Komplexe Zahlen

Nutzen Sie das Arbeitsblatt Komplexe Zahlen und lösen Sie folgende Aufgaben. Wenn nicht anders bestimmt, ist die Lösung in arithmetischer Form anzugeben.

1. Bestimmen Sie die trigonometrische oder Euler'sche Form der folgenden komplexen Zahlen, stellen Sie sie in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

1.1 z = -1 - i, 1.2 $z = 1 - \sqrt{3}i$, 1.3 z = 8 +15i

1.4 z= -i

2. Berechnen Sie:

2.1 $z = \frac{(3+2i)^2}{(5-7i)^2}$ 2.2 $z = -2i + \frac{2-3i}{4+i}$ 2.3 $z = (1+2i)^7$

2.4 z= $(1 - 3i)^2 + (1 + 3i)^5$ 2.5 z= $(1 + i)^{20}$

2.6 $z = \frac{(3+i)(2+i)}{2+3i}$ 2.7 $z = \frac{2+3i}{4-i} + \frac{2-3i}{4+i}$ 2.8 z= $(1 - i)^{13}$

3. Bestimmen Sie alle verschiedenen Werte z_k, die sich für $\sqrt[n]{z}$ ergeben.

3.1 $z = \sqrt[3]{-1}$ 3.2 $z = \sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$ 3.3 $z = \sqrt[3]{-0.5\sqrt{2}(1-i)}$

4. Lösen Sie die Gleichungen:

4.1 $z^3 = 5 - i$ 4.2 $z^2 + 1 - \sqrt{3}i = 0$ 4.3 $z^6 + 8i = 0$

4.4 $z^4 - 3z^2 = 4$ 4.5 $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$

5. Berechnen Sie!

5.1 $z = e^{(1+2\pi i/3)}$ 5.2 $z = e^{(-1+3\pi i/2)}$ 5.3 $z = e^{(0.5+\pi i/4)}$

Fassen Sie zusammen:

5.4 $z = \left(\frac{e^{2+3i}}{e^{5-i}}\right)^2$ 5.5 $z = \frac{e^{2-i}e^{0.5-2i}}{e^{3-3i}}\sqrt{e}$

5.6 $z = \left(e^{\pi(1+i)} \cdot e^{\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i\right)}\right)^5$

Lösungen:

1.1 $z = \sqrt{2}e^{i225°}$ 1.2 $z = 2e^{i300°}$ 1.3 $z = 17e^{i61,93°}$

1.4 $z = e^{i270°}$

2.1 $z = -0,17531 + 0,11322i$ 2.2 $z = \frac{5}{17} - \frac{48}{17}i$

2.3 $z = 29 + 278i$ 2.4 308 – 18i 2.5 z= -1024

2.6 $z = \frac{25}{13} - \frac{5}{13}i$ 2.7 $z = \frac{10}{17}$ 2.8 z= -64 + 64i

3.1 $z_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ $z_1 = -1$ $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

3.2 $z_0 = \sqrt{3} + i;$ $z_1 = -1 + \sqrt{3}i;$ $z_2 = -\sqrt{3} - i;$ $z_3 = 1 - \sqrt{3}i;$

3.3 $z_0 \approx 0,707 + 0,707i;$ $z_1 \approx -0,966 + 0,259i;$ $z_2 \approx 0,259 - 0,966i;$

4.1 $z_0 = -0,957 - 1,430i;$ $z_1 = -0,760 + 1,544i;$ $z_2 = 1,718 - 0,113i;$

4.2 $z_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}\,i);$ $z_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}\,i);$

4.3 $z_0 = 1 + i;$ $z_1 \approx -0,366 + 1,366i;$ $z_2 \approx -1,366 + 0,366i;$
$z_3 = -1 - i;$ $z_4 \approx 0,366 - 1,366i;$ $z_5 \approx 1,366 - 0,366i;$

4.4 $z_0 = 2;$ $z_1 = i;$ $z_2 = -2;$ $z_3 = -i;$

4.5 $z_0 = \sqrt{3} + i;$ $z_1 = -\sqrt{3} + i;$ $z_2 = -\sqrt{3} - i;$ $z_3 = \sqrt{3} - i;$

5.1 z= -1,359 + 2,354i

5.2 $z = -\frac{i}{e} \approx -0,368i;$

5.3 z= 1,166 + 1,166i

5.4 $z = e^{-6+8i}$

5.5 z = 1

5.6 $z = \exp\left(\frac{15}{2}\pi + \frac{10}{3}\pi i\right)$

Matrizen / Determinanten

1. Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}. \quad d = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie A + B, A + C, AC, BC, (A + B)C, A^TB, B^TA, Bd, d^TB^T,
3A - 4B, 2A-3B,….

2. Berechnen Sie folgende Determinanten:

a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \det B = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & -10 \end{vmatrix}$

b) $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}, \quad \det D = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

c) $\det E = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & -2 \end{vmatrix}, \quad \det F = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & -1 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & -13 & 12 & -1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

3. Welche der folgenden Matrizen besitzen eine Inverse! Berechnen Sie diese!

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix};$

b) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$

4. Lösen Sie die folgenden Matrizengleichungen nach X auf!

a) $XA + 2X = A$, b) $AXB = C$ c) $\frac{1}{2}C^T X - 2X - B = 3E$

d) Berechnen Sie die Lösungen von a) bis c) mit den Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Lösen Sie die folgenden Matrizengleichungen nach B auf!

a) $(AX)^{-1} + B = C$ b) $AX - BCX = (AB^T)^T$ c) $B(A + X^{-1}) = BC + E$
d) $ABX^{-1} = X^{-1} + A + B$ e) $5B + C = ACB$ f) $AX - X(B - A) = AB$

Lösungen:

Die folgenden Lösungen sind teilweise Matlabausdrucke und enthalten deshalb dann keine Matrizenklammern!

1.

```
A+B =
     5     0     4
     6    -1     6

AC =
    10     6
    21    18

BC =
    16    11
    12     7

(A+B)C =
    26    17
    33    25
```

B^TA =

```
    14    -4    22
     0     0     0
    11    -1     8

Bd =
     4
    -2

3A-4B =
     1     0    -9
   -10    -3    11
```

A^TB =

```
     14   0    11
     -4   0    -1
     22   0     8
```

$d^TB^T = (Bd)^T$ =

```
     4    -2

2A-3B =
     0     0    -7
    -8    -2     7
```

A+C ist nicht definiert

2. det A = -14; det B = -26; det C = -10 ; det D = 78 ; det E = 128; det F =50

3. a) det B = 0; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $C^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; $D^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$;

b) detE = 3; det F = 0; det G = -2

E^{-1} =

```
   -0.3333    0.3333   -0.3333
   -1.3333    0.3333    0.6667
    1.3333   -0.3333    0.3333
```

G^{-1} =

```
   1    -1.5   -7
   0     0.5    2
   0     0     -1
```

4.

a) $X = A(A + 2E)^{-1}$ = [0.6000 0
0.8000 -1.0000]

b) $X = A^{-1}CB^{-1}$ = [1.0000 -0.8333
-3.0000 2.3333]

c) $X = (0.5C^T-2E)^{-1}(3E+B)$ = 1/11*[-8 -1
16 -9]

5.

a) $B = C - (AX)^{-1}$

b) $B = AX(A^T + CX)^{-1}$

c) $B = (A + X^{-1} - C)^{-1}$

d) n.l.

e) $B =(AC – 5E)^{-1}C$

f) B = (A + X)-1(AX + XA)

Vektoren

1. Welche der folgenden Vektoren bilden eine Basis im R^2 ?

1.1 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 1.2 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ 1.3 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ 1.4 $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

2. Welche der folgenden Vektoren bilden eine Basis im R^3? Stellen Sie in diesen Basen den Vektor $\underline{d}=\begin{pmatrix}6 & 2 & 0\end{pmatrix}^T$ dar!

2.1 $\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \underline{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \underline{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 2.2 $\underline{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix}, \underline{b}=\begin{pmatrix}0\\5\\-3\end{pmatrix}$

2.3 $\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \underline{b}=\begin{pmatrix}3\\4\\-3\end{pmatrix}, \underline{c}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

3. Bestimmen Sie für jeweils zwei der drei gegebenen Punkte den Abstand:
$P_1=(1,2,3)$, $P_2=(2,-3,-2)$, $P_3=(-3,-3,-3)$

4. Gegeben sind die Vektoren $\underline{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}, \underline{b}=\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}, \underline{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie: $\underline{\boldsymbol{a}}+\underline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{a}}-\underline{\boldsymbol{b}}, \underline{\boldsymbol{a}}+\underline{\boldsymbol{b}}+\underline{\boldsymbol{c}}, \underline{\boldsymbol{a}}-2\underline{\boldsymbol{b}}-3\underline{\boldsymbol{c}}$. Geben Sie die Beträge dieser Vektoren an.

5. Bestimmen Sie die Winkel zwischen den Vektoren $\underline{a},\underline{b}$.

5.1 $\underline{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, \underline{b}=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$ 5.2 $\underline{a}=\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}, \underline{b}=\begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix}$

5.3 $\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \underline{b}=\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$

6. Geben Sie Vektoren des R^2 an, die zu folgenden Vektoren orthogonal sind.

6.1 $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ 6.2 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 6.3 $\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ 6.4 $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

7. Bestimmen Sie zwei Zahlen α_2 und α_3 so, daß der Vektor $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ auf den Vektoren $\underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ senkrecht steht.

8. Zeigen Sie, daß die drei Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ paarweise aufeinander senkrecht stehen und in der angegebenen Reihenfolge ein Rechtssystem bilden.

9. Die Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelogramm auf.

Bestimmen Sie Umfang, Flächeninhalt, Längen der Diagonalen sowie die Winkel zwischen den Seiten und zwischen den Diagonalen.

10. Welche der folgenden Tripel von Punkten sind kollinear? Geben Sie das Volumen der damit aufgespannten Spate an.

10.1	$P_1 = (1,3,-2)$,	$P_2 = (5,0,3)$,	$P_3 = (-3,6,-7)$
10.2	$P_1 = (10,5,-1)$	$P_2 = (4,2,2)$	$P_3 = (6,3,1)$
10.3	$P_1 = (1,2,4)$	$P_2 = (3,5,-1)$	$P_3 = (2,4,-2)$.

Lösung:

1. b), c) linear abhängig a, d) linear unabhängig

2.1 Basis $\underline{d} = \underline{a} + 2\underline{b} + 3\underline{c}$ 2.2, 2.3 keine Basis

3. $|P_1P_2| = 7{,}14$ $|P_1P_3| = 8{,}77$ $|P_2P_3| = 5{,}099$

4. $\underline{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{13}}\underline{a}$, $\underline{b}^0 = \frac{1}{\sqrt{20}}\underline{b}$, $\underline{c}^0 = \frac{1}{\sqrt{10}}\underline{c}$,

$\underline{a} + \underline{b} = (1\ 6\ 0)^T$, $\underline{a} - \underline{b} = (5\ -2\ 0)^T$, $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = (2\ 6\ -3)^T$, $\underline{a} - 2\underline{b} - 3\underline{c} = (4\ -6\ 9)^T$

$|\underline{a}| = \sqrt{13}$, $|\underline{b}| = \sqrt{20}$, $|\underline{c}| = \sqrt{10}$

5.1 $\alpha = 135°$ 5.2 $\alpha = 90°$ 5.3 $\alpha = 109{,}5°$

6.1 $\underline{a} = \begin{pmatrix} -1{,}5a_y \\ a_y \end{pmatrix}$ 6.2 $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \end{pmatrix}$ 6.3, 6.4 wie 6.1

7. $\alpha_2 = 5/2$, $\alpha_3 = -9/2$

8. $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ $\underline{a} \cdot \underline{c} = 0$ $\underline{b} \cdot \underline{c} = 0$ $[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] > 0$

9. u = 9,2 A = 3,3 $|d_1| = \sqrt{6}$ $|d_2| = \sqrt{18}$ $\alpha = 132{,}1°$ $\beta = 146°$

10.1, 10.2: kollinear, V=0; 10.3: V=10

Lineare Gleichungssysteme/W

1. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mittels des Algorithmus' von Gauß .

1.1
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 60 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 100 \\ 10x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 &= 150 \\ 20x_1 + x_2 + 4x_3 + 10x_4 &= 210 \end{aligned}$$

1.2
$$\begin{aligned} 7x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= 100 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

1.3
$$\begin{aligned} -4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= -2 \\ -6x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 &= -4 \\ -8x_1 + x_2 - 4x_3 + 6x_4 &= -9 \\ -10x_1 + x_2 - 7x_3 + 10x_4 &= -13 \end{aligned}$$

1.4
$$\begin{aligned} -10x_1 + x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 8x_1 - x_2 - 16x_3 &= 10 \\ 9x_1 - x_2 - 11x_3 &= 4 \end{aligned}$$

1.5
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 8 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

1.6
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 362 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 &= 296 \\ -x_1 - 10x_2 + 5x_3 &= 210 \end{aligned}$$

1.7
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 2 \end{aligned}$$

1.8
$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 17x_4 &= -20 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 &= -8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 7x_4 &= -4 \\ 2x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

1.9
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 - 7x_5 &= 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

2. Für welche $a \in R$ sind die Gleichungssysteme lösbar? Geben Sie die Lösungen an!

2.1
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \\ 2x_1 + 6x_2 + ax_3 &= 40 \end{aligned}$$

2.2
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 18 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= a \end{aligned}$$

3. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mit der Cramer`schen Regel!

3.1
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 14 \end{aligned}$$

3.2
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 110 \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

3.3
$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 17 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 15 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 13 \end{aligned}$$

3.4
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 - x_4 &= 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Lösung:

1.1 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$ 1.2 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ 1.3 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

1.4 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -58 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -56 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1.5 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 2 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

1.6 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ -46 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1.7 $L = \varnothing$

1.8 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -21/2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 1.9 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.1 a = 10 keine Lösung, a $\neq$ 10: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + \frac{2}{a-10} \\ 5 - \frac{4}{a-10} \\ \frac{2}{a-10} \end{pmatrix}$

2.2 a $\neq$ 9: keine Lösung, a = 9: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.1 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 15{,}5 \\ 13{,}5 \end{pmatrix}$ 3.2 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 17 \end{pmatrix}$ 3.3 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22/7 \\ 15/7 \\ 8/7 \end{pmatrix}$

3.4 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Differentialrechnung / Wiederholerkurs

1. Bilden Sie die 1.Ableitung von:

a) $y=(x^2+4)(2x^2-8)$ b) $y=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$ c) $y=\sqrt{(x-1)^3}$

d) $y=\sqrt{x+\sin(2x)}$ e) $y=\cos(3x+1)^3$ f) $y=\ln(\cos x)\cdot\cos^2 x$

g) $y=\exp(-\dfrac{1}{x^2})$ h) $y=\tan(\sin x)$ i) $y=(x-2)^3(x^5-1)$

j) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ k) $y=\sqrt{\dfrac{1}{\cos x}}$ l) $y=\sin\sqrt{\dfrac{x}{2}}$

m) $y=x^{\cos x}\quad x>0$ n) $y=x^{e^x};\quad x>0$ o) $y=x^{\ln x};\quad x>1$

2. Bilden Sie die 2. Ableitungen von:

a) $y=\sin x\cdot\ln x$ b) $y=(1-x^4)^5$ c) $y=e^{\sin x}$

3. a) An welchen Punkten schneiden die Tangenten an die Kurve $y=x^2$ die x-Achse unter einem Winkel von 45^o bzw. 135^o?
b) Welchen Winkel bildet die Tangente im Punkt $(x_0=3,y_0)$ an die Kurve $y=f(x)=x\sqrt{x+1}$ mit der x- Achse?

4. Bestimmen Sie alle zweiten partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $z(x,y)=x^3-8x^2y+xy^2+15x-20y+2+(x+y^2)^2$

b) $u(x,y)=\sqrt{r^2-x^2-y^2};\, r=const.$ c) $f(x,y)=\dfrac{3x^2+2xy^2}{1-x}$

5. Berechnen Sie folgende Grenzwerte (Bernoulli - L'Hospital)!

a) $\lim\limits_{x\to 0+0}(\ln x)\cdot(\tan x)$ b) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos x}{\sin 2x}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+4x-5}{2x^3-2}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$

6. Bestimmen Sie die Intervalle, in denen y = f(x) monoton ist :

a) $y=x^3-4.5x^2+6x-2.5$ b) $y=\dfrac{1}{a+x^2}$ c) $y=\dfrac{x^2-2x}{(1+x)^3}$

7. Führen Sie für folgende Funktionen eine Kurvendiskussion durch. Untersuchen Sie: Definitionsbereich, Nullstellen, Unstetigkeitsstellen, Verhalten im Unendlichen, Extrema, Wendepunkte, Graph.

a) $y=f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$ b) $y=f(x)=e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$

c) $y = f(x) = \frac{\ln x}{x}$ d) $y = f(x) = \frac{e^x}{x-1}$

Lösungen:

$1a)\ y' = 8x^3$ $b)\ y' = 1$ $c)\ y' = \frac{3(x-1)^2}{2\sqrt{(x-1)^3}}$

$1d)\ y' = \frac{2\cos(2x)+1}{2\sqrt{x+\sin(2x)}}$ $e)\ y' = -9(3x+1)^2 \sin(3x+1)^3$

$f)\ y' = -\frac{\sin 2x \cdot (2\ln(\cos x)+1)}{2}$ $1g)\ y' = \frac{2\exp(\frac{-1}{x^2})}{x^3}$

$h)\ y' = cos(x) \cdot (tan(sin(x))^2 + 1)$ $i)\ y' = -(x-2)^2(-8x^5 + 10x^4 + 3)$

$1j) y' = \frac{x*(x^3-2)}{(x^3-1)^{(4/3)}}$ $k) y' = \frac{\tan x}{2\sqrt{\cos x}}$

$l) y' = \frac{\cos\sqrt{\frac{x}{2}}}{4\sqrt{\frac{x}{2}}}$ $m) y' = x^{\cos x} \cdot (-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x})$

$n)\ y' = x^{e^x - 1} e^x + x^{e^x} e^x \ln x$ $o)\ y' = 2x^{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x}$

$2a)\ y'' = \frac{2cosx}{x} - \frac{sinx}{x^2} - \ln(x) \cdot sinx$ $b)\ y'' = -20x^2(x^4-1)^3(19x^4-3)$

$c)\ y'' = e^{\sin x}(-sin^2 x - sinx + 1)$

3a) P1 (0.5;0.25); P2(-0.5;0.25)

3b) 70°

$4a)\ z_x = 3x^2 - 14xy + 15 + 2x + 2y^2;\quad z_y = 8x^2 + 6xy - 20 + 4y^2$

$b) u_x = -x(r^2 - x^2 - y^2)^{-0.5};\quad u_y = -y(r^2 - x^2 - y^2)^{-0.5}$

$c)\ f_x = \frac{6x + 2y^2 - 3x^2}{(1-x)^2};\quad f_y = \frac{4xy}{1-x}$

5 a) 0 b) 0 c) -0.25 d) 7/6 e) 1 f) 1

6a) monoton wachsend in (-∞,1] und [2,∞), dazwischen monoton fallend

6b) monoton wachsend in (-∞,0], danach monoton fallend

6c) monoton fallend in (-∞,0.3542] und [5.6458,∞), dazwischen monoton wachsend

7a) Db: R \ {5}

Nullstellen: N1(1;0), N2(4;0)

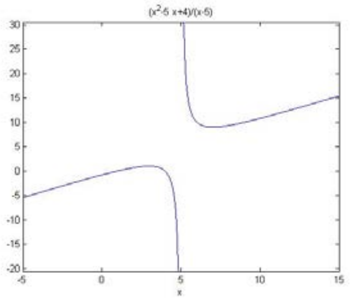
Unstetigkeiten: x = 5, ungerader Pol

Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Extrema: Max(3,1), Min(7;9) Max(1,1)

Wendepunkte: keine

Wb: R \ (1;9)



7b) Db: R; Wf =(0,1]

Nullstelle: keine

Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

Extrema: Max(1;1)

Wendepunkte: W1(0;0) W2(2,$e^{-0,5}$)

7c) Db: x>0

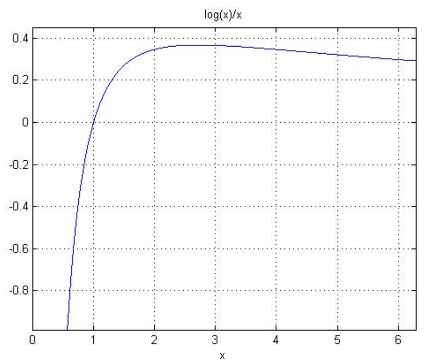
Nullstelle: N(1;0)

Unstetigkeiten: x = 0 „Pol“

Verhalten an den Rändern des Db: $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \to +0} f(x) = -\infty$

Extrema: Max(e;1/e)

Wendepunkte: W(4.4817;0.3347)



7d) Db: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

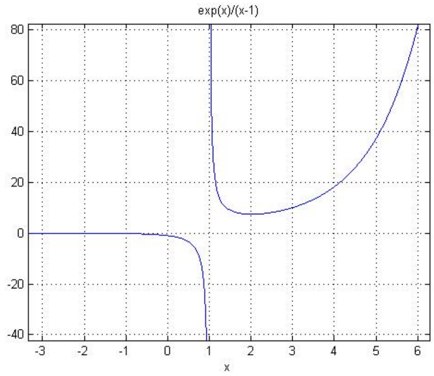
Nullstelle: keine

Unstetigkeiten: $x = 1$ ungerader Pol

Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Extrema: Min$(2;e^2)$

Wendepunkte: keine



Wiederholerkurs Integration

1. Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{12}{1+x^2}\,dx$

b) $\int_0^2 \left(x^2 - 3e^x + 2\sin x\right)dx$

c) $\int_{-1}^1 x^n dx;\ n \geq 0;\ n \in \mathbb{Z}$

d) $\int \sqrt{3-6x}\,dx$

e) $\int e^{-3x+7}dx$

f) $\int \cos\ (2kx-1)\ dx;\ k \in \mathbb{Z}$

g) $\int \frac{x^2}{1+x}\,dx$

h) $\int \frac{x}{\sqrt{4x^2+5}}\,dx$

i) $\int xe^{3x}\,dx$

j) $\int x^2 \sin x\,dx$

2. Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{2x^2+2}$

b) $\int \left(\frac{8}{5}\frac{x^3-2x}{4x^2} + e^{3x}\right) dx$

c) $\int \cos(4nx+3)dx;\quad n \in \mathbb{Z}$

d) $\int_0^1 x \arctan x\,dx$

e) $\int \sqrt{4x+1}\,dx$

f) $\int_{-1}^1 \frac{nx^{n-1}}{1+n}\,dx$

g) $\int_{-0.25}^0 \frac{6}{4z+2}\,dz$

3. Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale, falls sie konvergieren:

a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x},\quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2},\quad \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{x},\quad \int_0^1 \frac{dx}{x^2},\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

c) $\int_1^e \frac{dx}{x\ln x},\quad \int_{-1}^e \frac{dx}{x^2},\quad \int_0^\infty e^{-x}dx$

Lösungen:

1a) π

1b) $\frac{23}{3} - 3e^2 - 2\cos 2$

1c) $\begin{cases} 0 & \text{für n ungerade} \\ \frac{2}{n+1} & \text{für n gerade} \end{cases}$

1d) $-\frac{1}{9}(3-6x)^{\frac{3}{2}} + C$

1e) $-\frac{1}{3}e^{-3x+7} + C$

1f) $\frac{1}{2k}\sin(2kx-1) + C$

1g) $\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1| + C$

1h) $\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+5} + C$

1i) $\frac{1}{9}(3x-1)e^{3x} + C$

1j) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

2a) $\frac{\pi}{8} \approx 0.3927$

2b) $\frac{x^2}{5} - \frac{4}{5}\ln|x| + \frac{1}{3}e^{3x} + C$

2c) $\frac{1}{4n}\sin(4nx+3) + C$

2d) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

2e) $\frac{1}{6}(4x+1)^{\frac{3}{2}} + C$

2f) $\begin{cases} 0 & \text{für n gerade} \\ \frac{2}{n+1} & \text{für n ungerade} \end{cases}$

2g) $\frac{3}{2}\ln 2 \approx 1.0397$

3a) best. div., 1, best.div.

3b) best. div., best. div., 2

3c) best. div. best. div., 1

Übung Potenzreihen

1. Untersuchen Sie die folgenden Zahlenreihen auf Konvergenz:

   $a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(k-1)!}$ $b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\left(\frac{3}{2}\right)^k$ $c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k-3}{\sqrt{k3^k}}$ $d)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$

   $e)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ $f)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2k-1}}$ $g)\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{384}{k}\right)^k$ $h)\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+200}{2k+7}\right)^k$

2. Ermitteln Sie den Konvergenzbereich folgender Reihen:

   $a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n-1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$ $b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)}{n}^n$ $c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{2^k(2k-1)}$

   $d)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^k}{k+3}$ $e)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^k}{2k-1}(-1)^{k+1}$ $f)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k4^{k-1}}$

3. Bestimmen Sie durch Verwendung bekannter Reihenentwicklungen die Taylorreihen bzw. Werte von:

   $a)\ \sin\frac{x}{2}$ $b)\sqrt{1+2x}$ $c)\ exp(\frac{x}{2})$

   $d)\ \sin^2 x$ $e)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\ln(1+x)}$ $f)\ \frac{\exp(-x)}{\sqrt{1+x}}$

4. Eine Drehmaschine soll 11 Drehzahlstufen mit konstantem Stufensprung erhalten. wie lauten die Drehzahlen, wenn die niedrigste 120 $\min^{-1}$ und die höchste 1200 $\min^{-1}$ beträgt? Es handelt sich dabei um den Anfang einer Reihe, welcher?

5. Es sind 68 Rohre so zu stapeln, dass jede Schicht auf Lücke mit der darunterliegenden Schicht liegt. Die oberste Schicht besteht aus 5 Rohren. Wieviele Rohre müssen in die unterste Schicht? Wieviele Schichten hat der Stapel? Lösen Sie die Aufgabe mittels der arithmetischen Reihe, deren Anfang durch die Rohrzahlen in den einzelnen Schichten gegeben ist.

Lösungen

1. .

   $a)\ Konvergenz$ $b)\ Divergenz$ $c)\ Konvergenz$ $d)\ Divergenz$

   $e)\ Konvergenz$ $f)\ Konvergenz$ $g)\ Konvergenz$ $h)\ Konvergenz$

2. .

   $a)\ KB = (-2;2)$ $b)\ KB = [1;3)$ $c)\ KB = [-3;1)$

   $d)\ KB = [-1;0)$ $e)\ KB = (1;2]$ $f)\ KB = [-5;3)$

3.

$$
\begin{array}{lll}
a) & \sin\frac{x}{2} & = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 3!} + \frac{x^5}{2^5 5!} - ... \\
b) & \sqrt{1+2x} & = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - ... \qquad \left(|x| \leq \frac{1}{2}\right) \\
c) & exp(\frac{x}{a}) & = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2 2!} + \frac{x^3}{a^3 3!} + ... \\
d) & \sin^2 x & = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - ... \\
e) & \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{\ln(1+x)} & = 1 \\
f) & \frac{\exp(-x)}{\sqrt{1+x}} & = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{11}{8}x^2 - \frac{53}{48}x^3 + ...
\end{array}
$$

4. Geometrische Reihe
   Drehzahlen: 120, 151, 190, 239, 301, 379, 478, 601, 757, 953, 1200

5. 8 Schichten; In der untersten Schicht liegen 12 Rohre.

Übung Taylor- und Fourierreihen

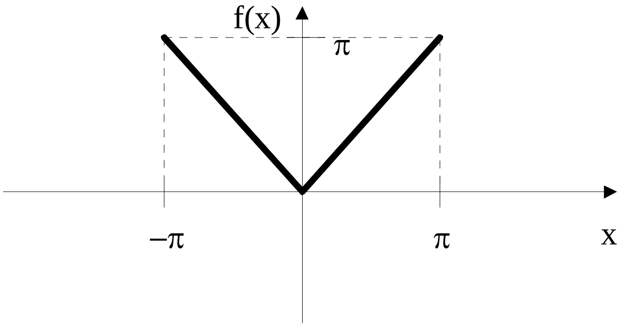
1. Entwickeln Sie in eine Taylorreihe:

   a) $f(x) = \arctan x \quad bei \quad x_0 = 0$
   b) $f(x) = x \sin x \quad bei \quad x_0 = 0$
   c) $f(x) = \frac{1}{1+x} \quad bei \quad x_0 = 0$

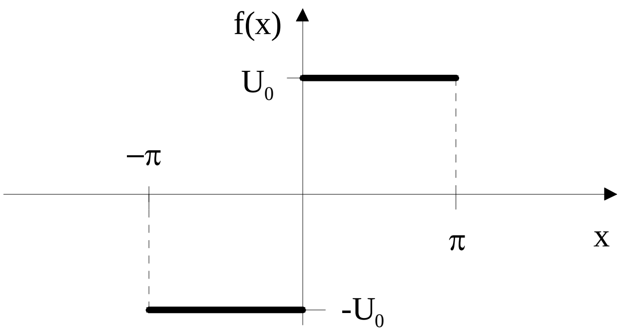
   Zusatz: Bestimmen Sie den Konvergenzradius.

2. Entwickeln Sie die foldenden Funktionen, von den jeweils eine Periode angegeben ist, in eine Fourierreihe:

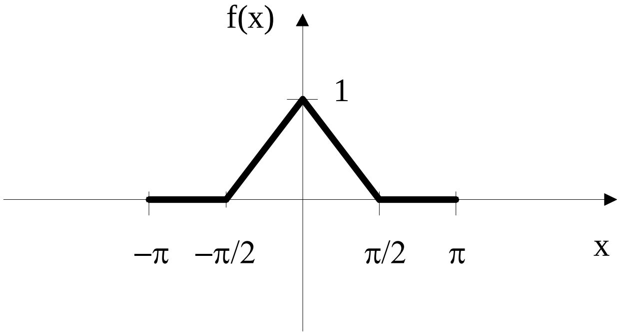
a)



b) $f(x) = \begin{cases} 0 & für \quad -l \le x < 0 \\ 1 & für \quad 0 \le x < l \end{cases}$



c)



d)

e) $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi+x}{2} & für \quad -\pi \le x < 0 \\ \frac{\pi-x}{2} & für \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$

Lösungen

1. .

$$a)\quad arc\tan x = \tfrac{x}{1!} - \tfrac{2!}{3!}x^3 + \tfrac{4!}{5!}x^5 - ... = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \tfrac{x^{2k+1}}{2k+1}; \qquad r = 1$$

$$b)\quad x\sin x = \tfrac{2}{2!}x^2 - \tfrac{4}{4!}x^4 + \tfrac{6}{6!}x^6 - ... = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\tfrac{x^{2k}}{(2k-1)!}; \quad r = \infty$$

$$c)\quad \tfrac{1}{1+x} = 1 - \tfrac{1}{1!}x + \tfrac{2}{2!}x^2 - \tfrac{6}{3!}x^3 + ... = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^k; \qquad r = 1$$

2. .

$$a)\quad f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0, k\ ungerade}}^{\infty}\tfrac{1}{k^2}\exp(ikx) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tfrac{1}{(2n-1)^2}\exp(i(2n-1)x)$$

$$b)\quad f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi}\cdot\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0, k\ ungerade}}^{\infty}\tfrac{1}{k}\exp(\tfrac{ik\pi x}{l}) = \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tfrac{1}{(2n-1)}\exp(\tfrac{i(2n-1)\pi x}{l})$$

$$c)\quad f(x) \sim \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\tfrac{1}{k^2}\left(1 - \cos\tfrac{k\pi}{2}\right)\exp(ikx)$$

$$d)\quad f(x) \sim -\frac{2iU_0}{\pi}\cdot\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0, k\ ungerade}}^{\infty}\tfrac{1}{k}\exp(ikx) = -\frac{2iU_0}{\pi}\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tfrac{1}{(2n+1)}\exp(i(2n+1)x)$$

$$e)\quad f(x) \sim -\frac{i}{2}\cdot\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\tfrac{1}{k}\exp(ikx)$$

Wiederholung / Tutorium Differentialgleichungen

1. Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen nach Ordnung, Homogenität/Inhomogenität und Linearität/Nichtlinearität, evtl. konstante Koeffizienten mit vermerken..

   (a) $y'\sqrt{a^2+x^2} = y$

   (b) $xy' + y = \sin x$

   (c) $y''' + 2y'' - \frac{5}{4}y' = xe^{-2x}$

   (d) $y^2 + x^2y' = xyy'$

   (e) $y'' - 3y' - (2x+1)e^{3x} = 0$

   (f) $y'(1-x) = 1-y$

   (g) $\sin y \cos x \cdot y' = \cos y \sin x$

   (h) $2\arctan x + 1 + 2xy + x^2y' = 0$

   (i) $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 9te^{2t}$, Ges.: $x = x(t)$

   (j) $y' - y\tan x = 2\sin x$

2. Geben Sie die Lösungsmethode an und lösen Sie die folgenden DGl:

   (a) *)$xy' = y\ln y$

   (b) $xy' + y + xe^x = 0$

   (c) $y'' + 6y' + 25y = e^{3x}$

   (d) *)$xy' - y = y^2, \quad y(2) = 4$

   (e) $y'' + 4y = 3\sin(2x)$

   (f) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = (x-1)e^{-2x}$

   (g) $y'x + y + xe^x = 0 \quad y(1) = 0$

   (h) $\left(1+t^3\right)\dot{x} = t^2x$, Ges.: $x = x(t)$

   (i) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 6e^{-x}$

   (j) $\left(x^2-1\right)y' + 2xy = \cos x, \quad y(0) = 1$

Lösungen zur Wiederholung/Tutorium Differentialgleichungen

1. (a) Lineare homogene DGl 1. Ordnung
   (b) Lineare inhomogene DGl. 1. Ordnung
   (c) Lineare inhomogene DGl. 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
   (d) Nichtlineare homogene DGl. 1. Ordnung
   (e) Lineare inhomogene DGl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
   (f) Lineare inhomogene DGl. 1. Ordnung
   (g) Nichtlineare homogene DGl. 1. Ordnung
   (h) Lineare inhomogene DGl. 1. Ordnung
   (i) Lineare inhomogene DGl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
   (j) Lineare inhomogene DGl. 1. Ordnung

2. (a) *)Trennung der Veränderlichen, $y = e^{Cx}$, $C \in \mathbb{R}$
   (b) Lineare DGl. 1. Ordnung, $y = \frac{1-x}{x} e^x$
   (c) Lin. DGl mit konstanten Koeffizienten, $y = e^{-3x}(C_1 \cos(4x) + C_2 \sin(4x)) + \frac{1}{52} e^{3x}$, $C_i \in \mathbb{R}$
   (d) *)Trennung der Veränderlichen, $y = \frac{\frac{2}{5}x}{1-\frac{2}{5}x} = \frac{2x}{5-2x}$
   (e) Lin. DGl mit konstanten Koeffizienten, $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) - \frac{3}{4} x \cos(2x)$, $C_i \in \mathbb{R}$
   (f) $y = \left[\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 \right) + (-\frac{1}{6} + \frac{1}{24} x) x^3 \right] e^{-2x}$, $C_i \in \mathbb{R}$
   (g) Lineare DGl. 1. Ordnung, $y = e^x \left(\frac{1}{x} - 1 \right)$
   (h) Lineare homogene DGL. 1. Ordnung, $x(t) = C \left(1 + t^3 \right)^{\frac{1}{3}}$, $C \in \mathbb{R}$
   (i) Lin. DGl mit konstanten Koeffizienten, $y = e^{-x} \left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + x^3 \right)$, $C_i \in \mathbb{R}$
   (j) Lineare DGl. 1. Ordnung, $y = -\frac{1}{x^2-1} + \frac{\sin x}{x^2-1} = \frac{\sin x - 1}{x^2-1}$

Tutorium Differentialrechnung von Funktionen mit mehreren Veränderlichen

1. *Bestimmen Sie D_f, W_f und zeichnen Sie eine Skizze folgender Funktionen $z = f(x,y)$:
   a) $z = \sqrt{1-y^2}$ b) $z = \cos x$ c) $z = -x^2 - y^2$

2. Geben Sie alle Unstetigkeitspunkte folgender Funktionen an:
   a) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ b) $f(x,y) = x^2 + xy^3 - 7x + 4$ c) $f(x,y) = \frac{1}{\cos 4x}$

3. Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von:
   a) $u(x,y,z) = \frac{2y}{x}\tan z$ b) $z(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ c) $f(x,y,z) = \frac{x^2+z^2}{x^2+y^2}$

4. Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung von:
   a) $u(x,y,z) = x^5 + 6x^3y - 2x^2yz + 3yz^3$ b) $v(x,y,z) = e^x \ln y + z^2 \cos y$
   c) $f(x,y) = \ln\frac{x+y}{x-y}$ d) $f(x,y) = \ln\frac{\sin y}{\sin x}$

5. Bilden Sie das totale Differential von:
   a) $f(x,y) = 4x^3 - 6x^2y^2 + 4y^3$ b) $w(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$
   c) $u(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ d) $u(x,y,z) = \arctan xy$

6. Die 3 Widerstände $R_1 = (100 \pm 1)\Omega$, $R_2 = (50 \pm 1)\Omega$ und $R_3 = (250 \pm 2)\Omega$ sind hintereinander geschaltet. Wie groß ist bei einer Spannung von $U = (220 \pm 2)V$ die Stromstärke des durchfließenden Stromes und der relative Maximalfehler?

7. Die Widerstände $R_1 = (100 \pm 1)\Omega$, und $R_2 = (350 \pm 2)\Omega$ sind parallel geschaltet. Man berechne den Maximalfehler des Ersatzwiderstandes.

8. Bestimmen Sie alle relativen Extrema folgender Funktionen $z = z(x,y)$:
   a) $z = x^2 + y^2 - xy + 3y$ b) $z = x^2 + 3xy + y^2 - x - 4y + 8$
   c) $z = \frac{xy}{27} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ d) $z = x^3y^2(1-x-y)$

Lösungen

1. (a) $D_f = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 | y \in \mathbb{R}, -1 \le y \le 1\}$, $W_f = [0,1]$, "Tunnel" mit halbkreisförmigem Querschnitt entlang der x-Achse
   (b) $D_f = \mathbb{R}^2$, $W_f = [-1,1]$, "Wellpappe" mit Wellung entlang der x-Achse
   (c) $D_f = \mathbb{R}^2$, $W_f = (-\infty, 0)$, Einheitsparaboloid an der Ebene $z = 0$ gespiegelt, s. Skript

2. (a) unstetig für den Ursprung: $x = y = 0$
   (b) überall stetig
   (c) unstetig für $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$

3. (a) $u_x = \frac{-2y}{x^2}\tan z$, $u_y = \frac{2}{x}\tan z$, $u_z = \frac{2y}{x\cos^2 x}$
   (b) $z_x = y\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $z_y = x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$
   (c) $f_x = 2x\frac{y^2-z^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y = -2y\frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f_z = \frac{2z}{x^2+y^2}$

4. (a) $u_x = 5x^4 + 18x^2y - 4xyz, \quad u_y = 6x^3 - 2x^2z + 3z^3, \quad u_z = -2x^2y + 9yz^2$
$u_{xx} = 20x^3 + 36xy - 4yz, \quad u_{yy} = 0, \quad u_{zz} = 18xy,$
$u_{xy} = u_{yx} = 18x^2 - 4xz, \quad u_{xz} = u_{zx} = -4xy, \quad u_{zy} = u_{yz} = 9z^2$

(b) $v_x = e^x \ln y, \quad v_y = \frac{e^x}{y} - z^2 \sin y, \quad v_z = 2z\cos y$
$v_{xx} = e^x \ln y, \quad v_{yy} = -\frac{e^x}{y^2} - z^2\cos y, \quad v_{zz} = 2\cos y,$
$v_{xy} = v_{yx} = \frac{e^x}{y}, \quad v_{xz} = v_{zx} = 0, \quad v_{zy} = v_{yz} = -2z\sin y$

(c) $f_x = \frac{-2y}{x^2-y^2}, \quad f_y = \frac{2x}{x^2-y^2}, \quad f_{xx} = \frac{4xy}{(x^2-y^2)^2}, \quad f_{xy} = f_{yx} = -2\frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}, \quad f_{yy} = \frac{4xy}{(x^2-y^2)^2}$

(d) $f_x = -\cot x, \quad f_y = \cot y, \quad f_{xx} = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad f_{xy} = f_{yx} = 0, \quad f_{yy} = -\frac{1}{\sin^2 y}$

5. (a) $df = 12x(x-y^2)dx + 12y(y-x^2)dy$

(b) $dw = 2e^{x^2+y^2+z^2}(xdx + ydy + zdz)$

(c) $du = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(xdx + ydy + zdz)$

(d) $du = \frac{1}{1+x^2y^2}(ydx + xdy)$

6. $I = \frac{U}{R_1+R_2+R_3}; \quad |\frac{\triangle I}{I}| \lesssim 0.02$

7. $R = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}; \quad |\triangle R| \lesssim 0,7\Omega$

8. (a) Minimum in $(-1,-2,-3)^T$

(b) kein Extremum

(c) Maximum in $(-3,3,-1)^T$

(d) kein Extremum in $(0,0)^T$, Maximum in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{432})^T$