}(1 - I_n^*) & \curvearrowright \\
|I_{n-1}^* - I_{n-1}| &= \left| \frac{1}{n}I_n - \frac{1}{n}I_n^* \right| = \frac{1}{n} |I_n^* - I_n|
\end{aligned}$$

Ende des fakultativen Abschnittes

Folglich liefert die Verfahrensvorschrift

$$I_N = 0; \quad I_{n-1} = \frac{1}{n}(1 - I_n); \quad n = N, N-1, \dots, 1$$

ein stabiles Verfahren, da sich bis auf den letzten Schritt ($n = 1$) in jedem Schritt der Fehler um den Faktor $\frac{1}{n} < 1$ verringert. Mit diesem verbesserten Algorithmus ergibt

sich für das obige Beispiel

n	$I_n(\text{exakt})$	$I_n^*(\text{numerisch, 2 Stellen nach Komma})$	
8	0.10	0	(wird gesetzt)
7	0.11	0.12	
6	0.13	0.13	
5	0.15	0.14	
4	0.17	0.17	
3	0.21	0.21	
2	0.26	0.26	
1	0.37	0.37	
0	0.63	0.63	

Bemerkung 2.3 *Rekursionsformeln neigen zu instabilem Verhalten. Sie sollten vor der numerischen Auswertung untersucht werden.*

2.4 *) LANDAU-Symbole O und o [Fakultativer Abschnitt:](#)

Definition 2.7 *Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ seien in einer Umgebung von x_0 definiert, dann schreibt man*

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{bei } x \rightarrow x_0, \text{ wenn gilt } \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M < \infty \quad \forall x \in U(x_0)$$

Man schreibt

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{bei } x \rightarrow x_0, \text{ wenn gilt } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Beispiel 2.10

$$\sin x = O(x) \quad \text{bei } x \rightarrow 0, \quad \text{denn} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{bei } x \rightarrow 0, \quad \text{denn} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{bei } x \rightarrow \infty, \quad \text{denn} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

$$e^{-x} = o(x^{-25}) \quad \text{bei } x \rightarrow \infty, \quad \text{denn} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^{-25}} = 0$$

$$x = o(x \ln x) \quad \text{bei } x \rightarrow \infty, \quad \text{denn} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \ln x} = 0$$

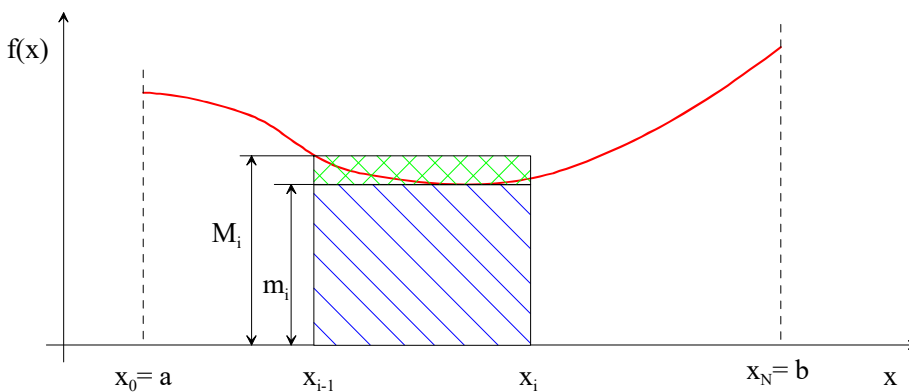
[Ende des fakultativen Abschnittes](#)

2.5 Diskrete Fourieranalysis

Die Formeln zur Berechnung der Fourierkoeffizienten oder der Fouriertransformierten enthalten Integrale. Kennt man aber die zu transformierende Funktion $f(t)$ nur aus Messungen, können die Integrale nicht analytisch berechnet werden. Es tritt auch nicht selten der Fall ein, dass selbst bei bekannten Funktionen $f(t)$ die Integrale nicht analytisch lösbar sind. Dann muss die Berechnung numerisch, d.h. nur mit den gemessenen Werten ohne Benutzung der Integralrechnung erfolgen.

Im folgenden Abschnitt wollen wir uns den Prozess der Diskretisierung dieser Integralberechnung für periodische Funktionen einmal genauer anschauen, damit wir die Auswirkungen der Diskretisierung besser einschätzen können und in der Praxis schon bei der Messwertaufnahme mögliche Fehlerursachen vermeiden. Da es sich in unseren Formeln um bestimmte Integrale handelt, starten wir mit der Definition des bestimmten Integrals. Ich hoffe, Sie erinnern sich, dass wir die Definition aus der Flächenberechnung abgeleitet hatten:

Gegeben war eine stetige Funktion $f(x) \geq 0$ über dem Intervall $[a, b]$.



Wir benutzen eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, auch Gitter oder Netz genannt,

$$\omega = \{x_i \mid i = 0, 1, \dots, N; x_0 = a, x_N = b; h_i = x_i - x_{i-1}\},$$

die das Intervall $[a, b]$ in Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ aufteilt.

$$\text{Mit } m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

wurde die Fläche A zwischen der Kurve und der x-Achse

$$\sum_{i=1}^N m_i h_i \leq A \leq \sum_{i=1}^N M_i h_i$$

zwischen Untersumme und Obersumme eingeschachtelt.

Anschließende Verfeinerung der Zerlegung, mit $\delta = \max_i h_i \rightarrow 0$, ergab

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(\xi_i) h_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(\xi_i) h_i = A = \int_a^b f(x) dx,$$

weil die Folgen der Unter- bzw. Obersummen eine konvergente Minorante bzw. Majorante mit demselben Grenzwert darstellen. (Beweis: RIEMANN 1826-1866)

Den Grenzwert kann man mit dem Rechner schlecht nachstellen, die Summe jedoch sehr gut. Sie stellt eine spezielle Quadraturformel dar, die sogenannte Rechteckregel, weil letztlich das Integral als Summe der Flächen von vielen kleinen Rechtecken berechnet wird. Die Genauigkeit ist nicht sehr hoch: $O(\max_i h_i)$, aber ausreichend, wenn $\max_i h_i$ klein ist. Im Allgemeinen benutzt man in der Technik beim Messen gleiche Abstände h zwischen den Messstellen. Dann hat die Rechteckregel die Form

$$\int_a^b f(x) dx \simeq h \sum_{i=1}^N f(x_i).$$

In unserem Fall hängt nun der Integrand g von der unabhängigen Variablen t ab, und der Abstand zwischen den Messwerten heißt Δt , nicht h , also

$$\int_{t_a}^{t_e} g(t) dt \simeq \Delta t \sum_{j=1}^N g(t_j).$$

Der Summationsindex i muss durch j ersetzt werden, da im Folgenden der Integrand eine komplexwertige Funktion und folglich i als komplexe Einheit bereits belegt ist. Damit gehen wir nun in die

2.5.1 Diskrete Fouriertransformation für periodische Funktionen

Die Berechnung der Fourierreihe zum Basissystem der e-Funktionen für eine Funktion mit der Periode T ist bekannt:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-ikt \frac{2\pi}{T}) dt \quad (o)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikt \frac{2\pi}{T}). \quad (oo)$$

Ausgangspunkt für die Fouriertransformation ist in der Technik im Allgemeinen eine Folge von N Messwerten über einer Periode T . Müssen die Fourierkoeffizienten numerisch berechnet werden, so ergibt sich mit der Rechteckregel,

$\Delta t = \frac{T}{N}$ und den Messzeitpunkten $t_j = \Delta t \cdot j = \frac{T}{N}j$,

$$\begin{aligned} c_k &\simeq \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \exp(-ikt_j \frac{2\pi}{T}) \Delta t && \text{(Rechteckregel)} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \exp(-ik \frac{T}{N} j \frac{2\pi}{T}) \frac{T}{N} && \text{(Ersatz von } \Delta t \text{ und } t_j) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \exp(-i \frac{2\pi}{N} kj) && \text{(kürzen)} \end{aligned}$$

Benutzt man nun die Abkürzung $\nu = \exp(\frac{2\pi}{N}i)$ mit $\overline{\nu^k} = \overline{\nu}^k = \nu^{-k}$ folgt weiter

$$\begin{aligned} c_k &\simeq \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \nu^{-kj}; && k = 0, \dots, N-1. \quad (*) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \overline{\nu^{kj}}; && k = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Für die benutzten Funktionswerte gilt dann analog:

$$\begin{aligned} f_j &= f(t_j) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp(ikt_j \frac{2\pi}{T}) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp(ik \frac{T}{N} j \frac{2\pi}{T}) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \nu^{kj}; && j = 0, \dots, N-1. \quad (**) \end{aligned}$$

Die Formel (*) heißt Diskrete Fouriertransformation (DFT), und (**) wird als Inverse Diskrete Fouriertransformation (IDFT) bezeichnet. Sie gelten zunächst nur für periodische Funktionen. Eine kompakte Schreibweise erhält man mit der Matrix F_N und den Vektoren \underline{c} und \underline{f}

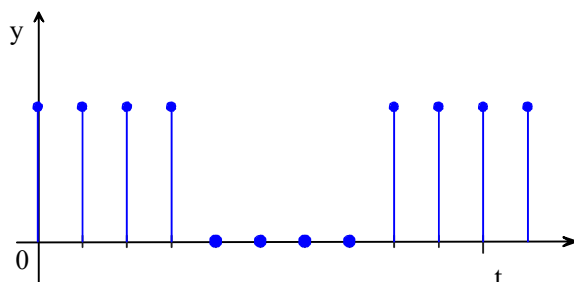
$$F_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \nu & \nu^2 & \dots & \nu^{N-1} \\ 1 & \nu^2 & \nu^4 & \dots & \nu^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \nu^{N-1} & \nu^{2(N-1)} & \dots & \nu^{(N-1)^2} \end{pmatrix}; \quad \underline{c} = (c_k); \quad \underline{f} = (f_k); \quad k = 0, \dots, N-1$$

in Gestalt der Matrixgleichung:

$$\underline{c} = \frac{1}{N} \overline{F_N} \cdot \underline{f} \quad \text{und} \quad \underline{f} = F_N \cdot \underline{c}.$$

Achtung: in der Literatur wird der Faktor $\frac{1}{N}$ manchmal auch auf beide Richtungen gleichmäßig aufgeteilt oder der anderen Transformationsrichtung zugeteilt! Da es sich um einen konstanten Faktor handelt, ist diese unterschiedliche Handhabung möglich und muss bei der Anwendung von Formeln aus der Literatur oder Programmsystemen berücksichtigt werden.

Beispiel 2.11 Die Diskrete Fouriertransformation für die periodische Funktion, deren Periode aus 4 Werten „1“ und 4 Werten „0“ besteht:



lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{DFT} \\ \xleftarrow{IDFT} \end{matrix} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 - (\sqrt{2} + 1)i \\ 0 \\ 1 - (\sqrt{2} - 1)i \\ 0 \\ 1 + (\sqrt{2} - 1)i \\ 0 \\ 1 + (\sqrt{2} + 1)i \end{pmatrix} : \quad (f_i) \begin{matrix} \xrightarrow{DFT} \\ \xleftarrow{IDFT} \end{matrix} (c_i)$$

Testet man dieses Beispiel in MATLAB mit $x=[1,1,1,1,0,0,0,0]$; $c=\text{fft}(x,8)$, $f=\text{ifft}(c,8)$, so erhält man $c_0 = 4$ und nicht $c_0 = 0.5$ wie nach der Formel (*):

$$c_0 = \frac{1}{8} \sum_{j=0}^7 y_j e^{-j \cdot 0} = \frac{1}{8} (1 + 1 + 1 + 1) = \frac{1}{2}.$$

Daran ist zu erkennen, dass die Vorfaktoren in MATLAB anders verteilt sind! In MATLAB ist ein Formelsatz realisiert, in dem der Vorfaktor $\frac{1}{N}$ der IDFT zuge-

teilt wurde:

$$c_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \nu^{-kj}; \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (+)$$

$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k \nu^{kj}; \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (++)$$

Dieser Formelsatz korrespondiert in der analytischen Form der Fouriertransformation mit:

$$c_k = \int_0^T f(t) \exp(-ikt \frac{2\pi}{T}) dt \quad (\#)$$

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikt \frac{2\pi}{T}). \quad (\#\#)$$

Diese Version wird in Ihrem Studiengang benutzt.

Im folgenden fakultativen Abschnitt wird eine analoge numerische Rechnung für nicht-periodische Funktionen durchgeführt. Der Unterschied besteht hauptsächlich darin, dass das Integrationsgebiet begrenzt werden muss, da eine Integration von $-\infty$ bis ∞ praktisch nicht möglich ist. Prinzipiell fällt der neue Formelsatz mit dem für periodische Funktionen zusammen. Er ist außerdem für Hin- und Rücktransformation identisch bis auf das Vorzeichen im Exponenten der e -Funktion und bis auf den Vorfaktor.

[Fakultativer Abschnitt:](#)

2.5.2 Diskrete Fouriertransformation für nichtperiodische Funktionen

Um zum Formelsatz für die Fouriertransformation für nichtperiodische Funktionen zu gelangen, wird in der Ausgangsformel für die Fourierreihendarstellung der Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ ausgeführt. Mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und $\omega_k = k\omega = k\frac{2\pi}{T}$ gilt dann $\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{T}$. Unter der Voraussetzung $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ ergibt sich aus den Formeln (o) und (oo)

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikt \frac{2\pi}{T}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-ikt \frac{2\pi}{T}) dt \right) \exp(ikt \frac{2\pi}{T}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{2\pi} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-i\omega_k t) dt \right) \exp(i\omega_k t) \end{aligned}$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-i\omega_k t) dt \right) \exp(i\omega_k t) \Delta\omega$$

Bei $T \rightarrow \infty$ liegen dann die ω_k dicht, und die äußere Summe geht in ein Integral über. Teilt man den Faktor $\frac{1}{2\pi}$ gleichmäßig auf, so erhält man

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \right) \exp(i\omega t) d\omega$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) \exp(i\omega t) d\omega \\ F(i\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \end{aligned}$$

Bei der Diskretisierung dieser Integrale im Intervall der Länge T ergibt sich aufgrund der Symmetrie der komplexwertigen e-Funktionen

$$\begin{aligned} f(t_k) &= \sum_{j=0}^{N-1} F(i\omega_j) \exp(i\omega_j t_k) \Delta\omega \\ F(i\omega_j) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \exp(-i\omega_j t_l) \Delta t. \end{aligned}$$

Ineinander eingesetzt erhält man unter Berücksichtigung von $\Delta t = \frac{T}{N}$, $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$, $t_j = j\Delta t = j\frac{T}{N}$ sowie $\omega_j = j\Delta\omega = j\frac{2\pi}{T}$ und $\nu = \exp\left(\frac{2\pi}{N}i\right)$

$$\begin{aligned} f(t_k) &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \exp(-i\omega_j t_l) \Delta t \right) \exp(i\omega_j t_k) \Delta\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \exp(-i\omega_j t_l) \frac{T}{N} \exp(i\omega_j t_k) \frac{2\pi}{T} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \exp(-ij\frac{2\pi}{T}l\frac{T}{N}) \exp(ij\frac{2\pi}{T}k\frac{T}{N}) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \exp(-ij\frac{2\pi}{N}l) \right) \exp(ij\frac{2\pi}{N}k) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \nu^{-jl} \right) \nu^{jk}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir den Formelsatz der diskreten Fouriertransformation:

$$f(t_k) = \sum_{j=0}^{N-1} F(i\omega_j) \nu^{jk} \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$F(i\omega_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \nu^{-jk} \quad k = 0, \dots, N-1$$

Ende des fakultativen Abschnittes

2.6 Die schnelle Fouriertransformation (FFT)

Der Aufwand der DFT ohne Berechnung der Werte für ν beträgt $O(2N^2)$ Gleitpunktoperationen wegen N Additionen und N Multiplikationen pro Schritt ohne Berechnung der ν , die abgespeichert werden können. In modernen Anwendungen werden aber beispielsweise Datensätze der Länge $N = 10^6$ transformiert. Bei einer Dauer von 1 Microsekunde pro Paar von Addition und Multiplikation benötigt dann jedoch eine DFT

$$t = 2(10^6)^2 * \frac{10^{-6}s}{2 \text{ Operationen}} = 10^6 s \approx 11,5 \text{ Tage (!!)}.$$

Das ist inakzeptabel und würde den Einsatz der DFT verhindern.

2.6.1 Formelsatz

Fakultativer Abschnitt:

Es sei nun N gerade. Dann kann man die Symmetrieeigenschaften der e-Funktionen weiter ausnutzen und zu einer rekursiven Verfahrensvorschrift gelangen, indem man die Gesamtsumme aufspaltet in eine Summe über alle geraden und eine über alle ungeraden Indices:

$$\begin{aligned} F_k^{(N)} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \nu^{-jk} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \exp(-i \frac{2\pi}{N} kj) \\ &= \frac{1}{N} \left(\frac{N/2}{N/2} \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j} \exp(-i \frac{2\pi}{N/2} kj) + \frac{N/2}{N/2} \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j+1} \exp(-i \frac{2\pi}{N/2} kj) \exp(-i \frac{2\pi}{N} k) \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(\frac{N}{2} F_k^{e(N/2)} + \nu^{-k} \frac{N}{2} F_k^{o(N/2)} \right) = \frac{1}{2} F_k^{e(N/2)} + \nu^{-k} \frac{1}{2} F_k^{o(N/2)}. \end{aligned}$$

$F_k^{e(N/2)}$ sind dabei die Koeffizienten einer DFT mit der halben Länge $\frac{N}{2}$ der Funktionswerte von f mit geraden Indices (e wie even) und $F_k^{o(N/2)}$ sind dabei die Koeffizienten

einer DFT mit der halben Länge $\frac{N}{2}$ der Funktionswerte von f mit ungeraden Indices (o wie odd). Gilt nun $N = 2^p$, so benötigt man p rekursive Durchführungen der FFT mit jeweils der Hälfte der Summanden. Diese Wahl von N liefert das effektivste Verfahren. Es sei z.B. $N = 8 = 2^3$. Betrachtet man nur die Reihenfolge, in der die Berechnung ausgeführt wird, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} F_k^{(8)} &= \sum_{j=0,2,4,6} \alpha_j f_j + w_k \sum_{j=1,3,5,7} \beta_j f_j \\ &= \sum_{j=0,4} \gamma_j f_j + r_{k-1} \sum_{j=2,6} \delta_j f_j + w_k \left(\sum_{j=1,5} \varepsilon_j f_j + s_{k-1} \sum_{j=3,7} \phi_j f_j \right) \\ &= (\mu_0 f_0 + \mu_4 f_4) + (\mu_2 f_2 + \mu_6 f_6) + (\mu_1 f_1 + \mu_5 f_5) + (\mu_3 f_3 + \mu_7 f_7) \end{aligned}$$

Am Ende dieses Prozesses steht eine Folge von FFTs für jeweils eine Variable f_i in der sogenannten bitreversiven Reihenfolge. (Dieser Fakt muss berücksichtigt werden, sobald Hin- und Rücktransformation einzeln berechnet werden. Bei paarweise ausgeführten Transformationen ist die Bitreversion nicht nötig. Die 2. Transformation stellt automatisch die ursprüngliche Reihenfolge wieder her.) In Matlab wird das automatisch ausgeglichen.

[Ende des fakultativen Abschnittes](#)

Zusammenfassung:

Bei der Wahl von $N = 2^p$ Messstellen (= Stützstellen) kann durch wiederholtes (p-maliges) rekursives Ausführen von Fouriertransformationen der jeweils halben Länge und durch Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften der Exponentialfunktion der **Prozess der FT extrem beschleunigt** werden. Man erhält letztlich einen neuen Formelsatz in Gestalt einer Linearkombination der Funktionswerte. Im Fall $N = 2^p$ werden dann $\frac{1}{2} N p = \frac{1}{2} N \log_2(N)$ komplexe Gleitpunktoperationen benötigt. Bei $N = 10^6$ ergibt sich damit für die nächstgelegene Zweierpotenz $N = 2^{20} = 1048567$ und $\log_2(2^{20}) = 20$

$$t = \frac{1}{2} 2^{20} * 20 * \frac{10^{-6} s}{2 \text{ Operationen}} \approx 5 s.$$

Diesem enormen Zeitgewinn verdankt diese Version der DFT ihren Namen: Schnelle Fouriertransformation (Fast Fourier Transform = FFT). Sie wird dadurch zu einem mächtigen Instrument der modernen Numerik.

2.6.2 Anwendung in der Signalanalyse

Bei periodischen Funktionen gilt das Abtasttheorem von SHANNON:

Satz 2.1 Gilt $F(i\omega) \equiv 0$ für $|\omega| > b \implies f(t) = \frac{b\Delta t}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t) \frac{\sin(b(t-n\Delta t))}{b(t-n\Delta t)}$.

Dabei ist Δt das Abtastintervall, $b = \frac{\pi}{\Delta t}$ die Abschneidefrequenz (Nyquistfrequenz).

Die auftretende Reihe heißt Kardinalreihe. Die Bedingung $F(i\omega) \equiv 0$ für $|\omega| > b$ ist in der Technik erfüllt (frequenzbandbegrenztes Spektrum). Damit lässt sich das Signal aus den abgetasteten Werten $f(n\Delta t)$ zusammensetzen. Die zur Nyquistfrequenz gehörige maximale Periodenlänge beträgt damit $T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\pi} \Delta t = 2\Delta t$. Folglich werden 2 Abtastungen pro Periode benötigt, um die Funktion erfolgreich rekonstruieren zu können.

Im nichtperiodischen Fall wird eine Rekonstruktion mit allen möglichen Frequenzen nötig sein, nicht nur mit den Vielfachen der Grundfrequenz. Das Vorgehen ist analog zu oben, auch eine Bandbegrenzung wird benötigt.

Bedingt durch den Dämpfungssatz der Fouriertransformation und die Heisenbergsche Unschärferelation sind einige Vorkehrungen nötig, um mit der FFT gute Ergebnisse zu erzielen.

Aus dem Dämpfungssatz

$$FT(f(at)) = \frac{1}{a} FT\left(\frac{i\omega}{a}\right) \quad \text{für } a > 0$$

folgt

$$FT\left(f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right) = \alpha FT(\alpha i\omega) \quad \text{für } \alpha > 0.$$

Bei $\alpha < 1$ folgt $\frac{1}{\alpha} > 1$, d.h. $f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ entspricht einer Stauchung im Zeitbereich und $FT(\alpha i\omega)$ entspricht einer Streckung im Frequenzbereich. Damit transformiert die Fouriertransformation kleine Details aus dem Zeitbereich, wie z.B. Sprünge, Extrema,... in große Bereiche vom Frequenzbereich. Es kommt zu einer Verschmierung von scharfen Kanten oder einem Knall im Originalbereich über große Intervalle im Bildbereich. D.h. gut lokalisierte Objekte im Originalbereich setzen sich aus vielen verschiedenen Frequenzen zusammen und anders herum: Eine einzelne Frequenz aus dem Bildbereich liefert im Originalbereich eine periodische Funktion, die über der gesamten Achse definiert ist. Es gibt dabei keine Kompromisse aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation. Diese ist nicht nur eine Erscheinung in der Quantenphysik. Sie beruht auf einer funktionalanalytischen Ungleichung, die Objekte des Originalbereiches der FT mit Objekten des Bildbereichs verknüpft. In unserem Anwendungsfall heißt das:

$$\|\text{Breite des Signals im Zeitbereich}\| * \|\text{Breite des Spektrums}\| \geq \frac{1}{2}.$$

Beides kann also nicht gleichermaßen klein werden.

Zusammenfassung/praktische Schlussfolgerungen:

1. Folglich wähle man den zu transformierenden Bereich so groß, dass das Signal darin abgeklungen ist. Es darf dann mit Nullen aufgefüllt werden. Ein vorheriges scharfes Abschneiden wird als Sprung im Signal und damit als sehr kleines abzubildendes Detail interpretiert, was zu falschen Frequenzwerten über der gesamten Breite des Frequenzbereichs führt.

2. Das Abtastintervall ist fein genug zu wählen, so dass die Nyquistfrequenz b deutlich höher ist als die zu erwartende maximale Frequenz.

Wird b zu klein geschätzt und damit Δt zu groß angesetzt, erscheinen höherfrequente Anteile des Signals frequenzverschoben (= Aliasing durch Undersampling).

Wird hingegen b überschätzt, so kommt es bei der Berechnung der Kardinalreihe zu einer Konvergenzbeschleunigung.

Beispiel 2.12

$$f(t) = \exp(-0.1t^2)(2 \sin t + \cos 3t)$$

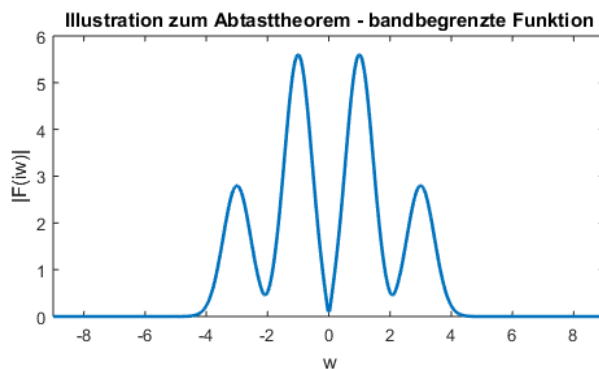
Damit ergibt sich für die beiden Komponenten des Signals

$$b \leq \frac{2\pi}{1} \quad \text{bzw.} \quad b \leq \frac{2\pi}{3} \quad \text{d.h.} \quad b \leq 2\pi$$

und für die Abtastperiode

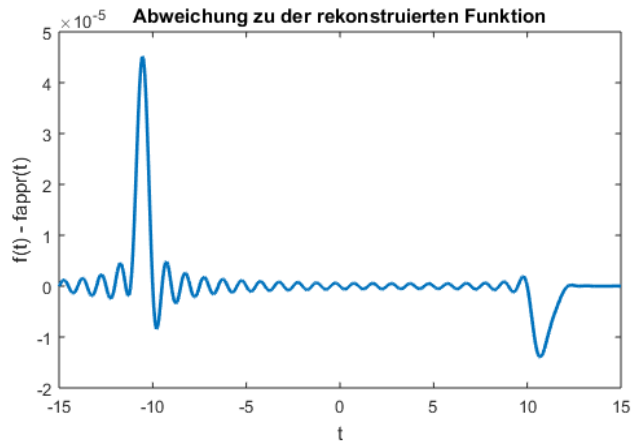
$$\Delta t \leq \frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

Das Bild der Fouriertransformierten bestätigt die Nyquistfrequenz:



Das Signal selbst ist bei $|t| = 10$ fast vollständig abgeklungen ($f(10) \leq 1.36 \cdot 10^{-4}$). Folglich kann man im Intervall $[-10, 10]$ mit $\Delta t = 0.5$ diskretisieren und sinnvolle Ergebnisse einer FFT und IFFT erwarten.

Die numerische Auswertung der Kardinalreihe bringt sehr kleine Fehler, die bei der Abschneidekoordinate $t = \pm 10$ am größten sind, was die obigen Schlussfolgerungen bestätigt.:



Beachten Sie bitte den Faktor 10^{-5} an der y -Achse. Der Maximalfehler liegt somit etwa bei $4.5 \cdot 10^{-5}$.

Um Frequenzen besser einem Abschnitt des Signals zuordnen zu können, verwendet man gegebenenfalls Fensterfunktionen, die über die Funktion im Zeitbereich gelegt werden. Sie müssen aus den oben genannten Gründen möglichst am Rand des Fenster verschwinden. Es gibt sehr viele unterschiedliche praktisch genutzte Fensterfunktionen, die je nach Ziel der Untersuchung ausgewählt werden. Eine Verbesserung der Analysefunktion kann man auch durch den Einsatz einer Wavelettransformation erreichen, die keine Fenster benötigt, um die Auflösung für Teilbereiche des Signals zu erhöhen, dafür aber einen Frequenz- und einen Verschiebungsparameter zur Lokalisation enthält und trotzdem nicht langsamer als die FFT ist.

Sie alle kennen die Wirkung der FFT/Wavelettransformation aus dem täglichen Leben: Das Bildspeicherformat *.jpg basiert auf der FT und das Speicherformat *.jpg2000 auf der Wavelettransformation. In beiden Fällen werden nicht die Bildpunkte aus dem Originalbereich gespeichert, sondern die der Transformation entsprechenden Koeffizienten. Die Datenkompression wird dadurch erreicht, dass man sehr kleine Koeffizienten vernachlässigen kann, ohne bei der Rücktransformation den Gesamteindruck zu zerstören. Wählt man aber die Kompressionsrate zu hoch, werden auch Koeffizienten aus der Rechnung geworfen, die einen wesentlichen Anteil der Information liefern, und das Bild ist unbrauchbar. Schauen wir uns das etwas genauer an:

1. Datenkompression:

Reduktion der Datenmenge bei der Speicherung bzw. Übertragung digitaler Signale $\{f_k\}$ (z.B. für Bild oder Ton), z.B. durch Quantisierung des transformierten

Signals und/oder durch Vernachlässigung kleinen Komponenten (Thresholding).

$$\vec{f} = \{f_k\} \xrightarrow{FFT} \vec{c} = \{c_j\} \begin{array}{l} \nearrow \vec{c}^{(1)} - \text{wird gespeichert bzw. übertragen} \\ \searrow \vec{c}^{(2)} - \text{mit } |\vec{c}^{(2)}| \leq d \text{ wird vernachlässigt} \end{array}$$

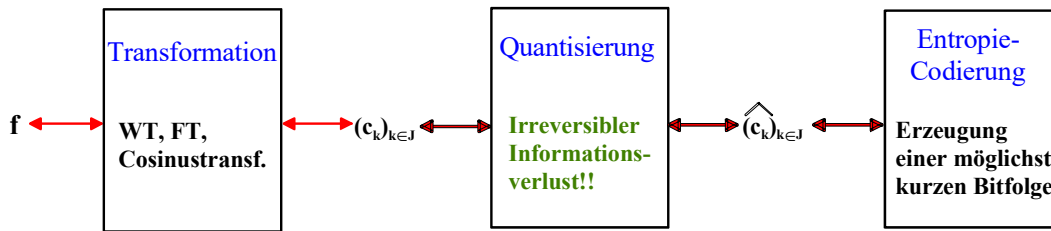
$$\vec{c}^{(1)} \xrightarrow{IFFT} \vec{f}^{(1)} \quad (\text{leicht gestörtes Bild})$$

mit der Kompressionskonstante d .

Die Datenkompression ist dringend erforderlich zur Echtzeitübertragung oder Speicherung von Bild- oder Tonsignalen. Es werden deshalb sehr hohe Anforderungen bzgl. Rechenzeit und Speicherplatz gestellt. Die Beurteilung der Verfahren erfolgt anhand der Kompressionsrate k :

$$k = \frac{\text{Speicherbedarf des Originals}}{\text{Speicherbedarf der komprimierten Datei}}$$

Prinzip:



Bei Fourier- und Cosinustransformation muss zur Auflösung von lokalen Details das Bild vorher in Teilbilder zerlegt werden, da Sinus- und Cosinusfunktionen einen unbeschränkten Träger haben. Die Grenzen der Teilbilder bleiben bei großem k meist nach der Rücktransformation sichtbar.

2. Digitales Filtern - Denoising - Rauschunterdrückung:

$$\text{Trennen der Signale im Frequenzraum: } \vec{c} \begin{array}{l} \nearrow \vec{c}^{(1)} \xrightarrow{IFFT} \vec{f}^{(1)} - \text{Nutzsignal} \\ \searrow \vec{c}^{(2)} \xrightarrow{IFFT} \vec{f}^{(2)} - \text{verraushtes Signal} \end{array}$$

Analog zu oben wird stets Thresholding durchgeführt (Nullsetzen kleiner Fourierkoeffizienten). Die Rücktransformation liefert dann das weniger verrauschte Signal. Um gute Ergebnisse zu erzielen, müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

- Der Rauschpegel $\|f^{rausch}\|$ ist klein im Verhältnis zu $\|f^{wahr}\|$.

- Das wahre Signal lässt sich in der neuen Basis durch wenige Koeffizienten gut darstellen und ist damit gut komprimierbar.
- Das Rauschen ist in dieser Basis nicht gut komprimierbar. (Weißes Rauschen wird durch keine Orthonormalbasis komprimiert.)

Im Wesentlichen gibt es 2 Varianten für das Thresholding:

1. „Hard Thresholding“:

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{für } |c_k| \leq \tau \\ c_k & \text{sonst} \end{cases}$$

2. „Soft Thresholding“:

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{für } |c_k| \leq \tau \\ \text{sgn}(c_k)(|c_k| - \tau) & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Festlegung von τ ist ein statistisches Modell für das Rauschen erforderlich, z.B. wird weißes Rauschen mit der Standardabweichung σ benutzt:

$$f_k = f_k^{\text{wahr}} + \sigma g_k, \quad g_k : \text{Werte von } N(0, 1), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Damit ergibt sich als Schätzung für τ und für σ :

$$\begin{aligned} \tau &= \kappa \sqrt{2 \ln(N)} \sigma; \quad \kappa = O(1) \\ \sigma &\approx \frac{\text{Median der Beträge der Fourierkoeffizienten}}{0.6745} \end{aligned}$$

Die Anwendung des Denoising eignet sich u.a. zur:

- Nachbearbeitung von Bildern
- Klärung von Tonsignalen
- Spracherkennung
- Datenvorbereitung für inverse, schlecht konditionierte Probleme, z.B. bei der Computertomografie oder bei Wirtschaftsdaten...