Übung Differentialrechnung von Funktionen mit mehreren Veränderlichen

1. Bestimmen Sie D_f, W_f und zeichnen Sie eine Skizze folgender Funktionen $z = f(x,y)$:
   a) $z = c = const$ $\quad (A-Teil)$ $\quad$ b) $-4z = 5x + 10y - 20$ $\quad (A-Teil)$ $\quad$ c) $z = \sin x$
   d) $z = \sqrt{1-x^2}$ $\quad$ e) $z = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad$ f) $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ $\quad$ g) $z = \frac{1}{x^2+y^2}$

2. * Berechnen Sie folgende Grenzwerte:
   a) $\lim_{x\to 1, y\to\pi} \frac{x-2y^2}{3x^2-0.5y}$ $\quad$ b) $\lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{\sin(xy)}{xy}$ $\quad$ c) $\lim_{x\to 1, y\to -1} \frac{xy}{x+y}$

3. Geben Sie alle Unstetigkeitspunkte folgender Funktionen an:
   a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ $\;(A-Teil)$ $\quad$ b) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2+2y^2}$ $(A-Teil)$
   c) $f(x,y) = \frac{y}{x-y}$ $(A-Teil)$
   d) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ $\quad$ e) $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ $\quad$ f) $f(x,y) = \frac{1}{\sin 2x}$
   g) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } xy > 0 \\ 0 & \text{für } xy = 0 \\ -1 & \text{für } xy < 0 \end{cases}$ $\quad$ h) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & x = 0 \vee y = 0 \\ 0 & sonst \end{cases}$

4. Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von:
   a) $f(x,y) = \frac{xy}{x-y}$ $\quad (A-Teil)$ $\quad$ b) $f(x,y) = xe^{-xy}$ $\quad (A-Teil)$ $\quad$ c) $f(s,t) = e^{\sin(st)}$
   d) $f(x,y,z) = xyz + \frac{y-z}{x}$ e) $f(u,v,w) = \frac{ux}{u^2+v^2+w^2}$
   f) $f(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}$ $\quad$ g) $f(u,v,w) = \left(\frac{u}{v}\right)^w$

5. Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung von:
   a) $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ $\quad (A-Teil)$ $\quad$ b) $f(x,y) = y^x$ $\quad (A-Teil)$
   c) $f(x,y) = x^2 + e^x y + e^y x^2 - 3x\ln y$ $\quad$ d) $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$

6. Bestimmen Sie $\frac{df}{dt}$ bzw. $\frac{df}{dx}$ für
   a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2; \quad x = t^2; \quad y = t$
   b) $f(x,y) = \frac{y}{x}; \quad x = e^t; \quad y = 1 - e^t$
   c) $f(x,y) = xe^y; \quad x = x; \quad y = y(x)$
   d) $f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2; \quad x = \sin t; \quad y = \cos t$
   e) $f(x,y) = e^y \cos x; \quad x = uv; \quad y = u + v$

7. Bestimmen Sie y' von folgenden implizit gegebenen Funktionen:
   a) $y^3 + 3y = x$ $\quad$ b) $y - \frac{1}{2}\sin y = x$ $\quad$ c) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$
   d) $2x^3 + 2xy^2 - 2y = 0$ $\quad$ e) $x + y - esiny = 0$ (Keplersche Gleichung)

8. Bilden Sie das totale Differential von:
   a) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ $\quad (A-Teil)$ $\quad$ b) $u(x,y,z) = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$ $(A-Teil)$
   c) $w(x,y,z) = x^5 + 6x^3y - 2x^2yz + 3yz^2$
   d) $u(x,y,z) = e^x \ln y + z^2 \cos y$ $\quad$ e) $f(\alpha,\beta,\gamma) = e^{\alpha^2-\beta}(\beta+\gamma^2)$

9. Ist dz ein totales Differential?
   a) $dz = (y + \cos x)dx + (x + 2y)dy$ $\quad$ b) $dz = e^{\sin x}(\tan y\, dx + \frac{dy}{\cos^2 y})$
   c) $dz = (1+x)e^x \ln y dx + \frac{xe^x}{y} dy$

10. Bestimmen Sie die Tangentialebene von a) $z = x^2 e^{-xy}$ im Punkt $(1;-1)^T$
    b) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ im Punkt $(3;2)^T$.

11. Von einem Zylinder wurden folgende Messwertze aufgenommen: $m = (89 \pm 0,3)g$, $h = (8,9 \pm 0,01)cm$, $r = (4,5 \pm 0,01)cm$. Bestimmen Sie eine näherungsweise Abschätzung für den absoluten und relativen Fehler der Dichte des Zylinders.

12. Bestimmen Sie eine näherungsweise Abschätzung für den absoluten und relativen Fehler des Trägheitsmomentes einer Kugel über das totale Differential, wenn folgende Messwerte und Formeln bekannt sind:
$m = (7,25 \pm 0,01)kg, \quad r = (0,06 \pm 0,001)m, \quad I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mr^2.$

13. Die Knicklast für eine runde Eisensäule wird nach der Formel
$$F_{KN} = \frac{E\pi^2}{64l^2}d^4$$
berechnet. Gemessen wurde: $l = (3 \pm 0,01)m, \quad d = (10 \pm 0,1)cm$. Da die Säule schon sehr alt ist, kann der Elastizitätsmodul nur näherungsweise angegeben werden:
$E = (210000 \pm 1000)\frac{N}{mm^2}$. Bestimmen Sie eine näherungsweise Abschätzung für den absoluten und relativen Fehler der Knicklast.

14. Bei einem einseitig eingespannten Balken mit rechteckigem Querschnitt wird die maximal auftretende Spannung an der Einspannstelle nach der Formel
$$\sigma = \frac{6Fl}{d^2b}$$
bestimmt. Gemessen wurde: $F = (30000 \pm 100)N, \quad d = (10 \pm 0,1)cm, \quad b = (6 \pm 0,1)cm$ und $l = (5 \pm 0,05)m$.Bestimmen Sie eine näherungsweise Abschätzung für den absoluten und relativen Fehler der Spannung.

15. Bestimmen Sie den relativen Fehler des Trägheitsmomentes eines Würfels
$$I = \frac{ma^2}{6},$$
wenn Ihnen die relativen Fehler der Messgrößen bekannt sind: $\left|\frac{\triangle a}{a}\right| \leq 1\%, \quad \left|\frac{\triangle m}{m}\right| \leq 0,1\%$

16. Bestimmen Sie den relativen Fehler der Knicklast einer Säule mit rechteckigem Querschnitt
$$F_{KN} = \frac{\pi E d^3 b}{12l^2},$$
wenn Ihnen Folgendes bekannt ist: $\frac{\triangle d}{d} \leq 1\%, \quad \frac{\triangle b}{b} \leq 1\%, \quad \frac{\triangle l}{l} \leq \frac{1}{3}\%, \quad \frac{\triangle E}{E} \leq 0,5\%.$

17. *Bei der Deformation eines Kegels vergrößerte sich dessen Grundkreisradius r = 30 cm auf 30.1 cm; Die Höhe h verringerte sich von 60 cm auf 59.5 cm. Ermitteln Sie angenähert die Volumenänderung nach der Formel $\triangle V \approx dV$ (unter Beachtung aller Vorzeichen, keine Beträge!).

18. *In einem rechtwinkligen Dreieck ergab die Messung der Hypothenuse
$c = (152.03 \pm 0.05)cm$, die der Kathete $a = (76.82 \pm 0.04)cm$. Welche Abschätzung ergibt sich für den Betrag des absoluten Fehlers des Winkels, wenn folgende Formel zur Winkelbestimmung benutzt wird: $\alpha = \arcsin\frac{a}{c}$. (Bogenmaß!)

19. $A{-}Teil:$ Es sei $\overrightarrow{s}$ ein Vektor der Länge 1. Definieren Sie den Begriff der Richtungsableitung einer Funktion $f(\overrightarrow{x})$ im Punkt $\overrightarrow{x}_0$ in Richtung $\overrightarrow{s}$. Wie groß ist der Wert dieser Ableitung (Interpretation)?

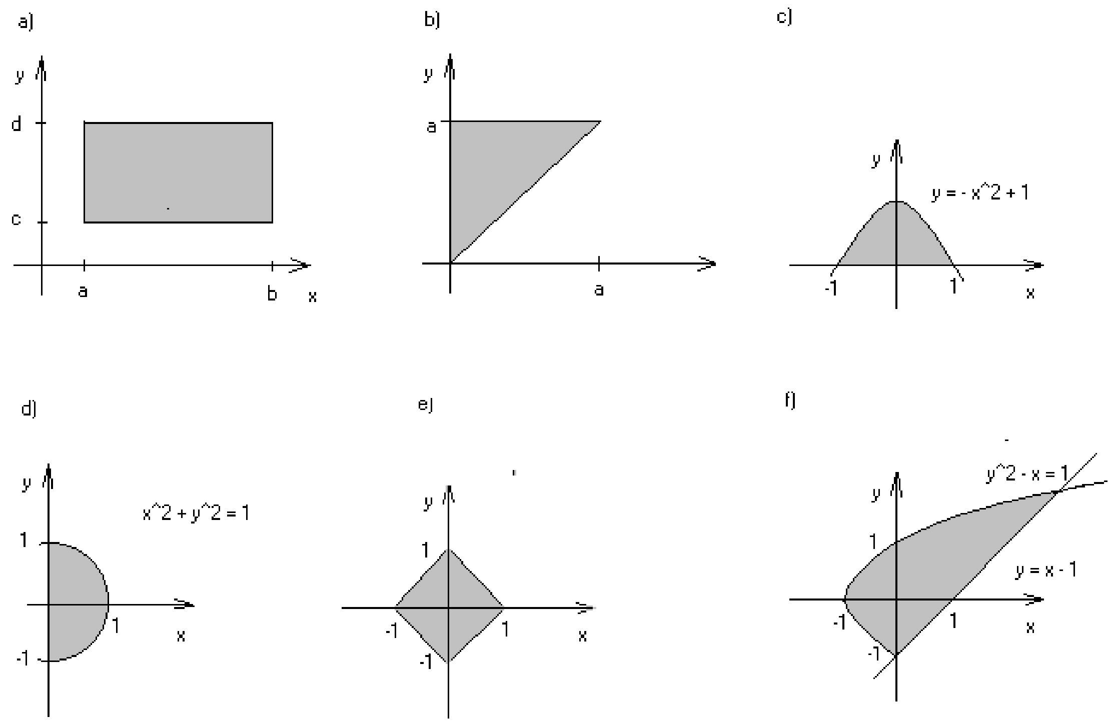
20. Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ im Punkt $P = (3;4)^T$. $(A - Teil)$
Berechnen Sie die Richtungsableitung im Punkt P
a) in x-Richtung b) in y-Richtung c) in Richtung der Geraden $y = x$
d) in Richtung $\overrightarrow{l} = (1;5)^T$ e) in Richtung des Gradienten
f) In welcher Richtung wächst die Funktion am schnellsten? Können Sie das anhand der Rechenergebnisse bestätigen?

21. Es sei $f(x,y) = 3x^2y + 4xy^2$. Welchen Anstiegswinkel hat eine Tangente, die im Punkt $P = (-1;5)^T$
a) in x-Richtung b) in y-Richtung c) in Richtung des Vektors $(1,2)^T$ zeigt?
d*) Es sei $f(x,y) = 2x + \frac{y}{2} + 1$. In welcher Richtung beträgt der Anstieg der Tangenten -1.3 ?

22. Bestimmen Sie alle relativen Extrema folgender Funktionen z=z(x,y):
a) $z = 2x^2 + 2y^2 + 3xy - 5x - 2y + 5$ $(A - Teil)$
b) $z = e^x - xe^y$
c) $z = e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}$
d) $z = 4x^2 + y^2 - xy + 10x + 10y - 4$
e) $z = e^{x^2-y^2}$
f) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$
g) $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$
h) $z = (1 + e^y)\cos x - ye^y$
i)* $z = e^{y^2-x^2} + \frac{x^2}{2}$
k) $z = 4(x-2)(y^2 + 10y) + 3x^3$

Übung "Mehrdimensionale Integrale"

1. Stellen Sie folgende Bereiche als Normalbereiche bezüglich x und y dar: $A - Teil$: a) und b)



2. Skizzieren Sie den Bereich B und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge:

   a) $\int_0^2 \int_x^{2x} f(x,y)dydx \qquad A - Teil$: Skizze und NB$_y$

   b) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dydx$

   c) $\int_0^4 \int_y^{10-y} f(x,y)dxdy$

   d) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dxdy \qquad .$

3. Berechnen Sie folgende Doppelintegrale:

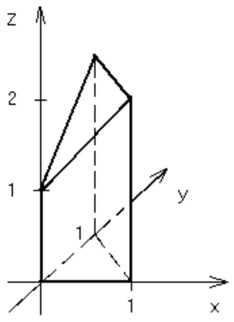
   a) $\int_0^1 \int_0^1 e^{x+y}dxdy \qquad (A - Teil)$

   b) $\int_1^2 \int_0^{y+1} x \ln y \, dxdy$

   c) $\int_0^\pi \int_0^x \cos(x+y)dydx \qquad .$

4. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der B als Grundfläche und f(x,y) als Deckfläche benutzt. (Seitenflächen parallel zu den Koordinatenebenen.) Wie groß ist B? $(A - Teil)$
   a) $B = \left\{(x,y)^T \in R^2 : 0 \le x \le 1, x + y \le 1, y \ge 0\right\}; \quad f(x,y) = xy$
   b) $B = \left\{(x,y)^T \in R^2 : 0 \le x \le 1, x \le y \le 2 - x^2\right\}; \quad f(x,y) = x + y$

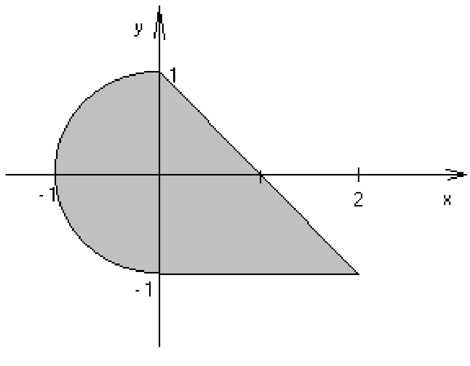
5. Berechnen Sie das Volumen dieses Körpers
   a) mit einem Volumenintegral$(A - Teil)$
   b) mit einem Flächenintegral,$(A - Teil)$
   c) Stellen Sie die Analogie zwischen Flächen- und Volumenberechnungen dar.



   d) Informieren Sie sich zu den Anwendungen der Integration (Folien) und stellen Sie fest, welche physikalischen Größen Sie für die einzelnen Formeln benötigen. $(A - Teil)$

6. Berechnen Sie die Masse des Flächenstücks B, wenn B mit der Flächendichte ρ belegt ist:
   a) $B = \{(x, y)^T \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}; \quad \rho = e^{-y^2}$
   b) B ist begrenzt durch $x = 0;\ x = 1;\ y = x + 2;\ x + y = 1; \quad \rho = e^{x+y}$
   c) $B = \{(x, y)^T \in R^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}; \quad \rho = 1 + x + 4y$.

7. Berechnen Sie die Koordinaten des geometrischen Schwerpunktes von B:
   a) $B = \triangle P_1P_2P_3$
   $P_1 = \binom{0}{0}, P_2 = \binom{2}{2}, P_3 = \binom{2}{4}$
   b)



8. Berechnen Sie die Masse des Bereiches B, seine Fläche und seinen Schwerpunkt.
   Massendichte: $\rho = xy^2$; Grenzen von B: x = y^2; x = 3 - 2y^2 .

9. Berechnen Sie folgendes Integral und skizzieren Sie das Integrationsgebiet:
   $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{1-y^2} 2y^3(y^2 + 2z) \sin 2x \, dzdydx$.

10. Bestimmen Sie das Volumen des Körpers, der durch x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 4, z = x$^2 + y^2$ begrenzt wird.

11. Bestimmen Sie das Volumen und die x-Koordinate des Schwerpunktes des Körpers, der durch $x = 0, x = 3, y = 1, y = 4, z = 0, z = x^2 + y^2 + 2$ begrenzt wird.

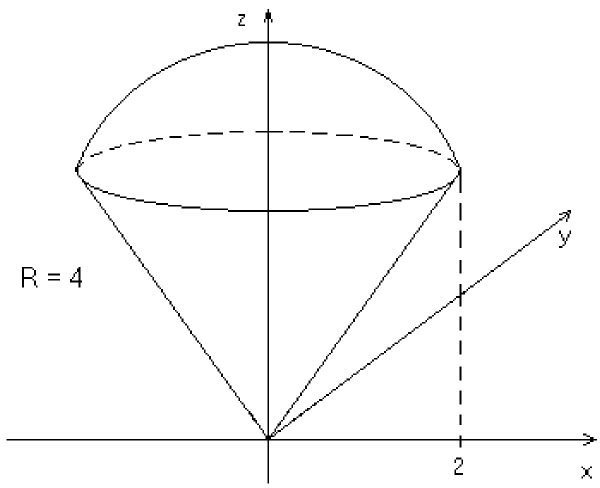
12. B sei das Tetraeder mit den Eckpunkten $(0;0;0)^T$, $(1;0;0)^T$, $(0;1;0)^T$, $(0;0;1)^T$. Gesucht ist $I = \iiint_B \frac{dB}{(x+y+z+1)^3}$.

13. Man bestimme das Volumen des Körpers, der von den Flächen $y = x^2$; $x + y + z = 2$; $y = 1$ und $z = 0$ begrenzt wird.

14. $A - Teil$: B sei die Fläche des Einheitskreises. Berechnen Sie $\iint_B dxdy$ und $\iint_B drd\phi$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

15. Bestimmen Sie die Koordinaten des geometrischen Schwerpunktes für einen Viertelkreis im 1. Quadranten.

16. Berechnen Sie Volumen und Schwerpunkt dieses Kugelausschnittes:



17. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der begrenzt wird durch
$8x + 3y + 12z = 36, \qquad z = 0 \quad und \quad x^2 + y^2 = 4$.

18. Aus dem Zylinder $x^2 + y^2 \leq 4$ wird durch die x - y - Ebene und durch die Fläche $z = e^{x^2+y^2}$ ein Körper herausgeschnitten. Welche Masse hat dieser Körper, wenn seine Dichte $\rho = y^2$ beträgt.

19. Es rotiere z = 2x um die z-Achse. Zwischen z = 8 und z = 0 entsteht ein Körper. Was ist das für ein Körper? Berechnen Sie das Volumen und den Schwerpunkt dieses Körpers.

20. Wie groß ist das Trägheitsmoment des Kegels $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad z \geq 0$ bzgl. der x-Achse. $(\rho \equiv 1)$

21. Berechnen Sie die Gesamtladung Q des Körpers, der durch die Flächen
$z = \sqrt{3}(x^2 + y^2)$ und $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
begrenzt wird, wenn die Ladungsdichte $\rho(x, y, z) = \rho_0 \cdot z$ beträgt. ($\rho_0 = const.$)

Übung Kurvenintegrale

1. $A - Teil$: Berechnen Sie die Bogenlänge folgender Kurven:
   a) $y = \frac{x^2}{4} - \ln\sqrt{x}; \qquad 1 \le x \le 2$
   b) $x = e^t \cos t; \qquad y = e^t \sin t; \qquad z = e^{t;} \qquad 0 \le t \le b$
2. Ermitteln Sie das Kurvenintegral 1. Art über $f(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ entlang der von $(1,1,1)^T$ nach $(2,2,2)^T$ führenden Strecke.
3. Berechnen Sie $I = \int\limits_K \sqrt{a^2 - x^2} ds; \quad a \ge 0; \quad K = \left\{ (x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = a^2,\ y \ge 0 \right\}.$
4. $A - Teil$: Beschreiben Sie die Kurven K in expliziter und in Parameterdarstellung an, wobei K
   a) das Stück der Parabel $y = x^2$ mit dem Anfangspunkt $(1,1)^T$ und dem Endpunkt $(2,4)^T$ ist.
   b) entlang der Strecke von $(1,1)^T$ nach $(2,4)^T$ gewählt wird.
5. Berechnen Sie $I = \int\limits_K [xydx + (y-x)dy]$. Nutzen Sie die Kurvenbeschreibungen für K aus Aufgabe 4.
6. Man berechne das Kurvenintegral $I = \int\limits_K [(x+y+z)dx + (3x+2y-z)dy + (5x-y+z)dz]$
   längs der Strecke K von Punkt $P_1 = (0,0,0)^T$ nach Punkt $P_2 = (1,2,3)^T$.
7. Man berechne $I = \int\limits_{(0,1)^T}^{(1,0)^T} [y^2dx - x^2dy]$
   a) längs einer Geraden: K_1; b) längs des Viertels des Einheitskreises: K_2.
8. Man berechne die Arbeit der Kraft $\overrightarrow{F} = \binom{y}{-x}$
   a) längs K_1: $\binom{x(t)}{y(t)} = \binom{\cos t}{\sin t}; \quad 0 \le t \le \pi$
   b) längs K_2: $\binom{x(t)}{y(t)} = \binom{\cos t}{\sin t}; \quad 2\pi \ge t \ge \pi$
   c) längs der Strecke von $\binom{1}{0}$ nach $\binom{-1}{0}$: K_3
   d) längs des Bogens der Parabel $y = x^2 - 1$ von $\binom{1}{0}$ nach $\binom{-1}{0}$: K_4
9. $A-Teil$: Wie lauten die Kriterien für die Wegunabhängigkeit eines KI 2. Art und deren Interpretation?
10. Prüfen Sie die folgenden Kurvenintegrale auf Wegunabhängigkeit. Bestimmen Sie gegebenenfalls das Potential und berechnen Sie das Kurvenintegral entlang der Kurve K.
    a) $\int\limits_{(1,1,-7)^T}^{(2,2,2)^T} [(x^2+y)dx + (x-y^2)dy]$; K: Verbindungsstrecke der beiden Punkte
    b) $\int\limits_{(0,1,2)^T}^{(1,0,-1)^T} [(xe^y)dx - ye^x dy]$; K: Verbindungsstrecke der beiden Punkte
    c) $\int\limits_{(1,1,1)^T}^{(2,2,2)^T} [(3x^2+2y^2)dx + (4xy-3z^3)dy - 9yz^2dz]$; K: Verbindungsstrecke der Punkte
11. Das Magnetfeld um einen (unendlich lang gedachten) stromdurchflossenen Leiter längs der $z-$Achse ist außerhalb des Drahtes durch
    $\overrightarrow{H} = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben. (I: Stromstärke) Man berechne $J = \oint_K \overrightarrow{H} \cdot \overrightarrow{dx}$ längs des Kreises K mit dem Radius R um den Ursprung in der $x-y-$Ebene.
12. Berechnen Sie $\oint\limits_K \overrightarrow{V}(\overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{dx}$; K: Einheitskreis mit dem Mittelpunkt $M = \binom{4}{3}$ auf Höhe $z = 2$,
    $\overrightarrow{x} = (x,y,z)^T; \quad \overrightarrow{V}(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} e^z \sin y + \frac{2}{x} \\ xe^z \cos y + \frac{1}{y} \\ xe^z \sin y \end{pmatrix}$
13. Geben Sie die Bedingungen an, unter denen $\oint\limits_K [ayzdx + (bxz+y^2)dy + cyxdz] = 0; \quad a,b,c \in \mathbb{R}$ gilt.

Übung Vektoranalysis

1. $A{-}Teil$: Wiederholen Sie die Definition des Gradienten und berechnen Sie
   grad$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2. Es sei $r = r(x,y,z) = |\overrightarrow{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\quad \overrightarrow{r} = (x,y,z)^T$.
   Berechnen Sie a) grad r^n, b) grad $\ln r$ c) grad e^r d) grad $sin(r)$

3. Bestimmen Sie das Gradientenfeld zu
   a) $U = 3x^2y - y^3z^2$ im Punkt $(1,-2,-1)^T$, b) $V = \sqrt{x^3y - zy^2}$ im Punkt $(0,1,-3)$.
   In welche Richtung zeigen diese Vektoren?

4. In welcher Richtung vom Punkt $(2;1;-1)^T$ aus besitzt das skalare Feld $U = x^2yz^3$ sein größtes Wachstum? Wie groß ist dieses (bezogen auf eine Einheit)?

5. $A - Teil$: Informieren Sie sich über die Definition von Divergenz und Rotation und berechnen Sie
   div$\overrightarrow{r}$ und rot$\overrightarrow{r}$ mit $\overrightarrow{r} = (x,y,z)^T$.
   Was bedeutet, dass ein Feld quellfrei ist? Wann ist ein Feld wirbelfrei oder konservativ?

6. Berechnen Sie $div\ \overrightarrow{v}$ und $rot\ \overrightarrow{v}$ für
   a) $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x^2+y \\ y^2+z \\ z^2+x \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} e^{xy} \\ xyz \\ x^2ye^z \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{v} = r^n\overrightarrow{r}$
   d) $\overrightarrow{v} = \ln r\ \overrightarrow{r}$
   r, $\overrightarrow{r}$ wie in Aufgabe 2.

7. Bestimmen Sie die Konstante a so, dass das Vektorfeld
   $\overrightarrow{v} = (x+3y, y-2z, x+az)^T$ quellfrei ist.

8. Untersuchen Sie ob die folgenden Vektorfelder wirbelfreie (konservative) Felder sind und berechnen Sie gegebenenfalls das Potential U.:
   a) $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-x \\ xy \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

9. * Beweisen Sie $rot(\overrightarrow{r} \cdot f(r)) = \overrightarrow{0}$, wobei $f(r)$ differenzierbar ist.
   (r, $\overrightarrow{r}$ wie in Aufgabe 2.)

10. F sei die Oberfläche des Würfels $[0;1]^3$, die Normale zeige nach außen.
$F_0 = F \backslash \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \right\}$; $\quad \overrightarrow{v} = (e^{y+z}, \sin(xz), e^{-xy})^T$;
Berechnen Sie $\iint_{F_0} rot\ \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dS}$ mittels Integralsatz.

11. A sei die geschlossene Oberfläche des Würfels $[0;1]^3$, die Normale zeige nach außen; $\overrightarrow{v} = (x^2, xy, xz)^T$; Ges.: $\iint_A \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{dA}$

12. Durch $z = 0$; $\quad z = h$; $\quad x^2 + y^2 = R^2$ wird ein Zylinder berandet. Die Normale zeige nach außen. Gesucht ist der Fluss des Feldes
$\overrightarrow{F} = (x^3, z - x^2 y, y - x^2 z)^T$ durch die Oberfläche des Zylinders nach außen.