

## Wichtige Eigenschaften der Matrizenoperationen

Kommutativgesetze

$$A + B = B + A$$

$$i.Allg. \quad A \cdot B \neq B \cdot A$$

Assoziativgesetze

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Distributivgesetze

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

Nullelement  $\mathbf{0}$

$$A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A$$

$$A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot A = \mathbf{0}$$

Einselement  $E$

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

Multiplikation mit Zahlen aus  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)A &= \alpha A + \beta A \\ \alpha(A + B) &= \alpha A + \alpha B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)A &= \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A) \\ \alpha(A \cdot B) &= (\alpha A)B = A(\alpha B) \end{aligned}$$

Transponierte Matrizen

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$\begin{aligned} (A \cdot B)^T &= B^T \cdot A^T \\ (\alpha A)^T &= \alpha \cdot A^T \end{aligned}$$

$$(A^T)^T = A$$

Adjungierte Matrizen

$$(A + B)^* = A^* + B^*$$

$$\begin{aligned} (A \cdot B)^* &= B^* \cdot A^* \\ (\alpha A)^* &= \bar{\alpha} \cdot A^* \end{aligned}$$

$$(A^*)^* = A$$

Inverse Matrizen

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$$

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$$

## Kurvendiskussion / Arbeitsanleitung

### 1. Definitionsgebiet:

Welche Werte  $x \in \mathbb{R}$  müssen ausgeschlossen werden? Gib  $D_f$  als Vereinigung von Intervallen oder als Punktmenge an.

### 2. Symmetrie, Periodizität:

- Prüfe:  $f(-x) = f(x)$ : gerade Funktion, symmetrisch zur y-Achse.
- Prüfe:  $f(-x) = -f(x)$ : ungerade Funktion, punktsymmetrisch zum Ursprung.
- Angabe der kleinsten Periode  $T$ , so dass gilt:  $f(x + kT) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

### 3. Verhalten an den Randpunkten des Definitionsbereiches:

- Bestimme  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , falls  $f(x)$  in ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist.
- Bestimme die einseitigen Grenzwerte an den Stellen, bei denen  $D_f$  im Endlichen unterbrochen ist (z.B. an Nennernullstellen).

### 4. Achsenschnittpunkte:

- Nullstellen:  $f(x) = 0 \implies x_1, \dots, x_k$
- Prüfe, ob  $x_i, i = 1, \dots, k$  und  $x = 0$  zum Definitionsbereich gehören.
- Schnittpunkt mit der y-Achse: Berechne  $f(0)$ .

### 5. Unstetigkeitsstellen:

Untersuche die Stellen, die unter 1. als isolierte Punkte aus  $\mathbb{R}$  ausgeschlossen wurden auf Polstelle, Lücke oder Sprungstelle endlicher Höhe.

### 6. Extremwerte:

- Suche extremwertverdächtige Stellen mittels  $f'(x) = 0 \implies x_1, \dots, x_k$ .
- Teste diese auf Vorlage eines Extremums mit Hilfe des Satzes:  
 $f$  sei in  $U(x_i)$  stetig differenzierbar bis zur n-ten Ableitung,  $n \geq 2$ .  
 $f^{(n)}(x)$  sei die erste von Null verschiedene Ableitung in  $x_i$ .  
Ist **n gerade**, so gilt:  $f^{(n)}(x_i) < 0 \Rightarrow$  relatives Maximum bei  $x_i$   
 $f^{(n)}(x_i) > 0 \Rightarrow$  relatives Minimum bei  $x_i$   
Ist **n ungerade**, so liegt bei  $x_0$  ein Wendepunkt vor.
- Berechne die Funktionswerte  $f(x_i)$  für die gefundenen Extrema.

### 7. Wendepunkte:

- Suche wendepunktverdächtige Stellen mittels  $f''(x) = 0 \implies x_1, \dots, x_k$ .
- Teste diese auf Vorlage eines Wendepunktes mit Hilfe des Satzes aus Punkt 6.
- Berechne die Funktionswerte  $f(x_i)$  für die gefundenen Wendepunkte.

8. **Skizze:**

Leite aus den vorher bestimmten Angaben und evtl. einigen wenigen zusätzlich bestimmten Punkten das Bild der Funktion ab. Kontrolliere, falls möglich, mit dem Taschenrechner.

9. **Wertevorrat:** Leite aus den vorhergehenden Punkten, speziell der Skizze, ab:

- Welche Werte aus  $\mathbb{R}$  müssen als Funktionswerte ausgeschlossen werden?
- Angabe von  $W_f$  als Vereinigung von Intervallen oder als Punktmenge.

**Geometrische und technische Anwendungen der Integralrechnung (eindimensional)**

1. **Fläche** zwischen der Kurve  $y = f(x)$  und der x-Achse im Intervall  $[a, b]$ , wobei die stetige Funktion  $f(x)$  in diesem Intervall die Nullstellen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  besitzt:

$$F = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b f(x) dx \right|$$

2. **Fläche** zwischen den Kurven  $y_1 = f(x)$  und  $y_2 = g(x)$  im Intervall  $[a, b]$ , wobei sich die stetigen Funktion  $f(x)$  und  $g(x)$  in diesem Intervall an den Stellen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  schneiden:

$$\curvearrowright F = \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

3. **Länge  $s$  der Kurve  $K$ :**

- im  $\mathbb{R}^2$  bei expliziter Darstellung  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ :  $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$
- im  $\mathbb{R}^2$  bei Parameterdarstellung  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

- im  $\mathbb{R}^n$  bei Parameterdarstellung  $x_i = x_i(t)$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ ;  $i = 1, \dots, n$ :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\dot{x}_i(t))^2} dt$$

- im  $\mathbb{R}^2$  bei Polarkoordinatendarstellung  $r = r(\phi)$ ,  $\phi \in [\phi_1, \phi_2]$ :

$$s = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{r^2(\phi) + \dot{r}^2(\phi)} d\phi$$

4. **Volumen und Mantelfläche** des Körpers, der bei Rotation der Fläche zwischen der stetigen Funktion  $f(x)$  und der x-Achse um die x-Achse im Intervall  $[a, b]$  entsteht:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx; \quad M_x = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Wird die Fläche durch die Kurven  $f(x)$  und  $g(x)$  berandet, so ist zur Flächenbestimmung entsprechend Punkt 2 zu verfahren.

5. **Volumen und Mantelfläche** des Körpers, der bei Rotation der Fläche zwischen der im Intervall  $[a, b]$  eindeutigen stetigen Funktion  $y = f(x)$  und der y-Achse um die y-Achse entsteht:

$$V_y = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} x^2(y) dy; \quad M_y = 2\pi \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

6. Der **Gleichrichtwert** einer Wechselstromgröße  $f(x)$  ist der lineare Mittelwert dieser Größe:

$$\tilde{f} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(x) dx$$

7. Der **Effektivwert** einer Wechselstromgröße  $f(x)$  ist der quadratische Mittelwert dieser Größe:

$$f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} f^2(x) dx}$$

8. **Elektrische Arbeit:**

$$W_{el} = \int_{t_1}^{t_2} u \cdot i dt$$

9. Koordinaten  $(x_s, y_s)$  des **Schwerpunktes** einer homogenen Fläche mit dem Flächeninhalt  $F$  unter der stetigen Kurve  $y = f(x)$  :

$$x_s = \frac{M_y}{F} = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx} \quad y_s = \frac{M_x}{F} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} y^2 dx}{\int_a^b y dx}$$

10. **Uneigentliche Integrale mit unendlichen Grenzen:**

Sei  $f(x)$  auf beliebigen Intervallen  $[a, b]$  integrierbar.

- a)  $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$   
 b)  $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$   
 c)  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx; \quad c \in \mathbb{R}$

11. **Uneigentliche Integrale mit nichtbeschränkten Funktionen:**

Sei  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$ ,  $a \leq c \leq b$ . (Eventuell werden nur einseitige Grenzwerte benötigt!)

- a)  $\int_a^c f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx$   
 b)  $\int_c^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$   
 c)  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow 0+0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx$

<b>Fourierreihenentwicklung, komplexe Form</b>	
Periode $2\pi$ $f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$	Periode $T$ $f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik \frac{2\pi}{T} x}$
$f(x)$ weder gerade noch ungerade	
$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$ $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$	$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$ $c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-ik \frac{2\pi}{T} x} dx$
$a_k = c_k + c_{-k}, \quad k \geq 1$ $a_0 = 2c_0$ $b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad k \geq 1$	
$f(x)$ <b>gerade:</b> $f(-x) = f(x)$	
$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx$ $c_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$	$c_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) dx$ $c_k = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(k \frac{2\pi}{T} x) dx$
$a_k = 2c_k, \quad \forall k$ $b_k = 0, \quad \forall k$	
$f(x)$ <b>ungerade:</b> $f(-x) = -f(x)$	
$c_0 = 0$ $c_k = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$	$c_0 = 0$ $c_k = -\frac{2i}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(k \frac{2\pi}{T} x) dx$
$a_k = 0, \quad \forall k$ $b_k = -\frac{2}{i} c_k, \quad \forall k$	
<b>trigonometrische Form der Fourierreihe</b>	
$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$	$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k \frac{2\pi}{T} x) + b_k \sin(k \frac{2\pi}{T} x)]$

## Rechengesetze der Fouriertransformation

Es sei  $F(i\omega) = \mathcal{FT}(f(t))$ ;  $G(i\omega) = \mathcal{FT}(g(t))$

### 1. Additionssatz:

$$\mathcal{FT}(af(t) + bg(t)) = aF(i\omega) + bG(i\omega); \quad a, b \in \mathbb{C}$$

### 2. Verschiebungssatz:

$$\mathcal{FT}(f(at + b)) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{ib\omega}{a}} F\left(\frac{i\omega}{a}\right); \quad a \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$$

### 3. Dämpfungssatz:

$$\mathcal{FT}(e^{ibt} f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{i\omega - b}{a}\right); \quad a > 0, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$$

### 4. Faltungssatz:

$$\begin{aligned} &\exists \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \\ \Rightarrow &\exists a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau : \quad \text{Faltung}, \quad \mathcal{FT}(a(t)) = F(i\omega) \cdot G(i\omega) \end{aligned}$$

### 5. Integrationsatz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0 \implies \mathcal{FT}\left(\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{1}{i\omega} F(i\omega)$$

### 6. Differentiationssatz:

Ist  $f^{(n)}(t)$  fouriertransformierbar,  $n \in \mathbb{N}$ ,  
 $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0, \dots, \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f^{(n-1)}(t) = 0 \implies \mathcal{FT}(f^{(n)}(t)) = (i\omega)^n F(i\omega)$

### 7. Multiplikationssatz:

Ist  $f(t)$  fouriertransformierbar,  $n \in \mathbb{N} \implies \mathcal{FT}(t^n f(t)) = i^n F^{(n)}(i\omega)$

### 8. Parsevalscher Satz:

$$\exists \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \implies \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega$$

### 9. Interpretation in Elektrotechnik / Elektronik:

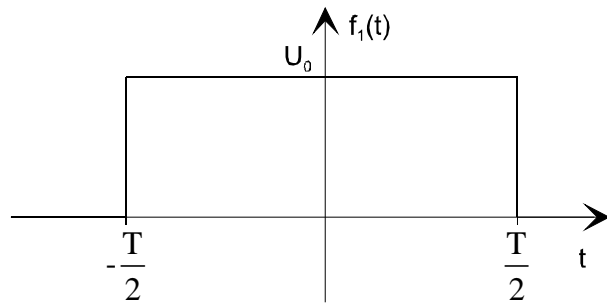
$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$  ist die Energie, die ein Signal  $f(t)$  in einem Widerstand der Größe 1  $\Omega$  in Wärme umsetzt.

Bekannte Fouriertransformierte

Zeitbereich : f(t)

Rücktransformation :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega$$



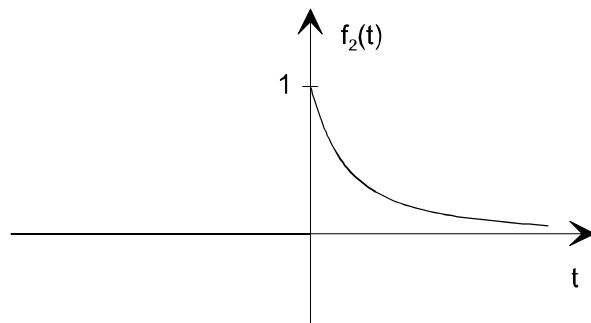
$$f_1(t) = \begin{cases} U_0 & \text{für } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Spektrum : F(iω)

Hintransformation :

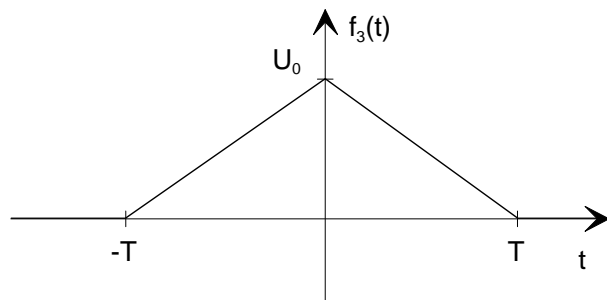
$$F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$F_1(i\omega) = U_0 T \operatorname{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$



$$f_2(t) = e^{-\sigma t} \quad \text{für } t \geq 0, \quad (0 \text{ sonst})$$

$$F_2(i\omega) = \frac{1}{\sigma + i\omega}$$



$$f_3(t) = \begin{cases} \frac{U_0}{T} t + U_0 & \text{für } -T \leq t \leq 0 \\ -\frac{U_0}{T} t + U_0 & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F_3(i\omega) = \frac{2U_0}{T\omega^2} (1 - \cos \omega T)$$

Zugeordnete Rechenoperationen bei der Laplacetransformation

Nr.	Originalbereich / $t$ -Bereich	Bildbereich / $s$ -Bereich
1	$f(t), g(t)$	$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt, G(p)$
2	$\alpha f(t) + \beta g(t)$	$\alpha F(p) + \beta G(p)$
3	$f^{(k)}(t)$ <i>insbesondere gilt</i> $\dot{f}(t)$ $\ddot{f}(t)$ $\dots$ $\overset{\dots}{f}(t)$	$p^k F(p) - p^{k-1} f_0 - p^{k-2} \dot{f}_0 - \dots - p f_0^{(k-2)} - f_0^{(k-1)}$ <i>mit <math>f_0^{(\nu)} := \lim_{t \rightarrow 0} f^{(\nu)}(t), \nu = 0, 1, \dots, k-1</math></i> $pF(p) - f_0$ $p^2 F(p) - p f_0 - \dot{f}_0$ $p^3 F(p) - p^2 f_0 - p \dot{f}_0 - \ddot{f}_0$
4	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{p} F(p)$
5	$f(t) * g(t) := \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$	$F(p) \cdot G(p)$
6	$f(t-\tau), t \geq \tau \geq 0$	$e^{-\tau p} F(p)$
7	$e^{-\alpha t} \cdot f(t)$	$F(p + \alpha)$
8	$f(\alpha t), \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
9	$t^k \cdot f(t)$	$(-1)^k F^{(k)}(p)$
10	$t^k f^{(m)}(t)$ <i>insbesondere gilt für <math>k \geq m</math></i> $t^k \cdot f^{(m)}(t)$	$(-1)^k \frac{d^k}{dp^k} [p^m F(p) - p^{m-1} f_0 - \dots - p f_0^{(m-2)} - f_0^{(m-1)}]$ $(-1)^k \frac{d^k}{dp^k} [p^m F(p)]$
11	$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < \frac{b}{a} \\ f(at-b) & \text{sonst} \end{cases}$	$\frac{1}{a} e^{-\frac{pb}{a}} \cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$



### Bekannte Laplacetransformierte

(verbesserter Auszug aus Greuel: Mathematische Ergänzungen)

Nr.	Originalbereich	Bildbereich
1	$\delta(t)$	1
2	1	$\frac{1}{p}$
3	$t$	$\frac{1}{p^2}$
4	$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
5	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$
6	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$
7	$e^{at}$ für $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$	$\frac{1}{p-a}$
8	$\frac{1}{a}e^{-t/a}$	$\frac{1}{ap+1}$
9	$\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$	$\frac{1}{p(p-a)}$
10	$\frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1)$	$\frac{1}{p^2(p-a)}$
11	$te^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^2}$
12	$\frac{1}{2}t^2e^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^3}$
13	$1 - e^{-t/a}$	$\frac{1}{p(ap+1)}$

Nr.	Originalbereich	Bildbereich
14	$\frac{1}{a^2}(e^{at}(at-1) + 1)$	$\frac{1}{p(p-a)^2}$
15	$ae^{-t/a} + t - a$	$\frac{1}{p^2(ap+1)}$
16	$\frac{1}{ab}(1 + \frac{be^{at} - ae^{bt}}{a-b})$	$\frac{1}{p(p-a)(p-b)}$
17	$1 + \frac{be^{-t/b} - ae^{-t/a}}{a-b}$	$\frac{1}{p(ap+1)(bp+1)}$
18	$\sin(at)$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$
19	$\frac{1}{2}(e^{at} - e^{-at})$ $= \sinh(at)$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
20	$1 - \cos(at)$	$\frac{a^2}{p(p^2 + a^2)}$
21	$\sin^2(at)$	$\frac{2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$
22	$t - \frac{1}{a} \sin(at)$	$\frac{a^2}{p^2(p^2 + a^2)}$
23	$1 - \cos(at) - \frac{at}{2} \sin(at)$	$\frac{a^4}{p(p^2 + a^2)^2}$
24	$\frac{1}{a^2}te^{-t/a}$	$\frac{1}{(ap+1)^2}$
25	$\frac{1}{2a^3}t^2e^{-t/a}$	$\frac{1}{(ap+1)^3}$
26	$1 - \frac{a+t}{a}e^{-t/a}$	$\frac{1}{p(ap+1)^2}$

Nr.	Originalbereich	Bildbereich
27	$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$
28	$\frac{1}{a-b}(e^{-t/a} - e^{-t/b})$	$\frac{1}{(ap+1)(bp+1)}$
29	$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}e^{-(\alpha/2)t} \sinh(\sqrt{\gamma}t)$	$\frac{1}{p^2 + \alpha p + \beta}$ für $\gamma = \frac{1}{4}\alpha^2 - \beta > 0$
30	$\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}e^{-(\alpha/2)t} \sin(\sqrt{-\gamma}t)$	$\frac{1}{p^2 + \alpha p + \beta}$ für $\gamma = \frac{1}{4}\alpha^2 - \beta < 0$
31	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-at}$	$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$
32	$\cos(at)$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$
33	$\frac{1}{2}(e^{at} + e^{-at})$ $= \cosh(at)$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
34	$b \cos(at) + \frac{c}{a} \sin(at)$	$\frac{bp+c}{p^2 + a^2}$
35	$-\frac{c}{a} + (b + \frac{c}{a})e^{at}$	$\frac{bp+c}{p(p-a)}$
36	$(1+at)e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^2}$
37	$(t + \frac{1}{2}at^2)e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^3}$
38	$[b + (ab+c)t]e^{at}$	$\frac{bp+c}{(p-a)^2}$
39	$\frac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt})$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)}$
40	$\frac{t}{2} \sin(at)$	$\frac{ap}{(p^2 + a^2)^2}$

Nr.	Originalbereich	Bildbereich
41	$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{-(\alpha/2)t} \left[ \left( c - \frac{\alpha}{2} \right) \sinh(\sqrt{\gamma}t) + \sqrt{\gamma} \cosh(\sqrt{\gamma}t) \right]$	$\frac{p+c}{p^2 + \alpha p + \beta}$ für $\gamma = \frac{1}{4}\alpha^2 - \beta > 0$
42	$\frac{1}{\sqrt{-\gamma}} e^{-(\alpha/2)t} \left[ \left( c - \frac{\alpha}{2} \right) \sin(\sqrt{-\gamma}t) + \sqrt{-\gamma} \cos(\sqrt{-\gamma}t) \right]$	$\frac{p+c}{p^2 + \alpha p + \beta}$ für $\gamma = \frac{1}{4}\alpha^2 - \beta < 0$
43	$\frac{(b-c)e^{at} + (c-a)e^{bt} + (a-b)e^{ct}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(p-a)(p-b)(p-c)}$
44	$\frac{a(b-c)e^{-t/a} + b(c-a)e^{-t/b} + c(a-b)e^{-t/c}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(ap+1)(bp+1)(cp+1)}$
45	$\frac{1}{\beta} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{-(\alpha/2)t} \left[ \frac{\alpha}{2} \sinh(\sqrt{\gamma}t) + \sqrt{\gamma} \cosh(\sqrt{\gamma}t) \right] \right)$	$\frac{1}{p(p^2 + \alpha p + \beta)}$ für $\gamma = \frac{1}{4}\alpha^2 - \beta > 0$
46	$\frac{1}{\beta} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} e^{-(\alpha/2)t} \left[ \frac{\alpha}{2} \sin(\sqrt{-\gamma}t) + \sqrt{-\gamma} \cos(\sqrt{-\gamma}t) \right] \right)$	$\frac{1}{p(p^2 + \alpha p + \beta)}$ für $\gamma = \frac{1}{4}\alpha^2 - \beta < 0$
47	$\frac{a(b-c)e^{at} + b(c-a)e^{bt} + c(a-b)e^{ct}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$	$\frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)}$
48	$\frac{(c-b)e^{-t/a} + (a-c)e^{-t/b} + (b-a)e^{-t/c}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$	$\frac{p}{(ap+1)(bp+1)(cp+1)}$
49	$\frac{c}{\beta} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{-(\alpha/2)t} \left[ \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{c} \right) \sinh(\sqrt{\gamma}t) + \sqrt{\gamma} \cosh(\sqrt{\gamma}t) \right] \right)$	$\frac{p+c}{p(p^2 + \alpha p + \beta)}$ für $\gamma = \frac{1}{4}\alpha^2 - \beta > 0$
50	$\frac{c}{\beta} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} e^{-(\alpha/2)t} \left[ \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{c} \right) \sin(\sqrt{-\gamma}t) + \sqrt{-\gamma} \cos(\sqrt{-\gamma}t) \right] \right)$	$\frac{p+c}{p(p^2 + \alpha p + \beta)}$ für $\gamma = \frac{1}{4}\alpha^2 - \beta < 0$
51	$(1 + 2at + \frac{1}{2}a^2t^2)e^{at}$	$\frac{p^2}{(p-a)^3}$
52	$\cos^2(at)$	$\frac{p^2 + 2a^2}{p(p^2 + 4a^2)}$
53	$1 + 2 \sin at$	$\frac{(p+a)^2}{p(p^2 + a^2)}$
54	$\frac{1}{2} (\sin at + at \cos at)$	$\frac{ap^2}{(p^2 + a^2)^2}$
55	$\frac{1}{a^2+b^2} (e^{-at} - \cos bt + \frac{a}{b} \sin bt)$	$\frac{1}{(p+a)(p^2+b^2)}$

### Anwendungen der Flächenintegrale

1. **Volumen** eines „Zylinders“ mit der Grundfläche  $B$  in der  $x$ - $y$ -Ebene und der Deckfläche  $f(x, y)$ :

$$V = \iint_B f(x, y) dB$$

Falls  $f(x, y) \equiv 1$  in  $B$ , so ergibt  $I = \iint_B f(x, y) dB = \iint_B 1 dB$  den Zahlenwert des

**Flächeninhaltes von  $B$** :

$$B = \iint_B 1 dB;$$

2. Sei das Flächenstück  $B$  mit einer Massenbelegung versehen. Dann kann jedem Punkt

$P = (x, y)^T \in B$  eine stetige Flächendichte  $\rho(x, y)$  zugeordnet werden. Für die **Masse des Flächenstückes  $B$**  gilt dann:

$$m = \iint_B \rho(x, y) dB$$

3. Berechnung des **Flächenschwerpunktes** eines ebenen Bereiches  $B$  mit der Flächendichte  $\rho(x, y)$  :

$$x_s = \frac{1}{m} \iint_B x \rho(x, y) dB$$
$$y_s = \frac{1}{m} \iint_B y \rho(x, y) dB.$$

Mit  $\rho \equiv 1$  erhält man den **geometrischen Schwerpunkt**:

$$x_0 = \frac{1}{B} \iint_B x dB \quad y_0 = \frac{1}{B} \iint_B y dB.$$

4. Berechnung der **Flächenträgheitsmomente** eines ebenen Bereiches  $B$  mit der Flächendichte  $\rho(x, y)$  :

a) bezüglich der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse:

$$I_x = \iint_B y^2 \rho(x, y) dB$$
$$I_y = \iint_B x^2 \rho(x, y) dB$$

b) **Polares Trägheitsmoment** bzw. Trägheitsmoment bzgl. des Koordinatenursprunges:

$$I_0 = \iint_B r^2 \rho(x, y) dB = \iint_B (x^2 + y^2) \rho(x, y) dB$$

## Anwendungen der Raumintegrale

### 1. Volumenberechnung:

$$V = \iiint_G 1 dG$$

### 2. Masseberechnung für den Körper, der sich im Gebiet $G$ erstreckt und die Dichte $\rho(x, y, z)$ besitzt:

$$m = \iiint_G \rho(x, y, z) dG$$

### 3. Schwerpunkt des Körpers, der sich im Gebiet $G$ erstreckt und die Dichte $\rho(x, y, z)$ besitzt:

$$x_s = \frac{1}{m} \iiint_G x \rho(x, y, z) dG, \quad y_s = \frac{1}{m} \iiint_G y \rho(x, y, z) dG, \quad z_s = \frac{1}{m} \iiint_G z \rho(x, y, z) dG.$$

Ist die Dichte  $\rho = \rho_0 = \text{const.}$ , so kann in den obigen Formeln der Faktor  $\frac{\rho_0}{m} = \frac{1}{V}$

vor das Integral gezogen werden, und es entstehen die Formeln für den geometrischen Schwerpunkt:

$$x_0 = \frac{1}{V} \iiint_G x dG, \quad y_0 = \frac{1}{V} \iiint_G y dG, \quad z_0 = \frac{1}{V} \iiint_G z dG.$$

### 4. Trägheitsmoment des Körpers, der sich im Gebiet $G$ erstreckt und die Dichte $\rho(x, y, z)$ besitzt:

a) Trägheitsmoment bzgl. eines Punktes  $P_0$  :

$$I_{P_0} = \iiint_G r^2 \rho(x, y, z) dG,$$

wobei  $r$  der Abstand des Punktes  $P = (x, y, z)^T$  vom Punkt  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$  ist.

b) axiales Trägheitsmoment bzgl. einer Achse  $a$ , die i.Allg. die Drehachse ist:

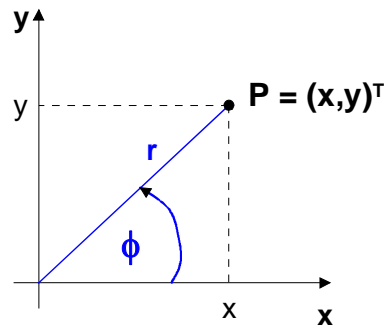
$$I_a = \iiint_G r^2 \rho(x, y, z) dG,$$

wobei  $r$  der Abstand des Punktes  $P = (x, y, z)^T$  von der Achse  $a$  ist. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_G (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dG \\ I_y &= \iiint_G (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dG \\ I_z &= \iiint_G (y^2 + x^2) \rho(x, y, z) dG. \end{aligned}$$

# Beispiele für krummlinige Koordinatensysteme

## 1. Polarkoordinaten



Sie sind anwendbar im  $\mathbb{R}^2$ , wenn  $G$  ein Kreis oder ein Kreisabschnitt ist.

$$\begin{aligned}x &= x(r, \phi) = r \cos \phi; \\y &= y(r, \phi) = r \sin \phi\end{aligned}$$

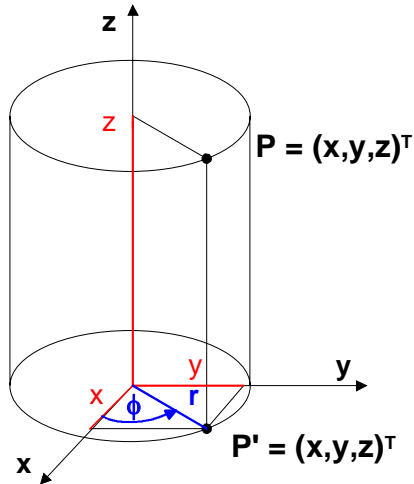
$$\bullet \quad 0 \leq r < \infty; \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$$\bullet \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \phi = \arctan \frac{y}{x}$$

$$\bullet \quad D = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \phi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\phi \\ y_r & y_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix}$$

$$= r \cos^2 \phi + r \sin^2 \phi = r$$

## 2. Zylinderkoordinaten



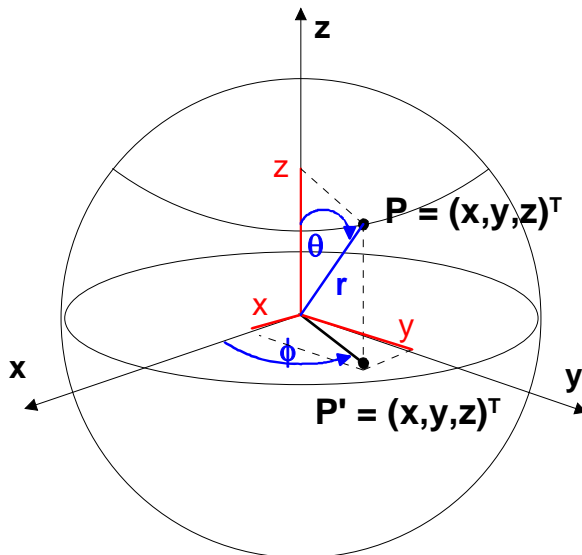
Sie sind anwendbar im  $\mathbb{R}^3$ , wenn  $G$  ein kreiszylindrisches oder rotationssymmetrisches Gebiet ist, z.B. ein Kreiszylinder oder ein Kreiskegel.

- $x = x(r, \phi, z) = r \cos \phi$ ;  
 $y = y(r, \phi, z) = r \sin \phi$ ;  
 $z = z(r, \phi, z) = z$
- $0 \leq r < \infty$ ;      $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ;      $-\infty < z < \infty$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;      $\phi = \arctan \frac{y}{x}$ ;      $z = z$

Dabei ist der Hauptwertbereich der arctan-Funktion zu beachten.

- $D = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, z)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\phi & x_z \\ y_r & y_\phi & y_z \\ z_r & z_\phi & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$   
 $= 1 \cdot (r \cos^2 \phi + r \sin^2 \phi) = r$

### 3. Kugelkoordinaten



Sie sind anwendbar im  $\mathbb{R}^3$ , wenn  $G$  eine Kugel oder ein Kugelausschnitt ist.

- $x = x(r, \phi, \theta) = r \cos \phi \sin \theta$ ;  
 $y = y(r, \phi, \theta) = r \sin \phi \sin \theta$ ;  
 $z = z(r, \phi, \theta) = r \cos \theta$
- $0 \leq r < \infty$ ;     $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ;     $0 \leq \theta \leq \pi$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ;     $\phi = \arctan \frac{y}{x}$ ;     $\theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$

Dabei ist der Hauptwertbereich der arctan-Funktion zu beachten.

- $D = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)} = r^2 \sin \theta$

#### **Übertragung von Mehrfachintegralen in ein anderes Koordinatensystem**

Es sei  $G(x, y, z)$  die Beschreibung eines Normalbereiches im kartesischen Koordinatensystem und  $\tilde{G}(r, \phi, \theta)$  die entsprechende Beschreibung in einem dem Problem besser angepassten Koordinatensystem,  $D = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \phi, \theta)}$ . Dann gilt:

$$\iiint_{G(x,y,z)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\tilde{G}(r,\phi,\theta)} f(x(r, \phi, \theta), y(r, \phi, \theta), z(r, \phi, \theta)) \cdot D \, dr d\phi d\theta$$



## Anwendungen der Kurvenintegrale 1. und 2. Art

### 1. Masse einer Kurve:

K sei eine Kurve mit Massenbelegung entsprechend der Dichte  $\rho(\underline{x})$

$$m = \int_K \rho(\underline{x}) ds = \int_{t_1}^{t_2} \rho(\underline{x}(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt \quad (KI \text{ 1. Art})$$

### 2. Kurvenschwerpunkt $P_s = (x_s, y_s, z_s)^T$ :

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{m} \int_K x \rho ds; \\ y_s &= \frac{1}{m} \int_K y \rho ds; \\ z_s &= \frac{1}{m} \int_K z \rho ds; \quad m, \rho(\underline{x}), K \text{ siehe 1.} \end{aligned}$$

### 3. Arbeit in einem Kraftfeld längs einer Kurve K:

$$\underline{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}) \\ f_2(\underline{x}) \\ f_3(\underline{x}) \end{pmatrix} \text{ sei eine Kraft auf der Kurve K; } \quad \underline{dx} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Bei der Bewegung eines Massepunktes der Masse 1 entlang von K gilt

$$\begin{aligned} W &= \int_K \underline{F} \cdot \underline{dx} \quad (KI \text{ 2. Art}) \\ &= \int_K [f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz] \\ &= \int_K [f_1(\underline{x}(t)) \dot{x}(t) + f_2(\underline{x}(t)) \dot{y}(t) + f_3(\underline{x}(t)) \dot{z}(t)] dt \end{aligned}$$

### 4. Spannung $U$ zwischen zwei Punkten $P_1$ und $P_2$ eines elektrischen Feldes, die durch die Kurve $K$ miteinander verbunden werden (Beachte die Existenz von Potentialen!):

$$U = \int_K \underline{E} \cdot \underline{dx}$$

### 5. Fläche unter einer Kurve $y = f(x)$ und über der x-Achse im Intervall $[a, b]$ :

$$A = \int_a^b f(x) dx$$