1. Hausaufgabe/ Differentialrechnung

1. Ermitteln Sie D_f, W_f und zeichnen Sie eine Skizze von
   a) $z = \sqrt{xy}$ b) $z = \frac{4}{x+y}$

2. Geben Sie die Stetigkeitspunkte von $f(x,y) = \ln(1 - \sqrt{x^2+y^2-1})$ an.

3. Zeigen Sie, daß für $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ die Gleichung
   $(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z})^2 = 1$ gilt.

4. Bestimmen Sie y' von der implizit gegebenen Funktion $y = y(x)$: $x^3 + y^3 = 3axy$.

5. Bilden Sie alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von
   a) $f(x,y,z) = \ln(\frac{x}{y})z^x$ b) $f(x,y,z) = z^y + e^{z^2 x}$.

6. Bestimmen Sie alle relativen Extrema der Funktionen:
   a) $z = \frac{1}{27}xy + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ b) $z = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - 5x + \frac{1}{3}y^3 - 5y$

7. Die Feldstärke am Innenleiter eines konzentrischen, einadrigen Ölkabels wird nach der Formel $E = \frac{U}{a(\ln b - \ln a)}$ berechnet. Es werden folgende Größen gemessen:
   Radius des Innenleiters $a = (3.5 \pm 0.035)10^{-3}m$,
   Radius des Außenleiters $b = (17.5 \pm 0.17)10^{-3}m$,
   Spannung $U = (10^5 \pm 2 \cdot 10^3)V$.
   Bestimmen Sie Abschätzungen für den Betrag des absoluten und relativen Fehlers von E.

8. Um wieviel Prozent kann das errechnete Volumen eines Kegels fehlerhaft sein, wenn der Radius mit 0.5% und die Höhe mit 1% fehlerhaft gemessen wurden?

9. Bilden Sie den Gradienten von $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Wie groß ist die Richtungsableitung im Punkt $(-2,1,1)^T$ in Richtung $(1,1,2)^T$?

10. Bestimmen Sie die Tangentialebene an $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ im Punkt $(1,2)^T$.

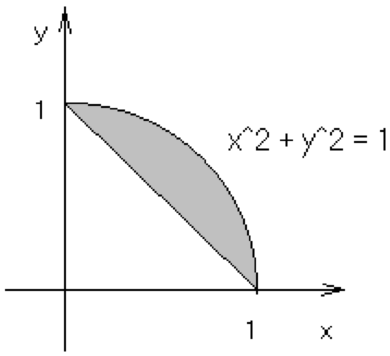
Hausaufgabe Bereichsintegrale

1. Skizzieren Sie den Integrationsbereich B und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge: $\int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} f(x,y)dydx$.

2. Berechnen Sie $\iint_B (x+y)dB$. B ist begrenzt von der Ellipse $x^2 + 3y^2 = 4$ und x = 1 und enthält den Punkt $\binom{0}{0}$.

3. Berechnen Sie die Masse und den Schwerpunkt von B.
   $B = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 4; \quad 0 \leq y \leq 4 - x\}; \quad \rho = 0.5(x+y)$

4. Berechnen Sie den geometrischen Schwerpunkt folgender Fläche:



5. Berechnen Sie das Trägheitsmoment von B bzgl. der z-Achse:
   $B = \{(x,y,z) : x \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq z \leq 1\}$.

6. Gesucht ist das Volumen des Doppelparaboloids, das von den Flächen $z = x^2 + y^2 - 5$ und $z = 13 - x^2 - y^2$ begrenzt wird.

7. Bestimmen Sie den Schwerpunkt einer unteren Halbkugel mit dem Radius R.

8. Bestimmen Sie für den durch die Flächen z = 1 und $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 5 - z$ eingeschlossenen räumlichen Bereich B das Integral $\iiint_B z dB$. Hinweis: Zylinderkoordinaten

Hausaufgabe Kurvenintegrale

1. Man berechne die Bogenlänge folgender Kurve:
   a) $y = lnx$, $1 \leq x \leq 3$,
   b) $x = 0.5t^2 - t + 2; \quad y = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}; \quad 1 \leq t \leq 5.$

2. Berechnen Sie $I = \int\limits_K xyds; \quad K = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 + y^2 = 1; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0\}.$

3. K sei der orientierte Polygonzug von $(0,0,0)^T$ über $(2,0,0)^T$ nach $(2,0,1)^T$.
   Wie groß ist die Arbeit, die ein K durchlaufender Punkt gegen
   $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ 1-x \\ z^2 \end{pmatrix}$ zu leisten hat ?

4. Berechnen Sie $I = \int\limits_K [xydx + yzdy + zxdz]$, wobei K ein Gang der Schraubenlinie
   $x(t) = a\cos t, \quad y(t) = a\sin t, \quad z(t) = bt, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ ist.

5. Untersuchen Sie, ob das Kurvenintegral 2. Art $\int\limits_K [zydx + (xz + y^2)dy + yxdz]$ wegunabhängig ist.
   Bestimmen Sie gegebenenfalls das Potential und berechnen Sie das Kurvenintegral entlang der Strecke von A = $(1,1,1)^T$ nach B = $(2,2,2)^T$.

6. Gesucht ist $I = \int\limits_K \underline{F}\underline{dx}$ mit $\underline{F}= (-y; -x; z)^T$ längs der Schraubenlinie
   $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

   a) Weisen Sie die Wegunabhängigkeit des Integrals nach.
   b) Berechnen Sie das Integral mit Hilfe des Potentials.
   c) Berechnen Sie das Integral ohne Zuhilfenahme des Potentials.

Hausaufgabe Vektoranalysis

1. Berechnen Sie die Richtung des stärksten Wachstums von $f(x, y, z) = x^2yz + xy^2z + xyz^2$ im Punkt $(1; 1; 1)^T$.
   Wie groß ist der Zuwachs beim Übergang von $P_1 = (1; 1; 1)^T$ nach $P_2 = (2; 2; 2)^T$?

2. Bestimmen Sie die Einheitsnormale der Fläche $f(x, y, z) = x^2y + 2xz = c = const.$ im Punkt $(2; -2; 3)^T$.

3. Berechnen Sie *div* $\mathbf{v}$ und *rot* $\mathbf{v}$ im Punkt $(1; -1; 1)^T$ von $\mathbf{v} = (x^2z, -2y^3z^2, xy^2z)^T$.

4. Bestimmen Sie die Konstanten a,b,c so, dass $\mathbf{f}$ wirbelfrei ist.
   $\mathbf{f} = (x + 2y + az, bx - 3y - z, 4x + cy + 2z)^T$

5. * Beweisen Sie $div\ rot\ \mathbf{f} = 0$ für beliebiges $\mathbf{f}$.

6. A sei die Oberfläche des Würfels $[-1; 1]^3$, $\quad \mathbf{u} = (4xyz,\ y,\ xy)^T$. Berechnen Sie $I = \iint \mathbf{u} \cdot \mathbf{dA}$ mittels Integralsatz.

7. S ist die Oberfläche des Paraboloids $2z = x^2 + y^2$, das durch $z = 2$ nach oben begrenzt wird und dort einen Rand ∂S besitzt, $\mathbf{v} = (3y,\ -xz,\ yz^2)^T$. Berechnen Sie mittels Integralsatz $\iint_S rot\ \mathbf{v}\ dS = I$.

8. $\mathbf{v} = (xz,\ -2x^2yz,\ 2yz)^T$ sei ein Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit. Berechnen Sie den Flüssigkeitsgewinn pro Zeiteinheit in dem Quader $0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 3,\ 0 \leq z \leq 1$.