Rechenregeln für Mengen

1. Kommutativgesetze: $A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$

2. Assoziativgesetze: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3. Distributivgesetze: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. Seien im Folgenden $A,B \in M$, dann gilt:
$A \cup M = M$; $A \cap M = A$

5. $\overline{\overline{A}} = A$; $A \cup \overline{A} = M$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$

6. $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$

7. De Morgan'sche Gesetze: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Rechnen mit rein imaginären Zahlen

Es sei a,b$\in\mathbb{R}$, dann gilt:

1. $ai < bi$ für $a < b$

2. $0i = 0$

3. $ai \pm bi = (a \pm b)i$

4. $ai \cdot bi = (a \cdot b)i \cdot i = -ab$

5. $\frac{a}{i} = \frac{a \cdot i}{i \cdot i} = -ai$

6. $i^1 = i;\ i^2 = -1;\ i^3 = -i;\ i^4 = 1$

$i^{4n+1} = i;\ i^{4n+2} = -1;\ i^{4n+3} = -i;\ i^{4n+4} = 1;\ \forall n \in \mathbb{N}$

Rechenregeln für komplexe Zahlen

Es seien $z_1 = a_1 + b_1 i \in \mathbb{C}$, $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ *und* $z_3 \in \mathbb{C}$.

1. Gleichheit: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$

2. Kommutativgesetze: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

3. Assoziativgesetze: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

4. Distributivgesetz: $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$

5. $\alpha z = \alpha(a + bi) = \alpha a + \alpha bi$ für $\alpha \in \mathbb{R}$

6. $z + (-z) = a + bi - (a + bi) = 0$

7. $z^0 = 1;\ z^1 = z;\ z^2 = z^1 \cdot z;\ \ldots\ z^n = z^{n-1} \cdot z;\ n \in \mathbb{N}$

Es sei $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$. Dann gilt:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)}{(a_2 + b_2 i)} \cdot \frac{(a_2 - b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i}{a_2^2 + b_2^2} \quad \text{für } z_2 \neq 0$$

Es sei $z_1 = |z_1|(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ und $z_2 = |z_2|(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$. Dann gilt:

$$z_1 \cdot z_2 \; = \; |z_1|(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) \; \cdot |z_2|(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 \; = \; |z_1| \cdot |z_2|\left(\left(\cos\phi_1 \cos\phi_2 - \sin\phi_1 \sin\phi_2\right) \; + \; i\left(\sin\phi_1 \cos\phi_2 + \cos\phi_1 \sin\phi_2\right)\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 \; = \; |z_1| \bullet |z_2|\left(\cos\left(\phi_1 + \phi_2\right) + i\sin\left(\phi_1 + \phi_2\right)\right)$$

Verallgemeinerung:

$$z_1 = |z_k|(\cos\phi_k + i\sin\phi_k); \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n \; = \; |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot \left(\cos\left(\phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_n\right) \; + \; i\sin\left(\phi_1 + \phi_2 + \ldots + \phi_n\right)\right)$$

Beispiel zur Anwendung der komplexen Zahlen: **Wechselspannung**

$$u = \hat{u}\cos(\omega t + \phi_u) \quad \Rightarrow \quad U = \tilde{U} e^{j\phi_u}[\cdot e^{j\omega t}] \quad \Rightarrow \quad U = \tilde{U} e^{j\phi_u} = \tilde{U}(\cos\phi_u + j\sin\phi_u)$$

Wirkkomponente: $\mathrm{Re}(u) = \tilde{U}\cos\phi_u = U_W$

Blindkomponente: $\mathrm{Im}(u) = \tilde{U}\sin\phi_u = U_B$

Effektivwert: $U = \sqrt{U_W{}^2 + U_B{}^2}$

Beispiel: Stromstärke im Wechselstromkreis

$$i = \hat{i}\cos(\omega t + \phi_i) \quad \Rightarrow \quad I = \tilde{I} e^{j\phi_i}[\cdot e^{j\omega t}] \quad \Rightarrow \quad I = \tilde{I} e^{j\phi_i} = \tilde{I}(\cos\phi_i + j\sin\phi_i)$$

Beispiel: Wechselstromwiderstand Z

Ohm'sches Gesetz: $Z = \dfrac{U}{I} = \dfrac{\tilde{U} e^{j\phi_u}}{\tilde{I} e^{j\phi_i}} = \dfrac{\tilde{U}}{\tilde{I}} e^{j(\phi_u - \phi_i)}$

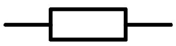
Andererseits gilt: $Z = Z e^{j\phi_Z} = R + jX \quad \Rightarrow \quad Z = \tilde{U}/\tilde{I};\ \ \phi_Z = \phi_u - \phi_i$

Scheinwiderstand: $Z = \tilde{U}/\tilde{I} = \sqrt{R^2 + X^2}$

Wirkwiderstand : $R = \mathrm{Re}(Z)$

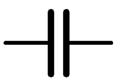
Blindwiderstand: $X = \mathrm{Im}(Z)$

Für die unterschiedlichen Bauteile hat Z als Widerstandsoperator folgende Werte:



: Ohmscher Widerstand: $Z_R = R$

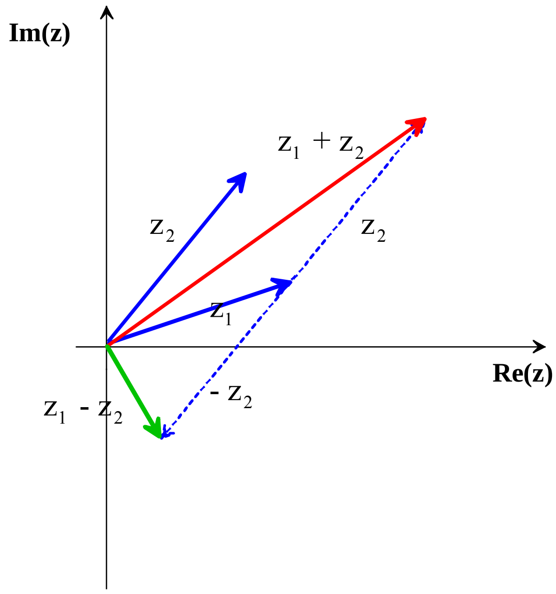
: Induktiver Widerstand: $Z_L = j\omega L$



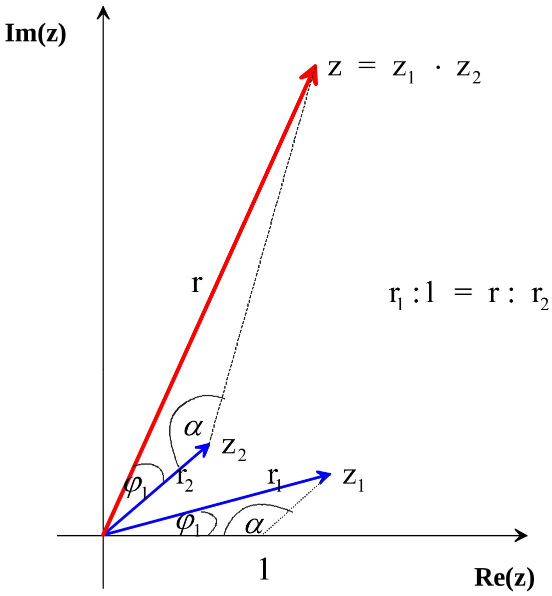
: Kapazitiver Widerstand: $Z_C = \dfrac{1}{j\omega C}$

Geometrische Veranschaulichung der Rechenoperationen im Bereich der komplexen Zahlen

Addition/Subtraktion:

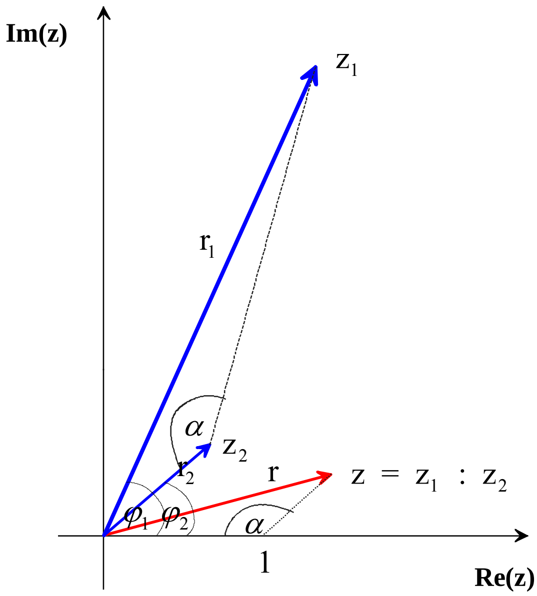


Multiplikation:



$$r_1 : 1 = r : r_2 \Rightarrow r = r_1 \cdot r_2 \; ; \qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

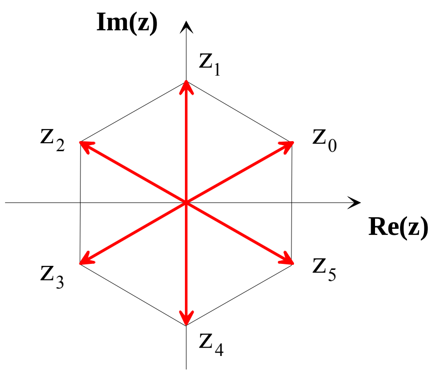
Division:



$r : 1 = r_1 : r_2 \Rightarrow r = r_1 : r_2$ und $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

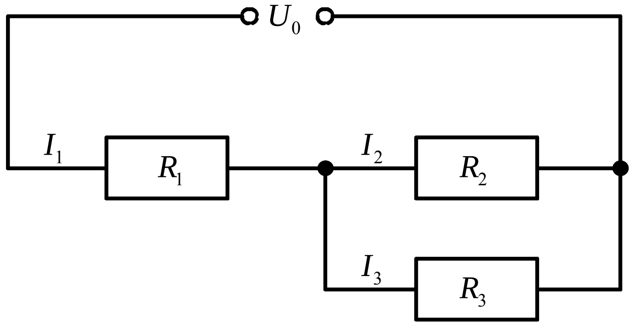
Wurzelziehen:

am Beispiel von $\sqrt[6]{-1}$



Beispiel zur Entstehung eines linearen Gleichungssystems:

Wir betrachten die Schaltung:



Aus den Kirchhoffschen Gesetzen folgt das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} I_1 & - & I_2 & - & I_3 & = & 0 \\ R_1 I_1 & + & \mathrm{R}_2 I_2 & & & = & U_0 \\ & & R_2 I_2 & - & R_3 I_3 & = & 0 \end{array}$$

Wesentliche Information zur Berechnung der Stromstärken:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & 0 & U_0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrix R • Vektor $\underline{I}$ = rechte Seite $\underline{U}$

Gleichungssystem: $R \cdot \underline{I} = \underline{U}$

Einige spezielle Matrizen:

Obere (rechte) Dreiecksmatrix: $a_{ij} = 0$ für $i > j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

bei m < n bei m > n

Untere (linke) Dreiecksmatrix: $a_{ij} = 0$ für $i < j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Quadratische Matrizen m = n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix (m = n)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix (m = n)

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Wichtige Eigenschaften der Matrizenoperationen

Typverträglichkeit beachten!!

Kommutativgesetze

$A + B = B + A$

i. Allg.: $\mathbf{A \cdot B \neq B \cdot A}$

Assoziativgesetze

$(A + B) + C = A + (B + C)$

$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Distributivgesetze

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

Nullelement

$A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A$

$A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot A = \mathbf{0}$

Einselement

$A \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot A = A$

Multiplikation mit Zahlen aus C

$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

$(\alpha \cdot \beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$

$\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Transponierte Matrizen

$(A + B)^T = A^T + B^T$

$\mathbf{(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T}$

$(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$

$(A^T)^T = A$

Adjungierte Matrizen

$(A + B)^* = A^* + B^*$

$\mathbf{(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*}$

$(\alpha A)^* = \overline{\alpha} \cdot A^*$

$(A^*)^* = A$

Inverse Matrizen

$\mathbf{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$

$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$

$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \mathbf{E}$

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

Beispiele zur Anwendung der Matrizenrechnung:

1) Eine Elektronik-GmbH stellt 3 Typen von Leiterplatten her. Diese sind entsprechend dem angegebenen Schema bestückt:

	L_1	L_2	L_3
Kondensatoren	2	5	5
Widerstände	1	1	3
Transistoren	3	2	2

In der Endmontage werden die Leiterplatten in den folgenden Stückzahlen in die Geräte G_1,G_2,G_3, und G_4 eingebaut:

	G_1	G_2	G_3	G_4
L_1	1	0	1	4
L_2	0	2	1	2
L_3	1	1	1	0

Man bestimme die Anzahl der Kondensatoren, Widerstände und Transistoren für einen Auftrag von 500 Geräten G_1, 100 Geräten G_2, 300 Geräten G_3 und 100 Geräten G_4.

Die Lösung erfolgt mit den Mitteln der Matrizenmultiplikation:

L=A(Bauteile,Leiterplatten) · B(Leiterplatten,Geräte) · C(Gerätezahl)

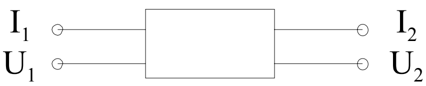
$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 15 & 12 & 18 \\ 4 & 5 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}$$

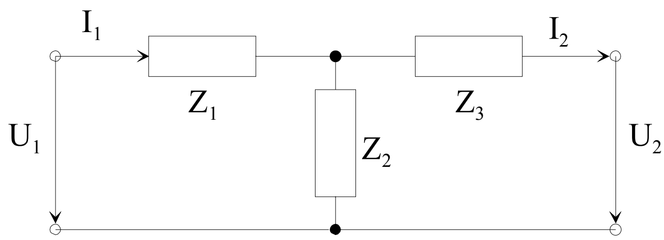
$$= \begin{pmatrix} 10400 \\ 4600 \\ 6800 \end{pmatrix}$$

2) Beispiel aus der Vierpoltheorie:

Ein Vierpol ist ein elektrisches Netzwerk mit 4 Anschlüssen: 2 Eingängen und 2 Ausgängen:



Wir betrachten folgendes Beispiel:



Die Maschenstromanalyse ergibt:
$$\begin{aligned} 0 &= -U_1 + (Z_1 + Z_2)I_1 - Z_2 I_2 \\ 0 &= U_2 - Z_2 I_1 + (Z_2 + Z_3)I_2 \end{aligned}$$

Nach Umordnung erhält man
$$\begin{aligned} U_1 &= (Z_1 + Z_2)I_1 - Z_2 I_2 \\ U_2 &= Z_2 I_1 - (Z_2 + Z_3)I_2 \end{aligned}$$

Allgemein gilt mit der Widerstandsmatrix Z:
$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = Z \cdot I$$

2. Darstellungsmöglichkeit: Angabe der Ausgangsgrößen in Abhängigkeit von den Eingangsgrößen durch Umstellen der 2. Gleichung nach I_1 und Einsetzen in die 1. Gleichung:

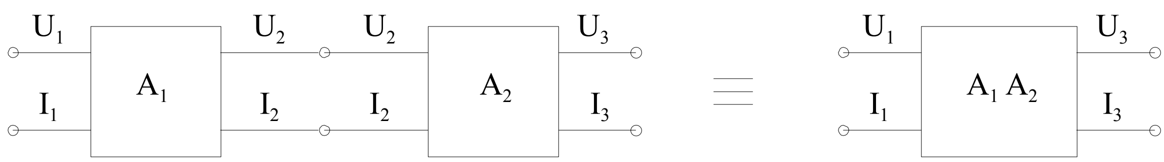
$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} U_2 + \left(\frac{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)}{Z_2} - Z_2 \right) I_2 \\ I_1 &= \frac{1}{Z_2} U_2 + \frac{(Z_2 + Z_3)}{Z_2} I_2 \end{aligned}$$

Allgemein gilt mit der Kettenmatrix A:
$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$$

Bei der Reihenschaltung von Vierpolen ergibt sich damit unter Beachtung von:
$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} U_3 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

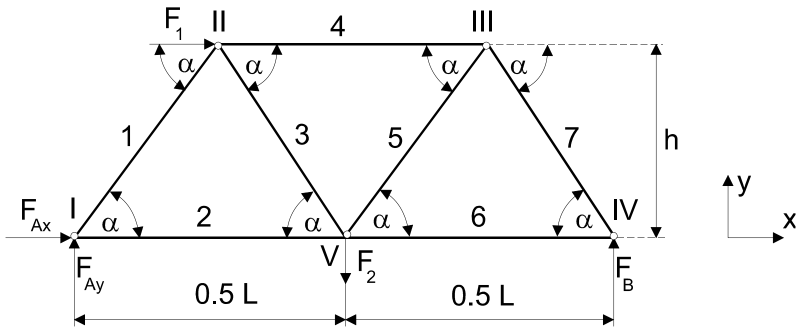
$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = A_1 A_2 \begin{pmatrix} U_3 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

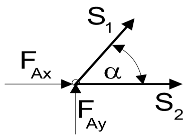
D.h. die Reihenschaltung entspricht der Multiplikation der Kettenmatrizen:



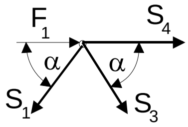
Kraftberechnung in Fachwerken

Zu berechnen sind die Auflagerkräfte F_{Ax}, F_{Ay}, F_B und die Stabkräfte $S_1, \ldots, S_7$.

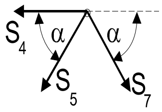




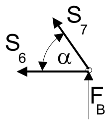
I $\begin{cases} S_1\cos\alpha + S_2 + F_{Ax} = 0 & (1) \\ S_1 \sin\alpha + F_{Ay} = 0 & (2) \end{cases}$



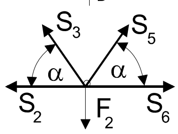
II $\begin{cases} -S_1\cos\alpha + S_3\cos\alpha + S_4 + F_1 = 0 & (3) \\ -S_1\sin\alpha - S_3\sin\alpha = 0 \Rightarrow S_1 + S_3 = 0 & (4) \end{cases}$



III $\begin{cases} -S_4 - S_5\cos\alpha + S_7\cos\alpha = 0 & (5) \\ -S_5\sin\alpha - S_7\sin\alpha = 0 \Rightarrow S_5 + S_7 = 0 & (6) \end{cases}$



IV $\begin{cases} -S_6 - S_7\cos\alpha = 0 & (7) \\ S_7\sin\alpha + F_B = 0 & (8) \end{cases}$

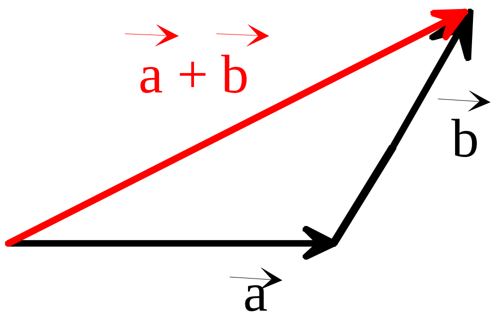


V $\begin{cases} -S_2 - S_3\cos\alpha + S_5\cos\alpha + S_6 = 0 & (9) \\ S_3\sin\alpha + S_5\sin\alpha - F_2 = 0 & (10) \end{cases}$

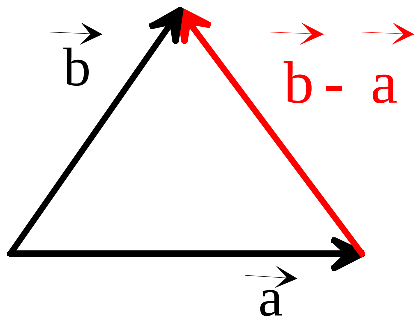
$$\curvearrowright \begin{pmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\cos a & 0 & \cos\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\cos\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\cos\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -\cos\alpha & 0 & \cos\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation von

Vektoraddition

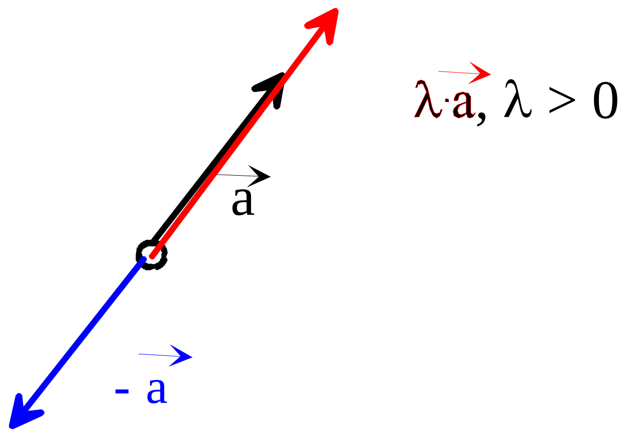


Vektorsubtraktion



Multiplikation

Skalar mit Vektor



Eigenschaften des Skalarproduktes im $\mathbb{R}^3$:

1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \| a \|^2 \geq 0$

2) $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

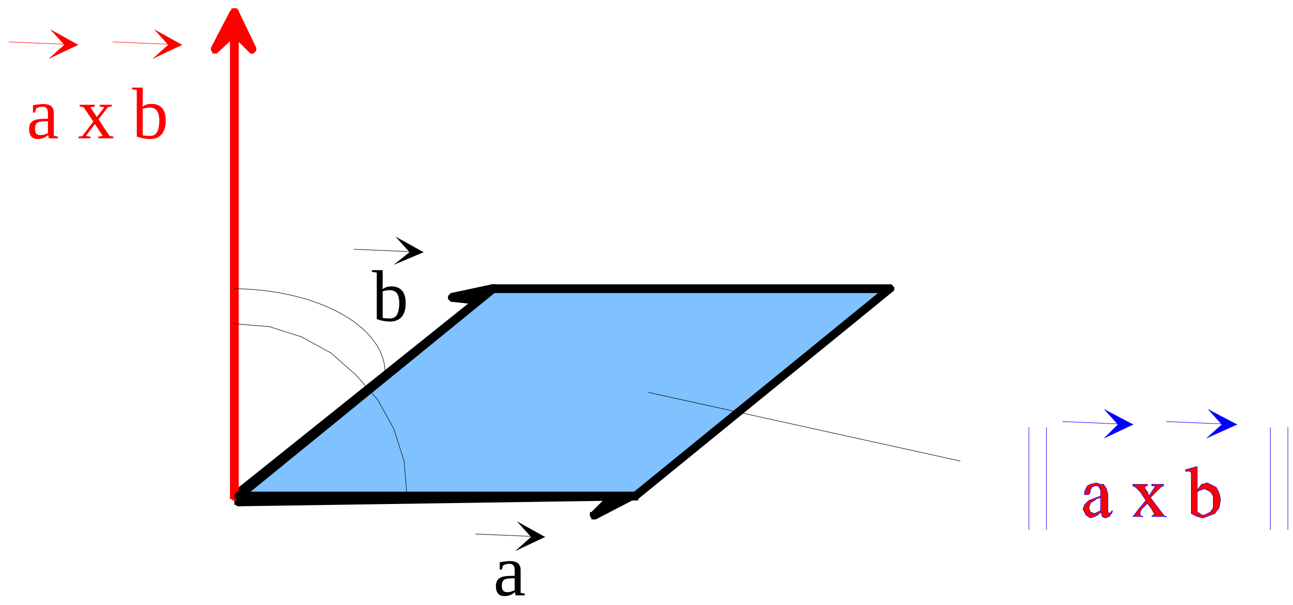
3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

4) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

5) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

mit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

Eigenschaften des Kreuzproduktes:



1) $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

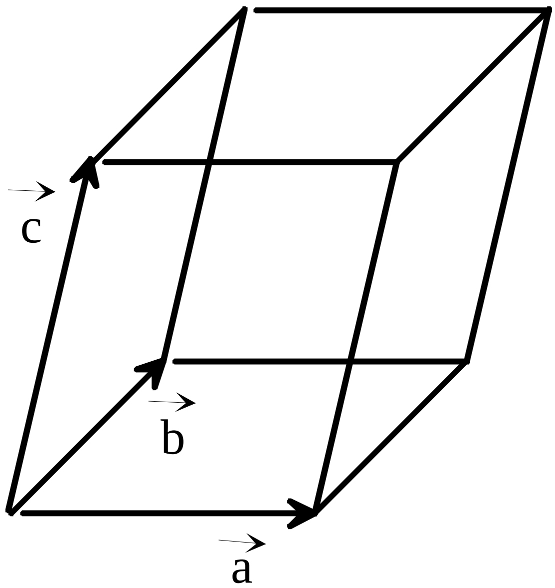
2) $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind kollinear

3) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

4) $\left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|$: Maßzahl der Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

mit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$

Eigenschaften des Spatproduktes



1) $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) \in \mathbb{R}$

2) $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right] = 0 \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind komplanar

3) $\text{abs}\left(\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]\right)$: Maßzahl des Volumens des durch $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spates mit $\vec{a},\vec{b},\vec{c} \in \mathbb{R}^3$

Axiome des n-dimensionalen Vektorraumes

Für $\vec{a}, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

1) Gleichheit: $\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow x_i = y_i, \; \forall i = 1, 2, ..., n$

2) Summe: $\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \cdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

ist kommutativ und assoziativ

3) $\exists \vec{0} \in \mathbb{R}^n$, so dass aus $\vec{a} + \vec{x} = \vec{0}$ folgt

$\vec{x} = -\vec{a}$: entgegengesetztes Element

4) Skalare Multiplikation: $\lambda\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \cdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

ist assoziativ, insbesondere gilt: $1\vec{x} = \vec{x}$

5) Es gelten die Distributivgesetze:

$\alpha\left(\vec{x} + \vec{y}\right) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$

$\left(\alpha + \beta\right)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

Wir betrachten Gleichungssysteme der Art:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\cdots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n &= b_k
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Beispiel

$$\begin{aligned}
4u + 0v - 5w + 0z &= 3 \\
2u + 0v + 0w + 1z &= -1 \\
0u + 2v - 1w + 0z &= 1
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel für die Cramersche Regel:

Das Gleichungssystem aus 2.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

geht mit den Werten $R_1 = 200\Omega$, $R_2 = 100\Omega$, $R_3 = 500\Omega$ und $U_0 = 220V$ über in

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 200\Omega & 100\Omega & 0 \\ 0 & 100\Omega & -500\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 220V \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem hat die Struktur $A\underline{x} = \underline{b}$. Es gilt

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 200\Omega & 100\Omega & 0 \\ 0 & 100\Omega & -500\Omega \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 200\Omega & 100\Omega \\ 0 & 100\Omega \end{matrix} = -50000\Omega^2 - 20000\Omega^2 - 100000\Omega^2 = -17\cdot 10^4\Omega^2$$

Nach der Cramerschen Regel folgt:

$$I_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 220V & 100\Omega & 0 \\ 0 & 100\Omega & -500\Omega \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{(-220V)\cdot(500\Omega+100\Omega)}{-17\cdot 10^4\Omega^2} = \frac{13.2\cdot 10^4 V\Omega}{17\cdot 10^4\Omega^2} = 0.776A$$

$$I_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 200\Omega & 220V & 0 \\ 0 & 0 & -500\Omega \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{220V\cdot(-500\Omega)}{-17\cdot 10^4\Omega^2} = \frac{11\cdot 10^4 V\Omega}{17\cdot 10^4\Omega^2} = 0.647A$$

$$I_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 200\Omega & 100\Omega & 220V \\ 0 & 100\Omega & 0 \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{(-220V)\cdot(100\Omega)}{-17\cdot 10^4\Omega^2} = \frac{2.2\cdot 10^4 V\Omega}{17\cdot 10^4\Omega^2} = 0.129A$$

Gaußalgorithmus

Allgemeine Rechnung				Beispiel		
	x_1 x_2 …… x_n	$\underline{b}$			x_1 x_2 x_3	$\underline{b}$
	a_{11} a_{12} …. a_{1n} …………………… a_{k1} a_{k2} …. a_{kn}	b_1 … b_k			0 3 6 2 4 6 -4 -8 -12	3 2 12
	$a_{11} \neq 0$ a_{12} …. a_{1n} …………………… a_{k1} a_{k2} …. a_{kn}	b_1 … b_k			2 4 6 0 3 6 -4 -8 -12	2 3 12
 a_{21} … a_{k1}	1 $\frac{a_{12}}{a_{11}}$ ….. $\frac{a_{1n}}{a_{11}}$ a_{21} a_{22} …. a_{2n} …………………… a_{k1} a_{k2} …. a_{kn}	$\frac{b_1}{a_{11}}$ b_2 … b_k		 0 -4	1 2 3 0 3 6 -4 -8 -12	1 3 12
	1 $\frac{a_{12}}{a_{11}}$ ….. $\frac{a_{1n}}{a_{11}}$ 0 $\tilde{a}_{22}$ …. $\tilde{a}_{2n}$ …………………… 0 $\tilde{a}_{k2}$ …. $\tilde{a}_{kn}$	$\frac{b_1}{a_{11}}$ $\tilde{b}_2$ …. $\tilde{b}_k$			1 2 3 0 3 6 0 0 0	1 3 16
	1 $\frac{a_{12}}{a_{11}}$ ….. $\frac{a_{1n}}{a_{11}}$ 0 $\tilde{a}_{22}$ …. $\tilde{a}_{2n}$ …………………… 0 $\tilde{a}_{k2}$ …. $\tilde{a}_{kn}$	$\frac{b_1}{a_{11}}$ $\tilde{b}_2$ …. $\tilde{b}_k$			1 2 3 0 3 6 0 0 0	1 3 16
	Formeln im 1. Schritt: $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - a_{1j} \cdot a_{i1}/a_{11}$ $\tilde{b}_i = b_i - b_1 \cdot a_{i1}/a_{11}$ für i=2,3,…k j=2,3,…n			 0	1 2 3 0 1 2 0 0 0	1 1 16
	rangA=2≠3=rang(A|$\underline{b}$) Das Gleichungssys- tem ist unlösbar				1 2 3 0 1 2 0 0 0	1 1 16

Lösung des umgeformten Gleichungssystems

(nur sinnvoll bei rang A = rang (A|<u>b</u>) = r)

Fall 2a: r = n

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \cdots & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \tilde{a}_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{b}_{n-1} \\ \tilde{b}_n \end{pmatrix}$$

Eindeutige Lösung durch Rückwärtseinsetzen:

$1 \cdot x_1 = \tilde{b}_n$ einsetzen in $1 \cdot x_{n-1} + \tilde{a}_{n-1,n} x_n = \tilde{b}_{n-1}$

$\Rightarrow$ $x_{n-1} = \tilde{b}_{n-1} - \tilde{a}_{n-1,n} x_n$ einsetzen in die drittletzte Gleichung usw.

Fall 2b: r < n

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1r} & \tilde{a}_{1,r+1} & \cdots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \tilde{a}_{r-1,r} & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & \tilde{a}_{r,r+1} & \cdots & \tilde{a}_{r,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{b}_r \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1r} \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \tilde{a}_{r-1,r} \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{b}_r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1,r+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{a}_{r,r+1} \end{pmatrix} x_{r+1} - \ldots - \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1n} \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{a}_{r-1,n} \end{pmatrix} x_n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1r} \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \tilde{a}_{r-1,r} \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = b - S_{r+1} t_1 - \ldots - S_n t_{n-r}$$

mit den freien Parametern $t_1, t_2, \ldots t_{n\text{-}r} \in \mathbb{R}$:

- Nichteindeutige Lösung durch Rückwärtseinsetzen
- n-r Parameter bleiben in der Lösung enthalten

Lösung stets in vektorieller Form angeben!

Zur Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

<table>
<tr><td></td><td>$A\underline{x} = \underline{b}$
m Gleichungen
n Unbekannte</td><td>$A\underline{x} = \mathbf{O}$
$\hat{=}$ Spezialfall $\underline{b} = \mathbf{O}$
$\hat{=}$ homogenem System</td></tr>
<tr><td>rangA $\neq$ rang(A|$\underline{b}$)</td><td>System ist unlösbar</td><td>Dieser Fall kann nicht eintreten,
da $\underline{b}$ keine Nichtnullelemente enthält.
D.h. homogene Systeme sind stets lösbar</td></tr>
<tr><td rowspan="3">rangA = rang(A|$\underline{b}$) = r
a) r = n
b) r < n</td><td>System ist lösbar</td><td></td></tr>
<tr><td>Lösung ist eindeutig</td><td>System hat triviale Lösung: $\underline{x} = \mathbf{O}$</td></tr>
<tr><td>Lösung ist nicht eindeutig</td><td>System besitzt nichttriviale Lösungen</td></tr>
</table>

Alternative zum Rückwärtseinsetzen:
Das Verfahren von Gauß – Jordan

- Nach Herstellung der oberen Dreiecksstruktur bzw. von Anfang an wird der Gaußalgorithmus auch zur Erzeugung von Nullen über dem Pivotelement benutzt.
- Es entsteht eine Einheitsmatrix. In der rechten Seite befinden sich die Lösungen.
- Es ist aufwendiger als das Rückwärtseinsetzen, eignet sich aber zur Berechnung der inversen Matrix:

AX = E: Gleichungssystem mit mehreren rechten Seiten:

$A\underline{X}_1 = \underline{E}_1$; $A\underline{X}_2 = \underline{E}_2$; ….. $A\underline{X}_n = \underline{E}_n$

➔ $X = A^{-1}E = A^{-1}$; X besteht aus den Spaltenvektoren $\underline{X}_1, \underline{X}_2, \ldots, \underline{X}_n$

➔ X ist die eindeutige Lösung und kann mit dem Gauss-Jordan-Verfahren berechnet werden:

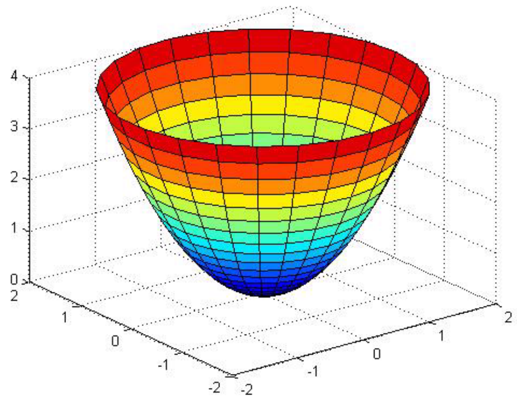
➔ Ausgangszustand: (A|E), Endzustand: $(E|A^{-1})$

Beispiele: Fall 2a

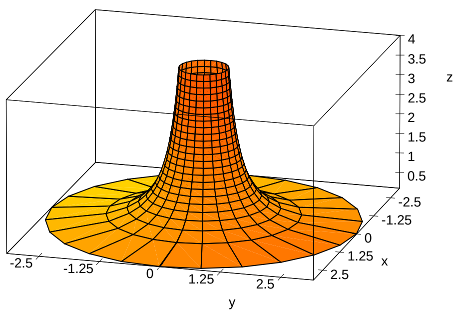
	x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
1	1	2	1	2
1	0	1	1	2
*	0	0	1	3
2	1	2	0	-1
*	0	1	0	-1
	0	0	1	3
	1	0	0	1
	0	1	0	-1
	0	0	1	3

Inversion

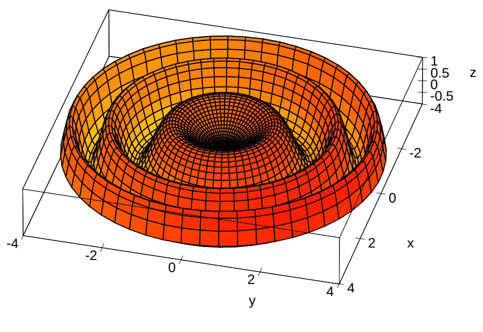
	A		E	
*	1	2	1	0
3	3	4	0	1
	1	2	1	0
	0	-2	-3	1
2	1	2	1	0
*	0	1	1.5	-0.5
	1	0	-2	1
	0	1	1.5	-0.5
	E		A^{-1}	



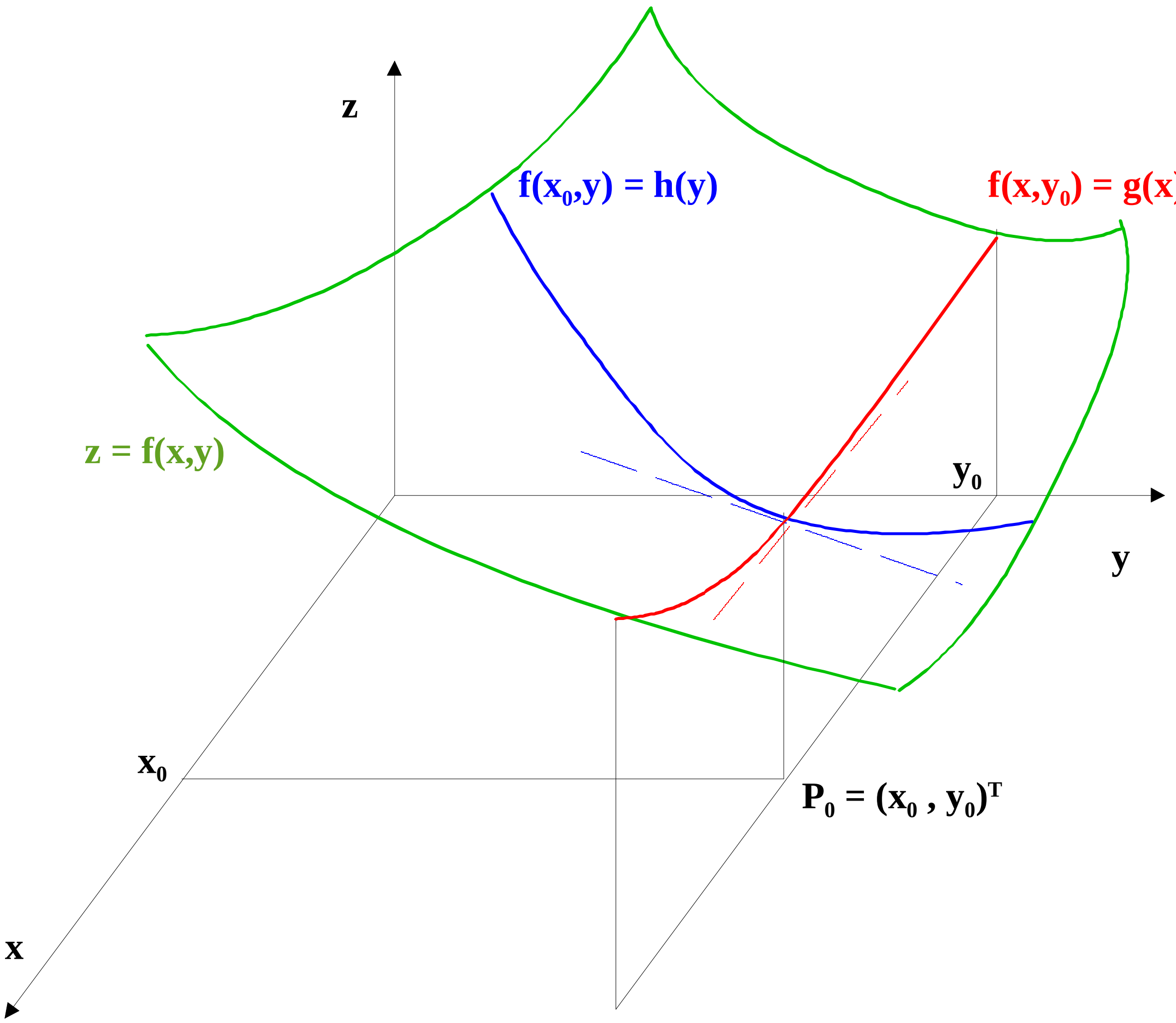
Beispiel 5.41 $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$



Beispiel 5.42 $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$



Interpretation der partiellen Ableitungen:



Satz über die Partialbruchzerlegung:

Für jede echt gebrochen rationale Funktion

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-x_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_j)^{k_j}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_rx+q_r)^{s_r}}$$

gilt:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_{11}}{(x-x_1)} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \ \ldots \ + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \ \ldots \ +$$

$$+ \frac{A_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{A_{j2}}{(x-x_j)^2} + \ \ldots \ + \frac{A_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} +$$

$$+ \frac{B_{11}x+C_{11}}{(x^2+p_1x+q_1)} + \ \ldots \ + \frac{B_{1s_1}x+C_{1s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \ \ldots \ +$$

$$+ \frac{B_{r1}x+C_{r1}}{(x^2+p_rx+q_r)} + \ \ldots \ + \frac{B_{rs_r}x+C_{rs_r}}{(x^2+p_rx+q_r)^{s_r}}$$

- Dabei bezeichnen indizierte Großbuchstaben vorerst unbekannte Konstanten.
- $x_1,\ldots x_j$ sind Nullstellen von q(x) der Vielfachheit $k_1,\ldots k_j$.
- $(x^2+p_1x+q_1),\ldots,(x^2+p_rx+q_r)$ sind Teiler von q(x), die Paaren konjugiert komplexer Nullstellen mit den Vielfachheiten $s_1,\ldots,s_r$ entsprechen.

<u>Schritte der Partialbruchzerlegung:</u>

1. Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren bzw. Terme der Form x^2+px+q mit $\frac{p^2}{4}<q$, z.B. mittels Hornerschema
2. Aufstellen des Ansatzes für die Partialbruchzerlegung entsprechend obigem Satz
3. Bestimmung der Konstanten durch Koeffizientenvergleich oder Einsetzmethode

Integration von Partialbrüchen

Mit der Partialbruchzerlegung wird die Integration echt gebrochen rationaler Funktionen auf folgende 4 Typen von Integralen zurückgeführt:

1. Für einfache Nennernullstellen:

$$\int \frac{A}{x-x_0}\,dx = A\ln|x-x_0| + K$$

2. Für mehrfache Nennernullstellen:

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^k}\,dx = -\frac{A}{(k-1)(x-x_0)^{k-1}} + K$$

3. Für 2 konjugiert komplexe Nullstellen:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{B-\frac{Ap}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + K$$

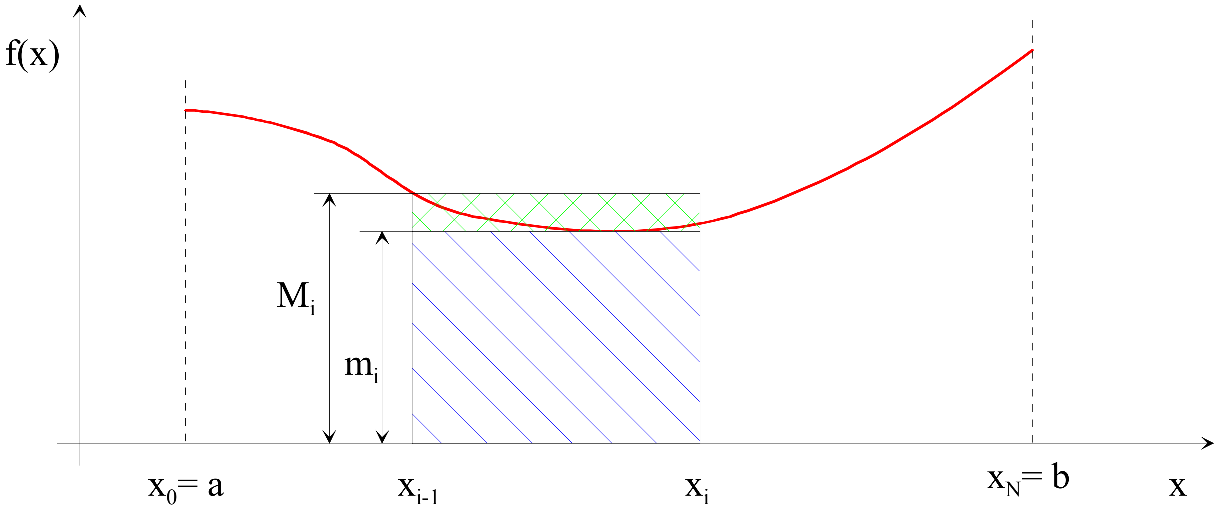
4. Für mehrfache Paare konjugiert komplexer Nullstellen:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{A}{2}\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,dx + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{(x^2+px+q)^k}\,dx$$

$$= -\frac{A}{2}\frac{1}{(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} + \text{ Rekursionsformel (s. Tafelwerk)}$$

Prinzip zur Flächenbestimmung (RIEMANN 1826-1866)

Gegeben sei eine stetige Funktion f(x) $\geqslant$ 0 über dem Intervall [a,b].



Wir benutzen eine Zerlegung des Intervalls [a,b] (Gitter oder Netz)

$$\omega = \{x_i \mid i = 0,1,\dots,N;\ x_0 = a,\ x_N = b;\ h_i = x_i - x_{i-1}\},$$

die das Intervall [a, b] in Teilintervalle aufteilt.

Es sei $\qquad m_i = \min\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad\qquad M_i = \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

Für die Fläche A zwischen der Kurve und der x-Achse gilt:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i h_i \quad \leq \quad A \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{N} M_i h_i$$

(Untersumme) $\qquad\qquad$ (Obersumme)

Verfeinerung der Zerlegung, so dass gilt $\delta = \max\limits_i h_i \to 0$; Erwartung:

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{N} m_i h_i \quad = \quad A \quad = \quad \lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{N} M_i h \qquad (*)$$

Gilt (*), so folgt mit ξ_i beliebig aus dem Intervall $[x_{i-1},x_i]$

$$m_i \quad \leq \quad f(\xi_i) \quad \leq \quad M_i$$

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) h_i \quad = \quad A$$

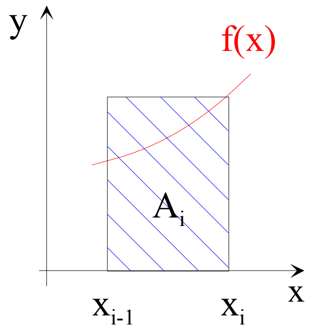
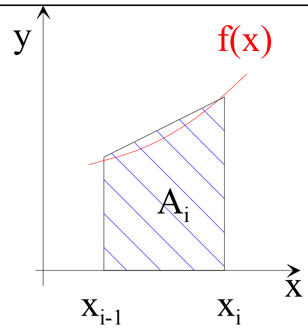
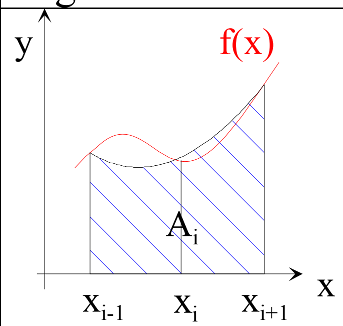
weil die Folgen der Unter- bzw. Obersummen eine konvergente Minorante bzw. Majorante mit demselben Grenzwert darstellen.
(Beweis: RIEMANN, 1826 – 1866)

Numerische Berechnung des bestimmten Integrals

Äquidistante Zerlegung des Intervalls [a,b]:

$\omega = \{x_i \mid i = 0,1,\ldots,N;\ x_0=a,\ x_N = b;\ x_i = a + ih;\ h =(b-a)/N\}$

Verschiedene Näherungen des Flächeninhaltes A_i zwischen f(x) und der x-Achse sind möglich. In jedem Teilintervall $[x_i;x_{i+1}]$ wird A_i ersetzt durch

ein Rechteck	ein Trapez	eine Fläche, die durch eine Parabel nach oben begrenzt wird.
		
Rechteckregel: $\int_a^b f(x)dx \simeq$ $h\cdot\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$	**Sehnen-Trapez-Regel:** $\int_a^b f(x)dx \simeq$ $\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{N}(f(x_{i-1})-f(x_i))$	**Simpsonregel:** $\int_a^b f(x)dx \simeq$ $\frac{h}{3}(f(a)+4u+2g+f(b))$ $u=f(x_1)+f(x_3)+\ldots f(x_{N-1})$ $g=f(x_2)+f(x_4)+\ldots f(x_{N-2})$ Voraussetzung: N: gerade Zahl
- Näherung 0. Ordnung - N muss groß sein, damit Näherung brauchbar	- Näherung 1. Ordnung - stückweise lineare Interpolation von f(x) - genauer als Rechteckregel	- Näherung 2. Ordnung - genauer als Trapezregel und dabei - kaum aufwendiger als diese

Eigenschaften des bestimmten Integrals

Aus der Definition des bestimmten Integrals lässt sich aufgrund der Eigenschaften von Summen und Grenzwerten aus folgern:

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \text{für } a \le c \le b$

2. Folgerung aus 1. mit c = a: $\int_a^a f(x)dx = 0$

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4. Linearität des bestimmten Integrals:
   $$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

5. Folgerung aus 4. für f(x) < 0:
   $$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b -f(x)dx < 0$$

6. Damit liefern Flächen unter x-Achse einen negativen Beitrag zum Integral. D.h., soll die Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse bestimmt werden, ist zwischen den Nullstellen der Funktion zu integrieren, und die einzelnen Integrale sind betragsmäßig aufzusummieren!
   $$A = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_3}^{x_4} f(x)dx\right|$$

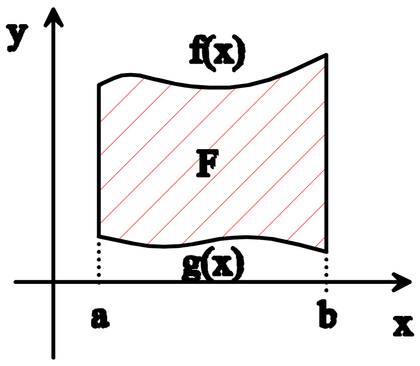
7. $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

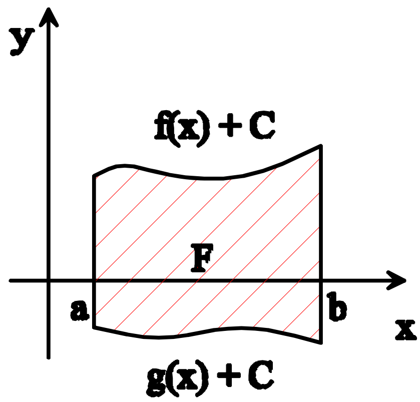
8. Folgerung aus 7.: $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

9. **Mittelwertsatz der Integralrechnung:**
   f(x) sei stetig auf [a,b]. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$, so dass gilt:
   $$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a)$$

Anwendungen der Integralrechnung

1. Flächenberechnungen





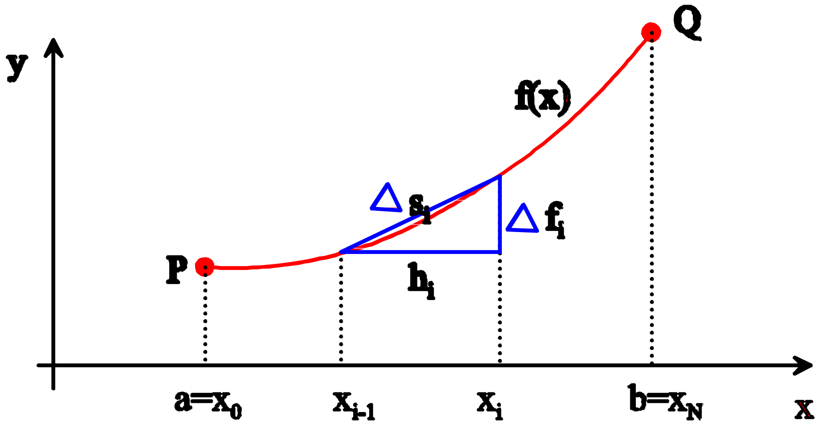
$$f(x) \geq g(x) \geq 0$$

$$F = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Zwischen f(x) + C und g(x) + C liegt die gleiche Fläche F

➔ $F = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \quad \text{für} \quad f(x) \geq g(x)$

2. Bogenlänge einer Kurve



$\omega = \{x_i \mid i=0,1,...,N;\ x_0=a,\ x_N=b\}$

$h_i = x_i - x_{i-1}$; $\triangle f_i = h_i f'(\xi_i)$; mit $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$; $i = 1,2,\ldots,N$
(Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Länge des Sehnenpolygons:

$$s_N = \sum_{i=1}^N \Delta s_i = \sum_{i=1}^N \sqrt{h_i^2 + (\Delta f_i)^2} = \sum_{i=1}^N \sqrt{h_i^2 + (h_i f'(\xi_i))^2} = \sum_{i=1}^N h_i \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}$$

Existiert das Integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f\ '(x))^2} dx = \lim_{d \to 0} s_N = s \quad \text{mit } d = \max_i h_i \ ,$$

so ist s die Länge der Kurve PQ. Die Kurve heißt dann rektifizierbar.
Betrachten:

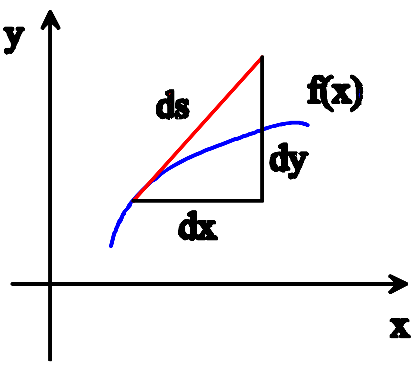
$$s = s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f\ '(t))^2}\, dt, \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f\ '(x))^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + (f\ '(x))^2} dx = \sqrt{(dx)^2 + (\frac{dy}{dx})^2 (dx)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

ds heißt Bogenelement oder Bogendifferential. Damit gilt: $s = \int_P^Q 1 ds$

Ist eine Kurve aus dem $\mathbb{R}^2$ in Parameterform gegeben, so gilt:

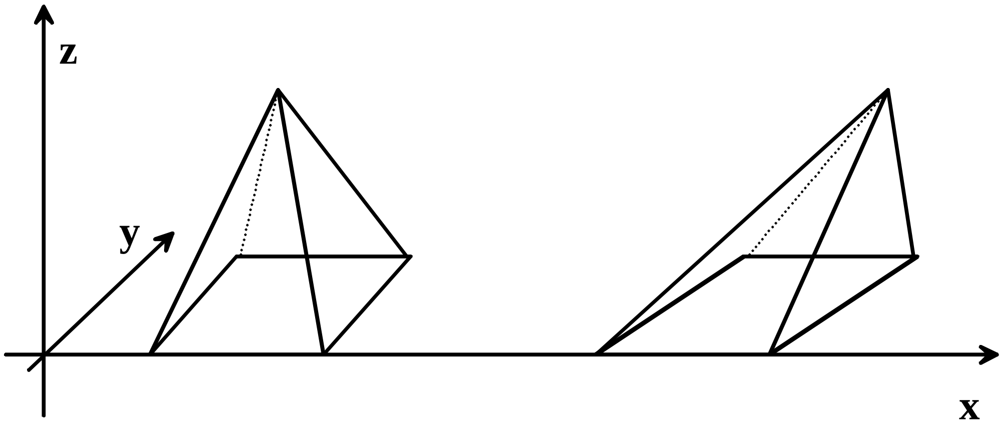
$$x = x(t), \quad dx = \dot{x}\, dt$$
$$y = y(t), \quad dy = \dot{y}\, dt$$
$$\Rightarrow \quad ds = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt$$



Im $\mathbb{R}^n$ gilt analog: $ds = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\dot{x}_i(t))^2)}\, dt$ sowie $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\dot{x}_i(t))^2)}\, dt$

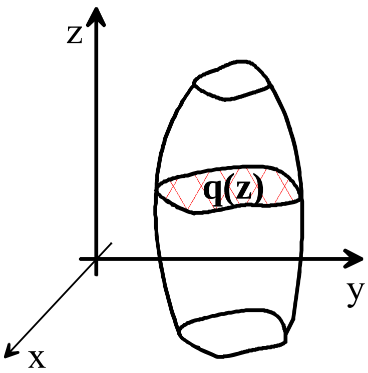
Volumenberechnung aus der Querschnittsfläche

Das Prinzip des CAVALIERI (1598-1647) gilt unabhängig von der Integralrechnung!



$V_1 = V_2$, wenn $q_1(z) = q_2(z)$ für alle z

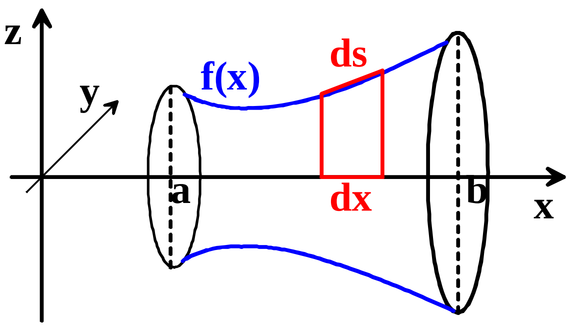
Ist q(z) der Querschnitt eines Körpers in der Höhe z, so gilt:



$$V = \int_a^b q(z)dz = \int_a^b 1dV$$

Ist q(z) berechenbar, so kann V bestimmt werden.
Bei Rotationskörpern gilt speziell:

q(x) ist Fläche eines Kreises mit dem Radius f(x): $q(x) = \pi \cdot f^2(x)$



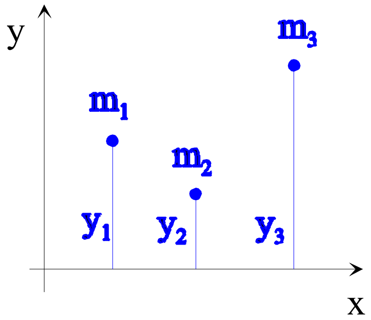
$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

Analog gilt für die Mantelfläche mit dem Kreisumfang $u = 2\pi \cdot f(x)$:

$$M = \int_a^b 2\pi f(x)ds = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

Statisches Moment / Schwerpunkt

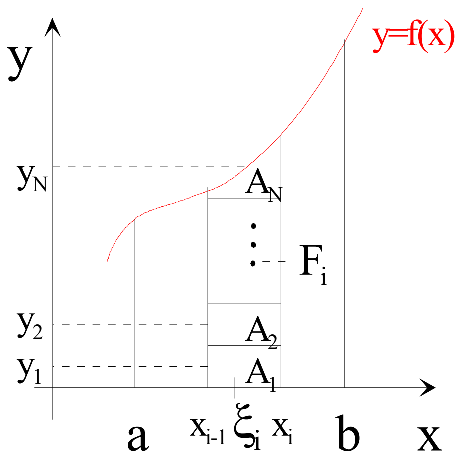
Für endlich viele Teilchen gilt:



statisches Moment bzgl. der x-Achse: $M_x = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3$

y-Schwerpunktkoordinate: $S_y = M_x / (m_1 + m_2 + m_3)$

Bei unendlich vielen, kontinuierlich verteilten Masseteilchen, $\rho \equiv 1$, gilt, dass die Masse jedes Teilstückes seiner Fläche entspricht. Berechnung des statischen Moments der Fläche F_i, die durch das Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ aufgespannt wird:



ω : äquidistante Zerlegung des Intervalles [a,b] ; N sei gerade

$A_1 = A_2 = \ldots = A_N = A_i^i$

$$\begin{aligned} M_{xi} &= A_i^i\, y_1 + A_i^i\, y_2 + \ldots + A_i^i\, y_N \\ &= A_i^i\,(y_1 + y_2 + \ldots + y_N) \\ &= A_i^i \cdot \frac{N}{2}(y_1 + y_N) \;\simeq\; A_i^i \cdot \frac{N}{2} f(\xi_i) \\ &= (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \frac{1}{N}\frac{N}{2} f(\xi_i) \\ &= 0.5 f^2(\xi_i)\Delta x \end{aligned}$$

$$M_x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} M_{xi} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} f^2(\xi_i)\Delta x = \int_a^b \frac{1}{2} y^2 dx$$

$$M_y = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{N} \xi \cdot f(\xi_i)\Delta x = \int_a^b xy dx$$

Koordinaten x_s, y_s des Schwerpunktes einer homogenen Fläche F unter der Kurve y = f(x):

$$x_s = \frac{M_y}{F} = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx} \qquad y_s = \frac{M_x}{F} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} y^2 dx}{\int_a^b y dx}$$

Uneigentliche Integrale

Definition 1 *Uneigentliche Integrale mit unendlichen Grenzen:*
Sei $f(x)$ auf beliebigen Intervallen $[a, b]$ integrierbar.

a) $\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$

b) $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$

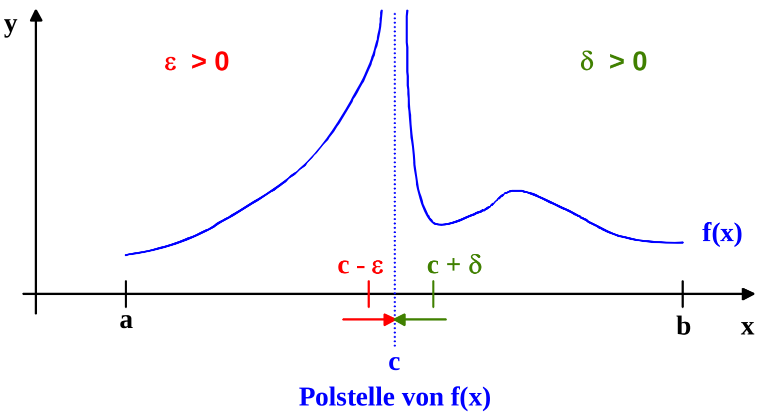
c) $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^c f(x)dx + \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_c^b f(x)dx; \qquad c \in \mathbb{R}$

Definition 2 *Uneigentliche Integrale mit nichtbeschränkten Funktionen:*
Sei $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty, \quad a \le c \le b$. *(Eventuell werden nur einseitige Grenzwerte benötigt!)*

a) $\int\limits_a^c f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$

b) $\int\limits_c^b f(x)dx = \lim\limits_{\delta\to 0+0} \int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx$

c) $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim\limits_{\delta\to 0+0} \int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx$



Majorantenkriterium

Es gelte $0 \le f(x) \le g(x)$ für $x \ge a$.
$f(x)$ sei stückweise stetig auf jedem Intervall $[a, b]$ mit $b > a$.

Konvergiert $\int_a^\infty g(x)dx$, *so auch* $\int_a^\infty f(x)dx$

Divergiert $\int_a^\infty f(x)dx$, *so auch* $\int_a^\infty g(x)dx$, *denn es gilt dann* $\int_a^\infty f(x)dx \le \int_a^\infty g(x)dx$.