

Scientific Computing

Cordula Bernert

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Das Grundproblem der Approximation	3
1.2	Probleme bei Analyse und Synthese	4
1.3	Gefensterte Fouriertransformation	6
1.4	Wavelettransformation (WT)	7
2	Basiswissen zur Fourieranalysis	11
2.1	Fourierreihen	11
2.2	Fouriertransformation	13
2.3	Die HEISENBERGsche Unschärferelation	15
2.4	Das Abtasttheorem (SHANNON)	17
3	Das HAAR-Wavelet	19
3.1	Die HAARsche Basis	19
3.2	Die schnelle HAAR-Transformation	25
4	Die kontinuierliche Wavelettransformation	31
4.1	Wavelets - Definition und Eigenschaften	31
4.2	Die kontinuierliche Wavelettransformation	33
4.3	Eigenschaften der kontinuierlichen Wavelettransformation	38
4.3.1	Filtereigenschaften	39
4.3.2	Phasenraumdarstellung	41
4.3.3	Approximationseigenschaften	43
5	Diskrete Wavelettransformation	47
5.1	Waveletframes	47
5.1.1	Geometrische Interpretation - Einführung	47
5.1.2	Der allgemeine Frame-Begriff	53
5.2	Die Diskrete Wavelettransformation	56
5.3	Multiskalenanalyse - MSA	62
5.3.1	Einführung	63
5.3.2	Die Skalierungsfunktion	67
5.3.3	Konstruktion von Skalierungsfunktion und Mutterwavelet	70
5.4	Schnelle Algorithmen	77
5.4.1	Analyse von $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$	78
5.4.2	Synthese	79

5.4.3	Tabellen	82
6	Anwendungen	85
6.1	Vorbereitungen	85
6.2	Datenkompression	88
6.3	Denoising - Rauschunterdrückung	89
6.4	Merkmalerkennung	91

Literaturverzeichnis

- [1] Christian Blatter: Wavelets - Eine Einführung, Vieweg Verlag, 2. Auflage 2003
- [2] Louis, Maaß, Rieder: Wavelets, BG Teubner, Stuttgart 1998
- [3] W. Bäni: Wavelets. Eine Einführung für Ingenieure, Oldenbourg Verlag, 2. Auflage 2005
- [4] Janusz Wawrzynowicz: Untersuchung von waveletbasierten Bildkompressionsverfahren unter Anwendung von verschiedenen Wavelets und Codierungen, Diplomarbeit, Hochschule Mittweida 1999
- [5] Phong Dieu Nguyen: Beitrag zur Diagnostik der Verzahnungen in Getrieben mittels Zeit-Frequenz-Analyse, Dissertation, TU Chemnitz, Fakultät für Maschinenbau und Verfahrenstechnik, Institut für Mechanik 2002
- [6] Metin Akay (Editor): Time frequency and Wavelets in Biomedical Signal Processing, IEEE Press 1998
- [5] Sweldens, Piessens; SIAM J. Numer. Anal., 31(4), 1994
- [6] I. Daubechies: Ten lectures on Wavelets, CBMS-NSF Regional Conference, Series in Applied Mathematics, SIAM 1992

1 Einleitung

1.1 Das Grundproblem der Approximation

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\{e_\alpha(t); \alpha \in I; t \in \mathbb{R}\}$ eine Familie von Basisfunktionen, I eine diskrete oder kontinuierliche Indexmenge.

Gesucht ist eine Darstellung von f mittels der e_α :

$$f(t) = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha e_\alpha(t) \quad (1.1) \quad \text{bzw.}$$

$$f(t) = \int_I c_\alpha e_\alpha(t) d\alpha \quad (1.2).$$

$\{e_\alpha(t)\}$ enthalte so viele Basisfunktionen, dass die Darstellung (1.1) bzw. (1.2) eindeutig ist.

Analyse bzgl. der Familie $\{e_\alpha(t)\}$:

$$f \xrightarrow{\{e_\alpha\}} (c_\alpha), \quad \alpha \in I$$

Synthese (Umkehroperation):

$$(c_\alpha) \xrightarrow{\alpha \in I} f$$

Beispiel 1.1 $\{e_\alpha(t)\} = \{(t-b)^\alpha; b \in \mathbb{R}, \alpha = 0, 1, 2, 3, \dots\}$:

Voraussetzung: f sei beliebig oft differenzierbar $\curvearrowright f$ wird als Taylorreihe dargestellt.

$$c_\alpha = \frac{f^{(\alpha)}(b)}{\alpha!}$$
$$f(t) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} c_\alpha (t-b)^\alpha$$

Beispiel 1.2 f sei 2π -periodisch, $f \in \mathbb{L}_2(-\pi, \pi)$

$\{e_\alpha(t)\} = \{e^{i\alpha t}; \alpha \in \mathbb{Z}\}$ ist ONB im $\mathbb{L}_2(-\pi, \pi)$.

$$c_\alpha = (f, e_\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i\alpha t} dt$$
$$f(t) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} c_\alpha e^{i\alpha t}$$

für fast alle t , Konvergenz bzgl. der \mathbb{L}_2 -Metrik

Beispiel 1.3 $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$; $\{e_\alpha(t)\} = \{e^{i\alpha t}; \alpha \in \mathbb{R}\}$ ist aber keine ONB im $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$!!

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \\ f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\alpha) e^{-i\alpha t} d\alpha\end{aligned}$$

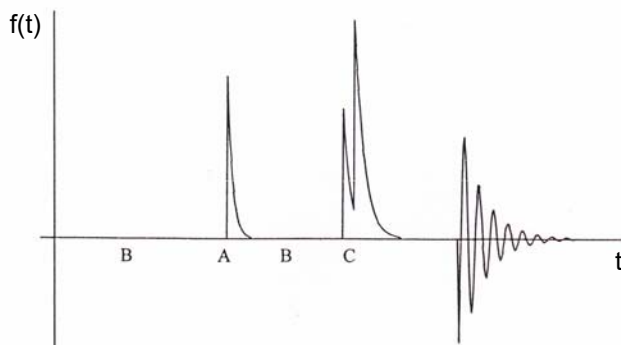
Dabei ist $\widehat{f}(\alpha)$ die Fouriertransformierte und entspricht der komplexen Amplitude, mit der die Frequenz α im Signal $f(t)$ vertreten ist.

1.2 Probleme bei Analyse und Synthese

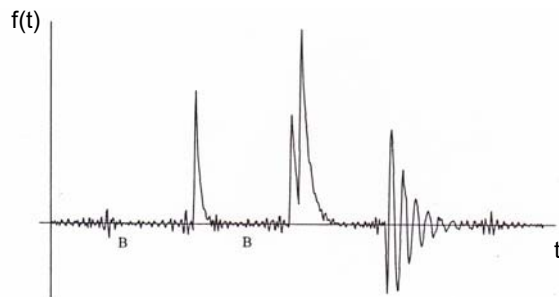
1. Die Funktionen liegen in der Praxis nur als Vektor von Messdaten vor
 - \implies Eine vollständige Diskretisierung ist unumgänglich
 - * für die Basisfunktionen und
 - * für den Raum der Unabhängigen t .
 - \implies Die Werte aller vorkommenden Funktionen werden nur noch an diskreten Stellen $t = k\tau$ $\tau > 0$; $k \in \mathbb{Z}$ betrachtet.

2. Ziel der Darstellung in Basisfunktionen ist es, eine
 - * einheitliche und
 - * möglichst komprimierte Darstellung zu finden.
 Anwendung z.B. bei der Datenkompression.

Beispiel 1.4 Zur Illustration sei hier die Rekonstruktion der Funktion



mittels Fouriertransformation und Wavelettransformation aus /3/ angeführt:



Rekonstruktion aus den 100 betragsgrößten Fourierkoeffizienten



Rekonstruktion aus den 75 betragsgrößten Waveletkoeffizienten

⇒ **Grenzen der FT:**

* f wird als Gesamtobjekt behandelt

* keine Lokalisation von Maximalwert oder Sprungstellen auf der t -Achse mittels der Transformierten möglich.

Die Gründe liegen darin, dass mit $y_k = f(\frac{2\pi k}{N})$, $0 \leq k < N$ eine auf der Zeitachse präzise lokalisierbare Information den Fourierkoeffizienten c_k gegenüber steht, die Informationen aus dem gesamten Definitionsbereich enthalten. Im Beispiel sind folglich sehr viele Koeffizienten nötig, um Auslöschung einerseits und „Zacken“ in anderen Bereichen zu rekonstruieren. Besonders deutlich wird das bei Unstetigkeitsstellen. Es kommt zu Welligkeiten im gesamten Definitionsbereich.

⇒ schlechte Kompressionsrate, da nichts weggelassen werden kann

⇒ schlechte Qualität der Synthese

⇒ **andere Wahl von Basisfunktionen** nach folgenden Kriterien

- (F1) Darstellung (1.1) bzw. (1.2) liegt für eine genügend große Klasse von Funktionen vor, Analyse und Synthese sind numerisch rasch und stabil ausführbar.
- (F2) Die Basisfunktionen sind zeitlich gut lokalisiert, haben im besten Fall einen beschränkten Träger.
- (F3) Die Transformierten der Basisfunktionen sind im Frequenzbereich ebenfalls gut lokalisiert.
- (F4) Die Basisfunktionen bilden ein ONS.

Wie später an der Unschärferelation zu sehen ist, widersprechen sich (F2) und (F3). Deshalb muss, anders als bei der FT, ein Kompromiss gefunden werden: Wenn möglich, sollen lokale Informationen sowohl über f , als auch über die Transformierte leicht erkennbar sein. (F4) führt zu einer eindeutigen Darstellung.

Um dem Dilemma der Unschärferelation zu entgehen, gibt es zwei Ansätze: die gefensterterte Fouriertransformation (Windowed FT) und die Wavelettransformation.

1.3 Gefensterterte Fouriertransformation

- Wahl einer Fensterfunktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit der Eigenschaft, dass sie „mit Gesamtmasse Eins um $t = 0$ konzentriert“ ist. Das kann z.B. durch einen kompakten Träger oder ein ausgeprägtes Maximum bei $t = 0$ erreicht werden.

- Das Fenster g wird um s Einheiten nach rechts verschoben:

$$g_s(t) = g(t - s); \quad s > 0,$$

um die gesamte t -Achse damit abrastern zu können.

- Das bekanntestes Beispiel einer solchen Fensterfunktion ist:

$$g(t) = N(0, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma = \text{const.}$$

Sie führt zur GABOR-Transformation (Nobelpreis Physik 1970).

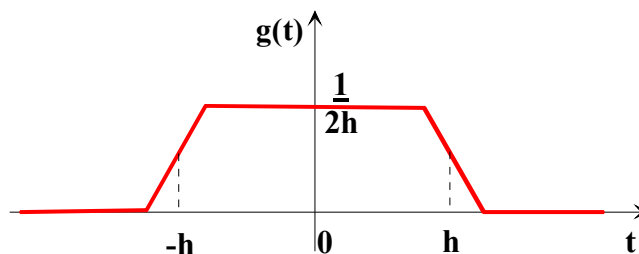
- Fenstertransformierte auf Basis der Grundfunktionen $e^{i\alpha t}$:

$$Gf(\alpha, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-s)e^{-i\alpha t} dt$$

$$Gf : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

- Die Information über f ist in Gf sehr redundant repräsentiert. \curvearrowright Es existieren verschiedene Umkehrformeln (GABOR, CALDERON).

Interpretation: Wähle $g(t)$ wie folgt:



$Gf(\alpha, s)$ gibt an, mit welcher komplexen Amplitude die Grundschiwingung $e^{i\alpha t}$ im Intervall $[s - h; s + h]$ in f vertreten ist.

Ist $e^{i\alpha t}$ in diesem Intervall vertreten $\implies |Gf(\alpha, s)|$ ist groß.

Vorteil: bessere Lokalisation durch Verschieben des Fensters

Nachteil: konstante Breite des Fensters, da

- bei hochfrequenten Schwingungen, die nur in einem Teil des Intervalls auftreten, wieder keine ordentliche Lokalisation möglich ist,
- bei niederfrequenten Schwingungen das Fenster u.U. zu schmal ist, um eine volle Schwingung zu erfassen.

\implies Eine Verbesserung ist zu erwarten, wenn die Fenstergröße mit α variiert.

\implies Das analysierende Funktionensystem muss gewechselt werden.

1.4 Wavelettransformation (WT)

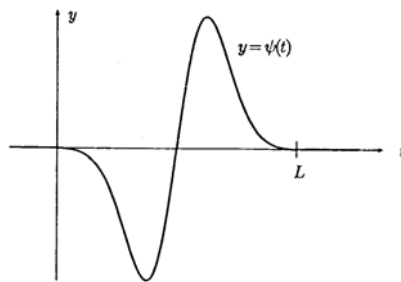
- Zunächst wird eine analysierende Funktion gewählt, das sogenannte „Mutterwavelet“. Das Mutterwavelet ist der Ausgangspunkt für davon abgeleitete Basisfunktionen, die Waveletfunktionen, mit deren Hilfe f dargestellt wird.
- Die Waveletfunktionen sind dilatierte und/oder verschobene Kopien des Mutterwavelets:

$$\begin{aligned}\psi_{ab}(t) &= \frac{1}{|a|^{0.5}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \\ \psi &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ (a, b) &\in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}.\end{aligned}$$

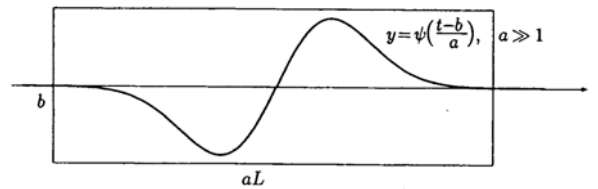
a : Skalenparameter, b : Verschiebungsparameter

Der Vorfaktor $\frac{1}{|a|^{0.5}}$ dient zur Normierung der Waveletfunktionen.

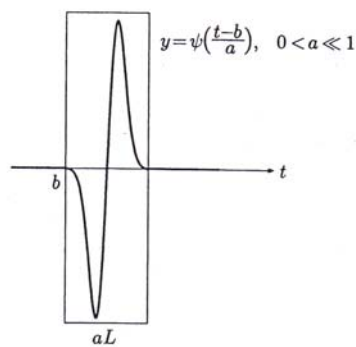
- Es sei z.B. folgende Funktion $\psi(t)$ gegeben /2/:



- $|a| \gg 1$ liefert dabei ein breites Fenster zur Erfassung langsamer, niederfrequenter Vorgänge,



- $|a| \ll 1$ erzeugt schmale Fenster zur Untersuchung schneller, hochfrequenter Vorgänge.



- Die Wavelettransformation

$$Wf(a, b) = (f, \psi_{\alpha b}) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}|a|^{0.5}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt$$

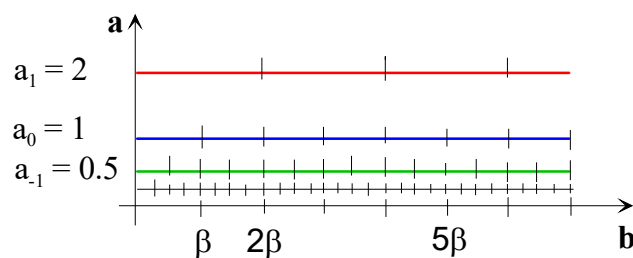
ergibt Datensätze $\{Wf(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}\}$ mit hoher Redundanz. c_ψ ist dabei eine waveletspezifische Konstante.

- \exists Umkehrformel:

$$f = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}} Wf(a, b) \psi_{\alpha b}(t) \frac{dad b}{a^2}.$$

- Zur Berechnung wird eine der Formel angepasste Diskretisierung der Indexmenge $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ benötigt. Als sinnvoll hat sich folgende Festlegung erwiesen:

$$\begin{aligned} a_r &= \sigma^r \quad \text{mit } \sigma = 2, r \in \mathbb{Z} \\ b_k &= k a_r \beta = k \sigma^r \beta \quad \text{mit } \beta > 0, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



Damit passt sich der Maßstab der Diskretisierung an die Breite der dilatierten Waveletfunktionen an.

- \implies Die entsprechenden, dazu passenden Waveletfunktionen sind selbstähnlich.
- \implies Multiskalenanalyse
- \implies Fast Wavelet Transform

\implies Weiter können Wavelets so konstruiert werden, dass

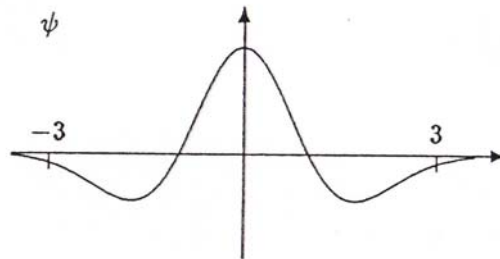
- sie einen kompakten Träger haben
- die Waveletfunktionen orthonormiert sind und
- schnelle Algorithmen zulassen.

Die Entwicklung dieser Theorie erfolgt in den 80er und 90er Jahren des 20. Jahrhunderts.

Beispiele für bekannte Mutterwavelets sind :

- das HAAR-Wavelet,
- der Mexikanerhut
- das MEYER-Wavelet
- das DAUBECHIES-Wavelet
- das BATTLE-LEMARIE-Wavelet.

Als Illustration sei hier der Mexikanerhut ψ angegeben:



Das Ziel der Vorlesung besteht in der Erhellung des mathematischen Hintergrundes als Basis für die Darstellung einfacher Anwendungen. Als Voraussetzungen werden dazu benötigt:

- Grundbegriffe der Funktionalanalysis,
- Theorie der Fouriertransformation,
- Eigenschaften des HAAR-Wavelets zur Verwendung als einfache Illustration.

2 Basiswissen zur Fourieranalysis

2.1 Fourierreihen

Wir betrachten

$$\mathbb{L}_2(\mathbb{R}/2\pi) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ messbar, } 2\pi\text{-periodisch, } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

mit dem Skalarprodukt $(f, g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$, und

der induzierten Norm $\|f\|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$.

Achtung: Das ist eine Menge von Äquivalenzklassen, die sich nur über Mengen vom Maße Null unterscheiden!

Bezüglich der Metrik $d(f, g) = \|f - g\|$ ist dieser Raum vollständig und damit ein Hilbertraum.

Wir benutzen das vollständige Orthonormalsystem:

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ikt) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Damit ergibt sich die formale Fourierreihe

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikt) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k, \quad \text{mit} \\ c_k &= (f, e_k) = \widehat{f}(k) \end{aligned}$$

Es gelten folgende Sätze:

Satz 2.1 RIEMANN-LEBESGUE-Lemma: $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} |c_k| = 0$.

Satz 2.2 PARSEVALsche Formel: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} = (f, g) \quad \forall f, g \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}/2\pi)$.

Speziell gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |(f, e_k)|^2 = \|f\|^2.$$

Satz 2.3 Die formale FR einer Funktion $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}/2\pi)$ konvergiert gegen f (im Sinne der \mathbb{L}_2 -Metrik).

Satz 2.4 CARLESON 1966

$$s_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e_k \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{f.\ddot{u}.a.} f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}/2\pi)$$

Definition 2.1 Variation $V(f) = \sup_T \sum_{k=1}^n |f(t_k) - f(t_{k-1})|$

über alle Zerlegungen $T: 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n = 2\pi$ des Intervalls $[0, 2\pi]$.

Satz 2.5 $f \in \mathbb{R}/2\pi$, stetig, $V(f) < \infty \implies s_N(t) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{glm.} f$

Satz 2.6 $f \in \mathbb{R}/2\pi$, $r \geq 0$, $f^{(r)}$ stetig, $V(f^{(r)}) = V < \infty$
 $\implies |c_k| \leq \frac{V}{2\pi|k|^{r+1}} \quad \forall k \neq 0$

D.h. je glatter die Funktion, umso schneller konvergieren die c_k betragsmäßig gegen Null für $|k| \rightarrow \infty$.

Satz 2.7 Gilt $c_k = O\left(\frac{1}{|k|^{r+1+\varepsilon}}\right)$, $|k| \rightarrow \infty$, für ein $\varepsilon > 0$

$\implies f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k$ ist mindestens r -mal stetig differenzierbar.

Satz 2.8 $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}/L) \quad \curvearrowright$

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt\frac{2\pi}{L}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k\left(t\frac{2\pi}{L}\right) \quad \text{mit}$$

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^T f(t) \exp\left(-ik\frac{2\pi}{L}t\right) dt = \left(f, e_k\left(t\frac{2\pi}{L}\right)\right),$$

und es gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{L} \int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

2.2 Fouriertransformation

Sei $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \|f\|_1 = I < \infty$.

Definition 2.2 *Fouriertransformierte (FT)*

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Satz 2.9 $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}) \implies \widehat{f}(\omega)$ ist stetig; $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |\widehat{f}(\omega)| = 0$

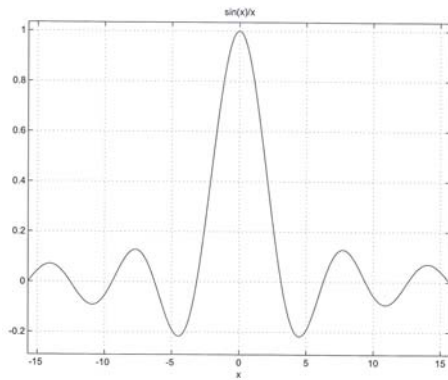
Die Fouriertransformation ist nötig für nichtperiodische Signale, denn zum Aufbau des Signals reichen bei nichtperiodischen Signalen die Grundfrequenz und ihre Vielfachen nicht aus. Es werden alle möglichen Frequenzen benötigt. In der Literatur werden die Vorfaktoren analog zur Fourierreihenentwicklung unterschiedlich gehandhabt.

Sei $\omega \in \mathbb{R}$, fest. Dann ist $\widehat{f}(\omega)$ die komplexe Amplitude, mit der die Schwingung e_{ω} in f vertreten ist.

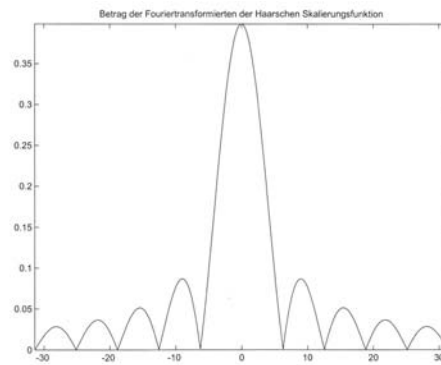
Beispiel 2.1 *HAARsche Skalierungsfunktion ($c = 1$):*

$$f(t) = \phi_c(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_c(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_c(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^c e^{-i\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}i\omega} [e^{-i\omega c} - 1] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}i\omega} e^{-i\omega c/2} [e^{i\omega c/2} - e^{-i\omega c/2}] \\ &= e^{-i\omega c/2} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\omega} \frac{e^{i\omega c/2} - e^{-i\omega c/2}}{2i} \\ &= e^{-i\omega c/2} \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\omega c} \sin\left(\frac{\omega c}{2}\right) \\ &= \frac{c}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega c/2} \operatorname{si}\left(\frac{\omega c}{2}\right) \end{aligned}$$



Spaltfunktion

Fouriertransformierte der HAARschen Skalierungsfunktion ($c = 1$)

Beispiel 2.2 GAUßsche Glockenkurve:

$$f(t) = N_{0,1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right)$$

Die FT der GAUßsche Glockenkurve ist wieder die GAUßsche Glockenkurve.

Wenn gilt $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, muss die FT nicht existieren:

Da $e_\omega \notin \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \rightsquigarrow \widehat{f}(\omega) \neq (f, e_\omega)$.

Beachtet man aber $\overline{\mathbb{X}} = \overline{\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2} = \mathbb{L}_2$, so kann die FT auf ganz $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden.

Satz 2.10 Formel von PARSEVAL-PLANCHEREL

$f, g \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \implies$ Die FT ist eine Isometrie, d.h. $(\widehat{f}, \widehat{g}) = (f, g)$, insbesondere gilt $\|\widehat{f}\|_{\mathbb{L}_2}^2 = \|f\|_{\mathbb{L}_2}^2$.

Bei Isometrien gilt: $(FT)^{-1} = (FT)^* \rightsquigarrow$

Satz 2.11 $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}), \widehat{f} \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ (schwächste Voraussetzungen) \rightsquigarrow

$$f(t) = (FT)^{-1} \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad f.\ddot{u}.a., \text{ speziell in den Stetigkeitspunkten}$$

D.h., das Ausgangssignal ist eine Linearkombination von reinen Schwingungen aller möglicher Frequenzen ω , die mit der Amplitude $\widehat{f}(\omega)$ in f vertreten sind.

Rechenregeln für die FT

$$1) \text{ Translation} \quad T_h f(t) = f(t - h)$$

$$\widehat{(T_h f)}(\omega) = e^{-i\omega h} \widehat{f}(\omega) \quad (R1)$$

$$\widehat{(e^{i\omega h} f)}(\omega) = \widehat{f}(\omega - h) \quad (R2)$$

$$2) \text{ Dilatation} \quad D_a f(t) = f\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$\widehat{(D_a f)}(\omega) = |a| D_{\frac{1}{a}} \widehat{f}(\omega) \quad (R3)$$

$$3) \text{ Faltung} \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t)g(t)dt$$

$$\widehat{(f * g)}(\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot \widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega)$$

$$4) \text{ Differentiation} \quad f(t), f'(t) \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$$

$$\widehat{f'}(\omega) = i\omega \widehat{f}(\omega) \quad (R4)$$

$$\widehat{(tf)}(\omega) = i \left(\widehat{f} \right)'(\omega) \quad (R5)$$

5) Die FT ist linear.

$$6) f \text{ ist reellwertig: } \overline{\widehat{f}(\omega)} = \widehat{f}(-\omega) \quad (R6)$$

Satz 2.12 $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$; $\int_{-\infty}^{\infty} |t|^r |f(t)| dt < \infty$ für $r \geq 1$

$\implies \widehat{f}(\omega)$ ist mindestens r -mal stetig differenzierbar, und es gilt

$$\left(\widehat{f} \right)^{(r)}(\omega) = (-i)^r \widehat{(t^r f)}(\omega).$$

2.3 Die HEISENBERG'sche Unschärferelation

Aus der Rechenregel (R3) der Fouriertransformation ergibt sich:

$$\widehat{(D_a f)}(\omega) = \widehat{f\left(\frac{t}{a}\right)} = |a| \widehat{f}(a\omega).$$

Eine Stauchung der Funktion f im Originalbereich entspricht also der Streckung von \widehat{f} im Bildbereich und einer damit einhergehenden Abflachung (betrachte z.B. $a = 0.5$). Das ist eine qualitative Aussagen zu dem Fakt, dass ein Zeitsignal f und seine Fouriertransformierte nicht gleichzeitig in einem kleinen Bereich der t -bzw. der ω -Achse lokalisiert sein können. Gesucht ist nun eine Quantifizierung dieses Sachverhaltes:

Satz 2.13 Sei $\psi \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \quad \curvearrowright \quad \|t\psi\| \cdot \|\omega\widehat{\psi}\| \geq \frac{1}{2} \|\psi\|^2$.

Satz 2.14 Sei $\psi \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}); t_0 \in \mathbb{R}; \omega_0 \in \mathbb{R} \quad \curvearrowright$

$$\|(t - t_0)\psi\| \cdot \|(\omega - \omega_0)\widehat{\psi}\| \geq \frac{1}{2} \|\psi\|^2.$$

(Beweise s. /1/, S. 45 - 46)

Interpretation:

Sei o.B.d.A. $\psi \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dt = 1 \\ &\stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X dt \end{aligned}$$

wobei $f_X = |\psi(t)|^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte (für die Größe X : „Signal ist wesentlich verschieden von Null“) interpretiert werden kann.

$$\|t\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\psi|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X dt = \sigma^2(X)$$

Das ist aber das zweite zentrale Moment, d.h. ein Maß für die Ausdehnung des Signals auf der t -Achse, der „Breite“ des Signals. Dabei bezieht sich die „Breite“ des Signals auf den Abstand zum Wert $t = 0$ bzw. $t = t_0$, d.h. den Erwartungswert. Die Ungleichungen aus den obigen beiden Sätzen lassen sich also interpretieren als:

$$\text{„Breite des Signals“} \cdot \text{„Breite des Spektrums“} \geq \frac{1}{2} \|\psi\|^2 = \frac{1}{2}.$$

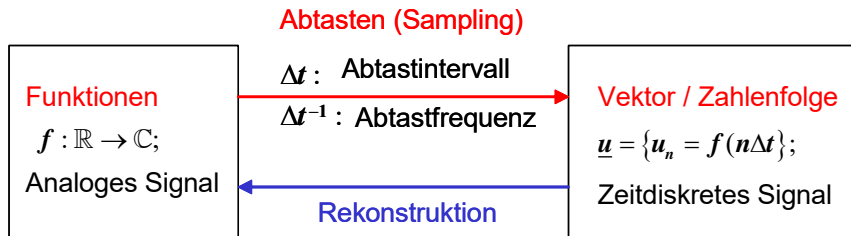
Beide „Breiten“ können folglich nicht gleichermaßen klein werden.

(Zusammenhang zur Physik:

$|\psi(t)|^2$: Wahrscheinlichkeitsdichte für den Ort eines Teilchens

$|\widehat{\psi}(\omega)|^2$: Wahrscheinlichkeitsdichte für den Impuls eines Teilchens und Einbettung in Hilbertraum)

2.4 Das Abtasttheorem (SHANNON)



Ist $f(t)$ T -periodisch, so kann f über eine diskrete Fourierreihendarstellung mit Hilfe der abgetasteten Werte $\underline{u} = \{u_0, \dots, u_{N-1}\}$ mit $T = N\Delta t$ dargestellt werden.

Ist $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, so entsteht beim Abtasten eine Zahlenfolge aus $\mathbb{I}_2 : \underline{u} = \{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2 < \infty$.

Satz 2.15 *Abtasttheorem von SHANNON:*

Es sei $\Delta t \leq \frac{\pi}{\Omega}$; $\hat{f}(\omega) = 0$ für $|\omega| > \Omega$, d.h. f ist Ω -bandbegrenzt, und es gilt $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ oder $f(t) = O\left(\frac{1}{|t|^{1+\varepsilon}}\right)$; $\varepsilon > 0$, dann folgt:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) \text{si}(\Omega(t - k\Delta t)); \quad t \in \mathbb{R}.$$

Diese Reihe heißt Kardinalreihe von f . Sie konvergiert gleichmäßig gegen f . (Beweis s. /1/ S. 48-49)

Bemerkung 2.1 Alle in der Spektralzerlegung von f auftretenden e_{ω} haben eine Schwingungsdauer $T \geq \frac{2\pi}{\Omega}$. Mit $\Delta t \leq \frac{\pi}{\Omega}$ sind damit alle harmonischen Anteile wenigstens zweimal pro Periode erfasst.

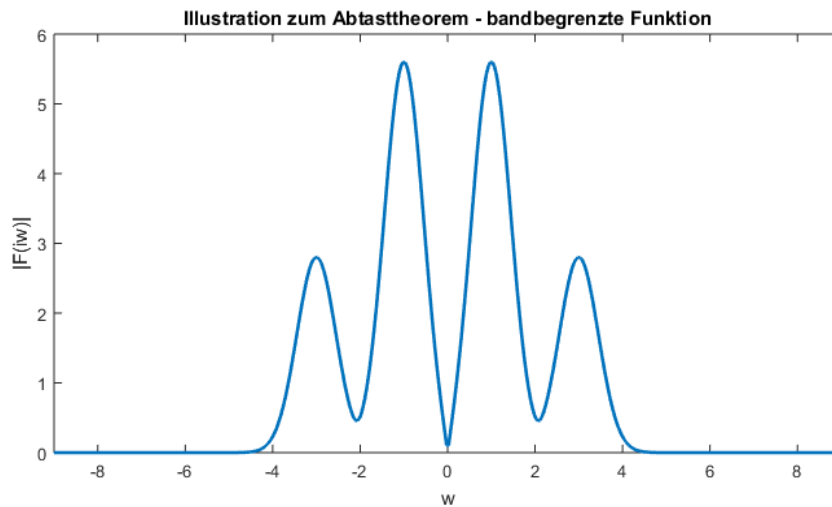
Bemerkung 2.2 $\Omega = \frac{\pi}{\Delta t}$ heißt NYQUIST-Frequenz zum gewählten Abtastintervall Δt .

Bemerkung 2.3 $\frac{1}{\Delta t} = \frac{\Omega}{\pi}$ gibt die Anzahl der Abtastungen pro Zeiteinheit an. Das ist die NYQUIST-Rate.

Beispiel 2.3 /3/ S. 254:

$$f(t) = \exp(-0.1t^2)(2 \sin t + \cos 3t)$$

Diese Funktion ist bandbegrenzt durch $\Omega = 2\pi \quad \curvearrowright \quad \Delta t \leq \frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$.



Wegen $|f(t)| < 10^{-4}$ für $|t| > 10$ wählen wir $-20 \leq k \leq 20$:



Bemerkung 2.4 Gegeben sei $(\Delta t)^{-1} \rightsquigarrow \Omega = \pi \cdot (\Delta t)^{-1}$

Gilt $\Omega < \Omega'$ (wahre Grenze), so werden höherfrequente Anteile, die zum Bereich $\Omega \leq \omega \leq \Omega'$ gehören, nicht herausgefiltert. Sie erscheinen frequenzverschoben.

\implies Aliasing durch „Undersampling“

Gilt $\Omega > \Omega'$ (wahre Grenze), so bringt dieses „Oversampling“ eine Konvergenzverbesserung bei der Rekonstruktion.

3 Das HAAR-Wavelet

3.1 Die HAARsche Basis

HAAR beschrieb bereits 1910 ein vollständiges ONS für den $L_2(\mathbb{R})$. Heute wird diese Basis als Menge von dilatierten und verschobenen Kopien eines Mutterwavelets beschrieben:

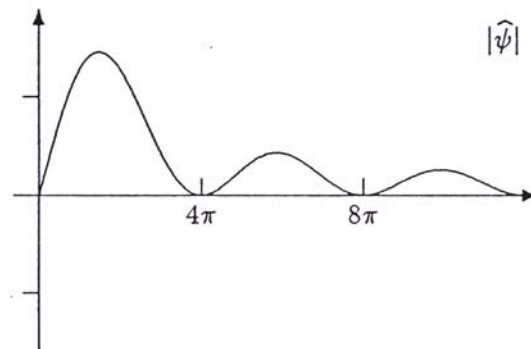
Definition 3.1 *HAAR-Wavelet*

$$\psi_H(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 0.5 \\ -1 & 0.5 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eigenschaften des HAAR-Wavelets:

- besitzt einen beschränkten Träger,
- (leider) unstetig, nicht differenzierbar,
- $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_H(t) dt = 0$; $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_H(t)|^2 dt = 1$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{0.5} e^{-i\omega t} dt - \int_{0.5}^1 e^{-i\omega t} dt \right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) \left(-\frac{1}{i\omega} \right) \left([e^{-i\omega t}]_0^{0.5} - [e^{-i\omega t}]_{0.5}^1 \right) \\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi\omega}} (e^{-i\omega/2} - 1 - e^{-i\omega} + e^{-i\omega/2}) \\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi\omega}} e^{-i\omega/2} (2 - e^{i\omega/2} - e^{-i\omega/2}) \\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi\omega}} e^{-i\omega/2} \left(2 - 2 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) \\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi\omega}} e^{-i\omega/2} \cdot 2 \left(2 \sin^2\left(\frac{\omega}{4}\right) \right) \\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega/2} \cdot \frac{4}{\omega} \sin^2\left(\frac{\omega}{4}\right) \\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega/2} \cdot \operatorname{si}\left(\frac{\omega}{4}\right) \sin\left(\frac{\omega}{4}\right) \\
|\widehat{\psi}(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4}{|\omega|} \sin^2\left(\frac{\omega}{4}\right).
\end{aligned}$$



- \curvearrowright Für $\omega \rightarrow \infty$ nimmt $|\widehat{\psi}(\omega)|$ ab wie $\frac{1}{|\omega|}$.

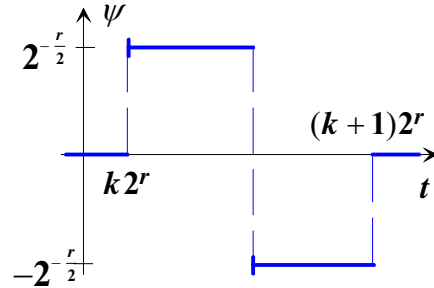
$\widehat{\psi}(\omega)$ ist eine gerade Funktion.

Das Maximum von $|\widehat{\psi}(\omega)|$ wird bei $\omega_0 = 4.6622$ angenommen. $1/|\omega| \curvearrowright \widehat{\psi}(\omega)$ ist relativ gut lokalisiert bei ω_0 .

Definition 3.2 Waveletfunktionen zum HAAR-Wavelet:

$$\psi_{r,k}(t) = 2^{-\frac{r}{2}} \psi_H \left(\frac{t - k2^r}{2^r} \right)$$

$$= 2^{-\frac{r}{2}} \cdot \begin{cases} 1 & 0 \leq \frac{t - k2^r}{2^r} < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq \frac{t - k2^r}{2^r} < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

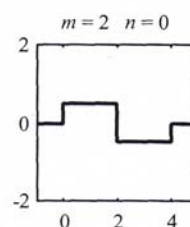
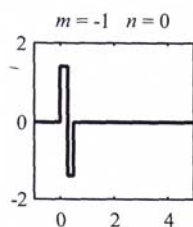
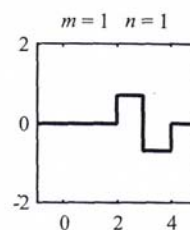
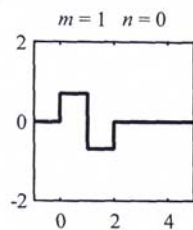
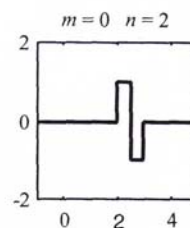
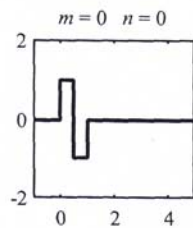


Berechnung des Trägers:

$$0 \leq t - k2^r \leq \frac{1}{2}2^r \implies k2^r \leq t \leq (k + \frac{1}{2})2^r$$

$$\frac{1}{2}2^r \leq t - k2^r \leq 2^r \implies (k + \frac{1}{2})2^r \leq t \leq (k + 1)2^r$$

Beispiel zu Waveletfunktionen:



Eigenschaften der Waveletfunktionen:

- Sie besitzen einen beschränkten Träger.
- Zu größeren r gehören längere Trägerintervalle, d.h. „langwelligere“ Waveletfunktionen.
- k regelt die Lage des Trägerintervalls auf der t -Achse.
- $\|\psi_{rk}(t)\|^2 = 1$ (Nachweis: HA)

Satz 3.1 $\psi_{rk}(t)$ bilden eine ONB von $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.

Beweis:

1a) $\|\psi_{rk}(t)\|^2 = 1$ (s. oben, Eigenschaften der $\psi_{rk}(t)$)

1b) zu zeigen $(\psi_{rk}, \psi_{sl}) = 0$ für $\overline{(r = s \wedge k = l)}$ d.h. $r \neq s \vee k \neq l$

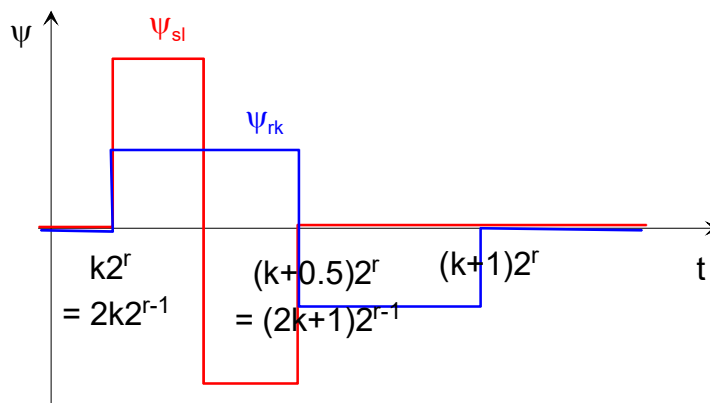
Fall 1: Betrachte ψ_{rk} und ψ_{rl} mit $k \neq l$:

$$\begin{aligned} \text{supp } \psi_{rk} \cap \text{supp } \psi_{rl} &= [k2^r; (k+1)2^r) \cap [l2^r; (l+1)2^r) = \emptyset \\ \implies (\psi_{rk}, \psi_{rl}) &= 0 \text{ für } k \neq l \end{aligned}$$

Fall 2: Betrachte ψ_{rk} und ψ_{sl} ; o.B.d.A. sei $s < r$

$$\text{supp } \psi_{rk} = [k2^r; (k+1)2^r); \quad \text{supp } \psi_{sl} = [l2^s; (l+1)2^s)$$

Vielfache unterschiedlicher Potenzen von 2, die sich im Faktor nur um „1“ unterscheiden, liegen immer im „halben Vielfachen“ der höheren Potenz:



$$\implies (\psi_{rk}, \psi_{sl}) = 0 \text{ für } s \neq r \quad \forall k, l$$

2) Konstruktion der Basis mittels Induktion

- Sei $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$; $n \in \mathbb{N}$.
- Betrachten die Treppennäherung $T_{-n}f$ der Stufenbreite 2^{-n} von f .
- $T_{-n}f$ hat auf allen Intervallen $I_{-n,k} = [k2^{-n}; (k+1)2^{-n})$ den konstanten Wert

$$f_{-n,k} = 2^n \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} f(t) dt = MW_{-n,k}$$

Das ist aber der Mittelwert von f auf $I_{-n,k}$.

- Wenn n hinreichend groß ist, so kann $T_{-n}f$ die Funktion f beliebig genau annähern (Beweis s. Analysis, 1. Semester)
- Zu zeigen ist, dass f durch endliche Linearkombinationen der $\psi_{r,k}$ im Sinne der \mathbb{L}_2 -Metrik beliebig genau approximierbar ist.
- Wegen der Approximation von Funktionen aus $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ durch Treppenfunktionen, genügt es, anstelle von beliebigen $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ eine Funktion f folgender Art zu betrachten:

$$\exists m, n \quad | \quad f(t) \equiv 0 \quad \text{für } |t| \geq 2^m$$

$$\wedge f(t) \text{ ist Treppenfunktion, konstant auf } I_{-n,k}$$

- Beweisidee:
 - a) Konstruiere induktiv eine Folge von Waveletpolynomen

$$\{\psi_r\}_{r \geq -n} \quad \text{mit} \quad \psi_r = \sum_{j=-n+1}^r \left(\sum_k c_{jk} \psi_{jk} \right)$$

b) Beginne bei den feinsten, d.h. kurzweiligsten Details der Länge 2^{-n+1}

c) Verdopple die Intervalllänge des Definitionsgebietes. Suche Details dieser Länge, solange bis die Intervalllänge 2^m überschreitet und der Rest $f_r \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$.

- Ansatz:

$$\begin{aligned} f &= \psi_r + f_r \\ f_r &= \text{const.} \\ &= f_{rk} = 2^{-r} \int_{I_{rk}} f(t) dt = MW_{r,k} \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$$\text{auf dem Intervall } I_{rk} = [k2^r; (k+1)2^r)$$

Induktionsanfang:

$$r = -n : \quad \psi_{-n} = 0; \quad f_{-n} = f$$

Induktionsannahme:

$$f = \psi_r + f_r \text{ gilt für Index } r$$

Induktionsschritt:

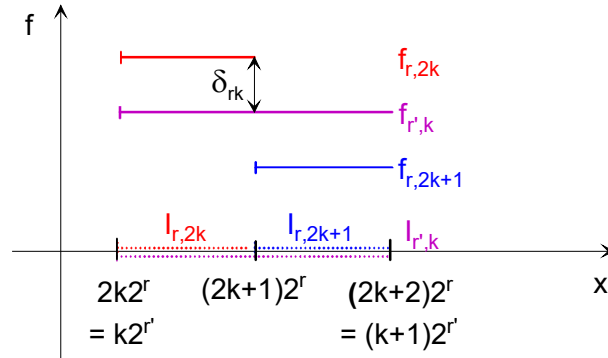
$$r' = r + 1$$

Bilde:

$$\delta_{r',k} = \frac{1}{2} (f_{r,2k} - f_{r,2k+1})$$

$$f_{r',k} = \frac{1}{2} (f_{r,2k} + f_{r,2k+1})$$

$$c_{r',k} = 2^{r'/2} \delta_{r',k}$$



Wie aus der Abbildung zu ersehen ist, bezeichnen dabei $\delta_{r',k}$ die halbe Sprunghöhe und $f_{r',k}$ den neuen Mittelwert über dem verdoppelten Intervall.

$$f_{I_{r',k}} = \begin{cases} f_{r,2k} & t \in I_{r,2k} \\ f_{r,2k+1} & t \in I_{r,2k+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = f_{r',k} + 2^{+\frac{r'}{2}} \delta_{r',k} \cdot \psi_{r',k} \quad \text{mit}$$

$$\psi_{r',k} = 2^{-\frac{r'}{2}} \begin{cases} +1 & t \in I_{r,2k} \\ -1 & t \in I_{r,2k+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

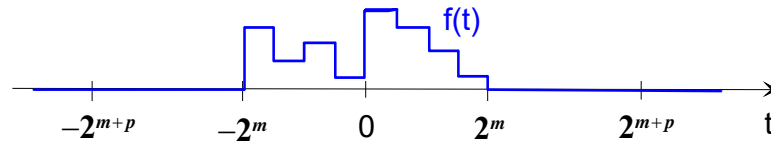
Entsprechend Induktionsannahme gilt:

$$\begin{aligned} f &= \psi_r + f_r \\ &= \psi_r + \sum_k (c_{r',k} \psi_{r',k} + f_{r',k}) \\ &= \psi_{r'} + f_{r'} \end{aligned}$$

- Nach $n + m$ Schritten gilt:

$$f = \psi_{-n+n+m} + f_m = \sum_{j=-n+1}^m \left(\sum_k c_{jk} \psi_{jk} \right) + f_m$$

f_m ist dabei konstant in Intervallen $I_{m,k} = [k2^m; (k+1)2^m)$ der Länge 2^m .



Höchstens die Größen A und B sind dann noch ungleich Null:

$$\begin{aligned} A &= f_{m,-1} = MW_{m,-1} \neq 0 \text{ auf } I_{m,-1} = [-2^m; 0) \\ B &= f_{m,0} = MW_{m,0} \neq 0 \text{ auf } I_{m,0} = [0; 2^m). \end{aligned}$$

Die Fortsetzung des Verfahrens in weiteren p Schritten liefert für den Rest:

$$f_m = \sum_{j=m+1}^{m+p} \left(\sum_k c_{jk} \psi_{jk} \right) + f_{m+p},$$

wobei gilt $f_{m+p} = \text{const.}$ auf $[-2^{m+p}; 0)$ bzw. $[0; 2^{m+p})$. Sonst ist $f_{m+p} = 0$.
Wegen der Mittelwertbildung folgt: $f_{m+p,-1} = 2^{-p}A$ bzw. $f_{m+p,0} = 2^{-p}B$. \curvearrowright

$$\begin{aligned} \|f_{m+p}\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f_{m+p}(t)|^2 dt \\ &= 2^{m+p} \left((2^{-p}A)^2 + (2^{-p}B)^2 \right) \\ \|f_{m+p}\| &= \|f - \psi_{m+p}\| \\ &= \sqrt{2^{m-p}(A^2 + B^2)} \\ &= C \cdot 2^{-\frac{p}{2}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

■

3.2 Die schnelle HAAR-Transformation

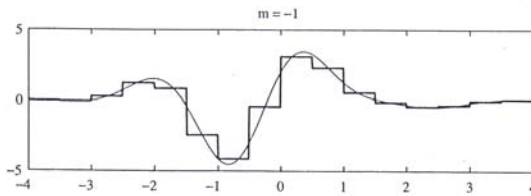
Die ONB aus HAARwaveletfunktionen gestattet es, jede Funktion $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ darzustellen als:

$$f \simeq \sum_{r=r_0+1}^{r_1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{rk} \psi_{rk}.$$

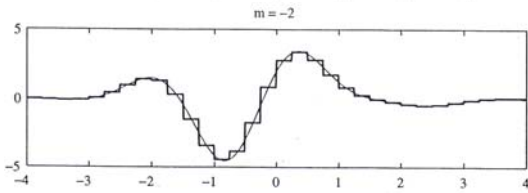
Aus der Approximationstheorie folgt dann

$$\begin{aligned} c_{rk} &= (f, \psi_{rk}) = \int_{k2^r}^{(k+1)2^r} f \psi_{rk} dt \\ &= 2^{-\frac{r}{2}} \left[\int_{k2^r}^{(k+0.5)2^r} f(t) dt - \int_{(k+0.5)2^r}^{(k+1)2^r} f(t) dt \right]. \end{aligned}$$

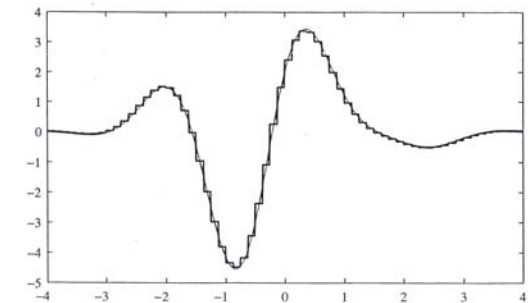
Beispiel 3.1 $f(t) = e^{-0.3t^2} (4 \sin(2t) + 2 \cos(3t))$; $D_f = [-4; 4] / 3/$
 In der obigen Formel werden $-2 \leq r \leq 6$ und k so gewählt, dass $\psi_{rk} \neq 0$ in D_f . Damit müssen 70 Koeffizienten c_{rk} mittels numerischer Integration berechnet werden! Das ist für das mäßige Ergebnis viel zu viel Aufwand.



Treppenapproximation $T_{-1}f$



Treppenapproximation $T_{-2}f$



Approximation von f als Linearkombination von Waveletfunktionen

Der Beweis von Satz 4.3.1 liefert aber einen schnellen Algorithmus:

- **Schlüsselfunktion** haben die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} f_{r+1,k} &= \frac{1}{2} (f_{r,2k} + f_{r,2k+1}) \\ c_{r+1,k} &= 2^{\frac{r+1}{2}} \frac{1}{2} (f_{r,2k} - f_{r,2k+1}) \end{aligned} \right\} (3.2.1)$$

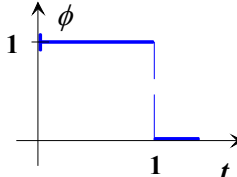
- Mit den **Startwerten**

$$f_{r_0,k} \approx f((k+0.5)2^{r_0}),$$

die für hinreichend glatte f und genügend kleine r_0 als Treppenfunktionswerte im Intervall $I_{r_0,k} = [k2^{r_0}; (k+1)2^{r_0})$ interpretiert werden können, ergibt eine

- **Rekursion** nach (3.2.1) die Werte von $c_{r,k}$ ohne Integration.
- **Aufwand:** $N = 2 \cdot 2^r \cdot 2^k$ Eingangsdaten, Abbruch nach $r+k$ Schritten
Im 1. Schritt gibt es $\frac{N}{2}$ Intervallpaare, und pro Paar erfolgen 2 Additionen.
In jedem weiteren Schritt halbiert sich die Anzahl der Intervallpaare.
 \curvearrowright $Aufwand = 2 \cdot \frac{N}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots) = 2N$ Additionen
- Der Algorithmus nach (3.2.1.) ist damit extrem schnell, aber wegen der Unsymmetrie in den Vorfaktoren nicht günstig für die Rücktransformation.

Deshalb wird eine **Verbesserung mittels der Skalierungsfunktion** angestrebt. Diese liefert, ausgehend von der HAARschen Skalierungsfunktion

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$


eine andere Familie von Basisfunktionen:

$$\phi_{rk}(t) = 2^{-\frac{r}{2}} \phi(2^{-r}t - k), \quad k, r \in \mathbb{Z}.$$

mit dem Träger:

$$0 \leq 2^{-r}t - k \leq 1 \quad \implies \quad k2^r \leq t \leq (k+1)2^r.$$

$$\|\phi_{rk}(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{rk}(t)|^2 dt = \int_{k2^r}^{(k+1)2^r} (2^{-\frac{r}{2}})^2 dt = 2^{-r} \cdot 2^r = 1$$

Sei r fest. Dann sind die Träger von ψ_{rk} mit $k \in \mathbb{Z}$ disjunkt und die Funktionen ψ_{rk} bilden eine ONB des $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.

\curvearrowright

$$\begin{aligned} T_r f &= \sum_k u_{rk} \phi_{rk} \quad \text{mit} \\ u_{rk} &= (f, \phi_{rk}) = \int_{k2^r}^{(k+1)2^r} f \cdot 2^{-\frac{r}{2}} dt \\ &= 2^{\frac{r}{2}} \cdot 2^{-r} \int_{k2^r}^{(k+1)2^r} f(t) dt \\ &= 2^{\frac{r}{2}} \cdot f_{rk} \quad (\text{nach (3.1.1.)}) \end{aligned}$$

Einsetzen in die Formeln (3.2.1) führt zu

$$\begin{aligned} f_{r+1,k} &= \frac{1}{2} (f_{r,2k} + f_{r,2k+1}) \\ 2^{-\frac{r+1}{2}} u_{r+1,k} &= \frac{1}{2} (2^{-\frac{r}{2}} u_{r,2k} + 2^{-\frac{r}{2}} u_{r,2k+1}) \\ u_{r+1,k} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (u_{r,2k} + u_{r,2k+1}) \quad (3.2.2.a) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} c_{r+1,k} &= 2^{\frac{r+1}{2}} \frac{1}{2} (f_{r,2k} - f_{r,2k+1}) \\ &= 2^{\frac{r+1}{2}} \frac{1}{2} 2^{-\frac{r}{2}} (u_{r,2k} - u_{r,2k+1}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (u_{r,2k} - u_{r,2k+1}) \quad (3.2.2.b) \end{aligned}$$

Die Berechnungsgleichungen (3.2.2) sind nun symmetrisch. Der Algorithmus verläuft analog zu (3.2.1) mit den Startwerten

$$u_{r_0,k} = 2^{\frac{r}{2}} \cdot f_{r_0,k} \approx 2^{\frac{r}{2}} \cdot f((k + 0.5)2^{r_0})$$

und endet bei $r = M$.

Rücktransformation:

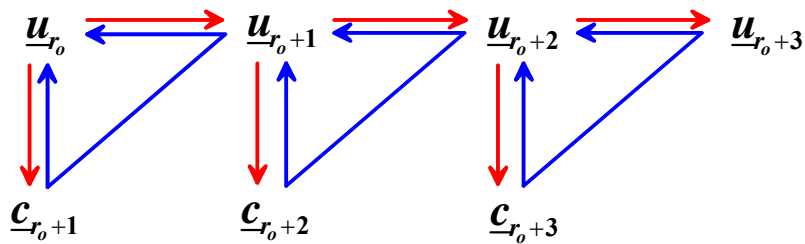
$$\begin{aligned} u_{r+1,k} + c_{r+1,k} &= \frac{\sqrt{2}}{2} u_{r,2k} \cdot 2 \\ u_{r+1,k} - c_{r+1,k} &= \frac{\sqrt{2}}{2} u_{r,2k+1} \cdot 2 \end{aligned}$$

↷

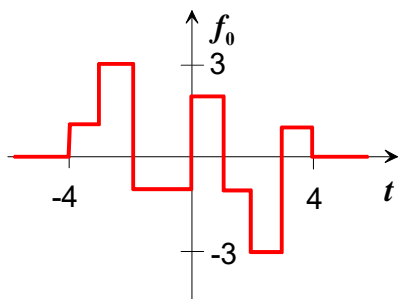
$$\left. \begin{aligned} u_{r,2k} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (u_{r+1,k} + c_{r+1,k}) \\ u_{r,2k+1} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (u_{r+1,k} - c_{r+1,k}) \end{aligned} \right\} (3.2.3)$$

- Die Startwerte für die Rücktransformation sind \underline{u}_M und \underline{c}_M .
- Nach Abschluss der Rechnung liegen die Werte $f_{r_0,k} = 2^{-r_0/2} \cdot u_{r_0,k}$ vor, d.h. eine Treppenapproximation von f .
- Der Aufwand ist derselbe wie bei der Hintransformation.

Der Algorithmus insgesamt hat eine einfache Baumstruktur:



Beispiel 3.2

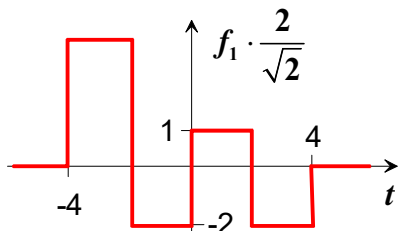


$$r_0 = 0,$$

$$u_0 = f_0 = (\dots, 0, 1, 3, -1, -1, 2, -1, -3, 1, 0, \dots)$$

$$k = -4, \dots, 0, \dots, 3$$

mit (3.2.2) ergibt sich:



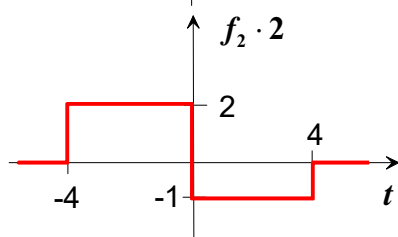
$$r = 1$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\dots, 0, -2, 0, 3, -4, 0, \dots)$$

$$u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\dots, 0, 4, -2, 1, -2, 0, \dots)$$

$$k = -2, \dots, 0, 1$$

mit (3.2.2) ergibt sich weiter:



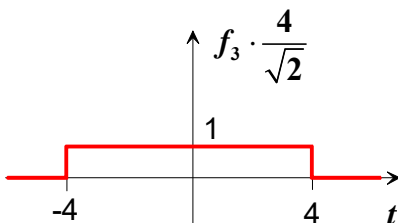
$$r = 2$$

$$c_2 = \frac{1}{2} (\dots, 0, 6, 3, 0, \dots)$$

$$u_2 = \frac{1}{2} (\dots, 0, 2, -1, 0, \dots)$$

$$k = -1, 0$$

mit (3.2.2) ergibt sich weiter:



$$\left[\begin{array}{l} c_3 = \frac{\sqrt{2}}{4} (\dots, 0, 3, 0, \dots) \\ u_3 = \frac{\sqrt{2}}{4} (\dots, 0, 1, 0, \dots) \end{array} \right]$$

Da aber kein ψ -Fktnen. mehr dahinter stehen, ist der obige Rest zu verwenden!

$$\begin{aligned} T_0 f &= -\frac{2}{\sqrt{2}}\psi_{1,-2} + \frac{3}{\sqrt{2}}\psi_{1,0} - \frac{4}{\sqrt{2}}\psi_{1,1} + \\ &\quad + 3\psi_{2,-1} + \frac{3}{2}\psi_{2,0} + \\ &\quad + 1\phi_{2,-1} - \frac{1}{2}\phi_{2,0} \\ &= \text{Waveletpolynom aus } c_1 \text{ und } c_2 + \text{Rest aus } u_2. \end{aligned}$$

4 Die kontinuierliche Wavelettransformation

4.1 Wavelets - Definition und Eigenschaften

Definition 4.1 Es sei ψ eine Abbildung von \mathbb{R} nach \mathbb{C} mit

$$1. \quad \psi \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}); \quad \|\psi\| = 1 \quad (4.1.1) \quad \text{und}$$

$$2. \quad 0 < c_\psi = 2\pi \int_{\mathbb{R}^{(*)}} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (4.1.2).$$

Dann heißt ψ (Mutter-) Wavelet.

- (4.1.1) und (4.1.2) sind minimale Forderungen.
- Alle praktisch vorkommenden Wavelets ψ sind Elemente von $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$.

Satz 4.1 Es sei $\psi(t) \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}); \quad t\psi \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}); \quad \curvearrowright$
(4.1.2) $\iff \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0 \iff \widehat{\psi}(0) = 0 \quad (4.1.3).$

Satz 4.2 Gegeben sei eine k -fach differenzierbare Funktion $\phi; \quad k \geq 1$ mit $\phi^{(k)} \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}); \quad \phi^{(k)} \neq 0; \implies \psi(\omega) = \phi^{(k)}(\omega)$ ist nach Normierung ein Wavelet.

Satz 4.3 Es sei $\psi \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}); \quad \|\psi\| = 1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0; \quad \psi$ hat einen kompakten Träger. Dann ist ψ ein Wavelet.

Satz 4.4 Es sei $0 \neq \psi \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}_1(\mathbb{R}); \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0; \quad$ Weiterhin existiere eine Zahl $\beta > 0.5 \quad | \quad \int_{\mathbb{R}} |t|^\beta |\psi(t)|dt = k < \infty.$ Dann ist ψ ein Wavelet.

Satz 4.5 Die Menge aller Wavelets $\Psi = \{\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad | \quad (4.1.1), (4.1.2)\}$ ist dicht in $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.

(Beweise zu diesen Sätzen s. /2/)

Beispiel 4.1 HAAR-Wavelet:

$$\psi_H(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 0.5 \\ -1 & 0.5 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\psi_H \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, da $\int_0^1 1 dt = 1 < \infty$. Damit ist Bedingung (4.1.1) der Definition erfüllt.
 $t\psi_H \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$, da

$$\int_0^{0.5} t dt - \int_{0.5}^1 t dt = -\frac{1}{4}.$$

Weiter gilt: $\psi_H = \phi_{0.5} - \phi_{0.5}(t - 0.5) \quad \curvearrowright$

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_H &= \widehat{\phi}_{0.5} - e^{-i\omega/2} \widehat{\phi}_{0.5} \\ &= \frac{e^{-i\omega/4}}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{si}\left(\frac{\omega}{4}\right) [1 - e^{-i\omega/2}] \\ &= \frac{ie^{-i\omega/4}}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{si}\left(\frac{\omega}{4}\right) e^{-i\omega/4} \left[\frac{e^{i\omega/4} - e^{-i\omega/4}}{2i} \right] \\ &= \frac{ie^{-i\omega/2}}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{si}\left(\frac{\omega}{4}\right) \sin\left(\frac{\omega}{4}\right). \end{aligned}$$

$\implies \widehat{\psi}_H(0) = 0$ und die Voraussetzungen für Satz 4.1 sind erfüllt. Damit ist ψ_H ein Wavelet nach Definition. Es gilt $c_\psi = 2 \ln 2$ (/2/, S. 17).

Beispiel 4.2 Modulierte GAUßfunktion:

Wähle eine Basisfrequenz, z.B. $\omega = 5$.

$\chi(t) = e^{i\omega t} e^{-t^2/2}$ ist kein Wavelet wegen $\widehat{\chi}(0) \neq 0$. \curvearrowright Ansatz:

$$\psi(t) = (e^{i\omega t} - A)e^{-t^2/2}$$

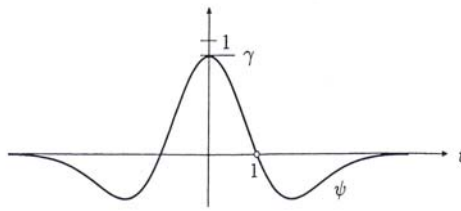
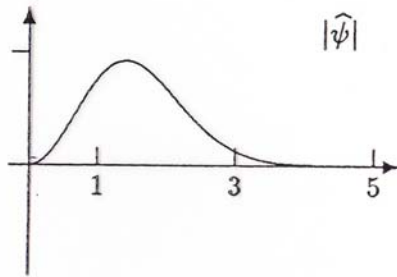
Nach (R2) und (R1) folgt dann

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(\xi) &= \exp\left(-\frac{(\xi - \omega)^2}{2}\right) - A \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \\ \widehat{\psi}(0) &= \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right) - A \stackrel{!}{=} 0 \quad \curvearrowright \quad A = \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Die daraus resultierende Funktion

$$\psi(t) = \left(\exp(i\omega t) - \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right)\right) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

kann mit einer Normierung ein Wavelet werden.

Beispiel 4.3 *Mexikanerhut**Mexikanerhut und seine**Fouriertransformierte*

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt[4]{\pi} (1-t^2) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = \gamma (1-t^2) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

$$\psi(t) = -\gamma g''(t) \quad \text{mit} \quad g(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

Damit $\psi(t)$ nach Satz 4.2 ein Wavelet ist, reicht es, noch zu zeigen: $g(t), g''(t) \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$
Es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2) dt = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{\mathbb{R}} (1-t^2)^2 \exp(-t^2) dt = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$$

4.2 Die kontinuierliche Wavelettransformation

Definition 4.2 Sei ψ ein fest gewähltes Wavelet. Dann heißt

$$Wf(a, b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \frac{1}{|a|^{0.5}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad (4.2.1)$$

für $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, $a \neq 0$ Wavelettransformierte von f bzgl. ψ .

- $D_{Wf} = \mathbb{R}_-^2 = \{(a, b)^T \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$

- Wavelettransformierte beziehen sich immer auf ein konkretes ψ .
- Sei $a \neq 0 \rightsquigarrow \psi_a(t) = \frac{1}{|a|^{0.5}} \psi\left(\frac{t}{a}\right)$.
Das entspricht einer mit $|a|$ gestreckten ($|a| > 1$) oder gestauchten ($|a| < 1$) bzw. bei $a < 0$ an der ψ -Achse gespiegelten und renormierten Funktion, denn

$$\int_{\mathbb{R}} |\psi_a(t)|^2 dt = \frac{1}{|a|} \int_{\mathbb{R}} \left| \psi\left(\frac{t}{a}\right) \right|^2 dt = \frac{1}{|a|} \int_{\mathbb{R}} |\psi(z)|^2 |a| dz = 1.$$

- Eine Verschiebung von ψ_a um $b > 0$ nach rechts ergibt:

$$\psi_{a,b}(t) = \psi_a(t-b) = \frac{1}{|a|^{0.5}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

mit $\|\psi_{a,b}\| = 1$.

- \rightsquigarrow

$$Wf(a,b) = (f, \psi_{a,b}) \cdot \frac{1}{\sqrt{c_\psi}}$$

$$|Wf(a,b)| \stackrel{\text{Schwarz}}{\leq} \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \|f\| \cdot \|\psi_{a,b}\| = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \|f\| \quad \forall (a,b)^T \in \mathbb{R}_-^2$$

Beispiel 4.4 HAAR-Wavelet: $a > 0$

$$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \frac{t-b}{a} < 0.5 & \rightsquigarrow b \leq t \leq b + \frac{a}{2} \\ -1 & 0.5 \leq \frac{t-b}{a} < 1 & \rightsquigarrow b + \frac{a}{2} \leq t \leq b + a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

\rightsquigarrow

$$Wf(a,b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \frac{1}{|a|^{0.5}} \left[\int_b^{b+a/2} f(t) dt - \int_{b+a/2}^{b+a} f(t) dt \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \frac{|a|^{0.5}}{2} \left[\frac{2}{a} \int_b^{b+a/2} f(t) dt - \frac{2}{a} \int_{b+a/2}^{b+a} f(t) dt \right]$$

Interpretation:

Das entspricht der Differenz von zwei Mittelwerten der Funktion f über zwei benachbarte Intervalle der Länge $\frac{a}{2}$ um $(b + \frac{a}{2})$. Normierungsfaktor, d.h. es entspricht einer „gleitenden Differenz“. (s. Digitalfilter in /3/ S. 29)

Beispiel 4.5 Analyse mit dem Mexikanerhut von

$$f(t) = 2.883f_1(t) + 1.205f_2(t) + 0.968f_3(t)$$

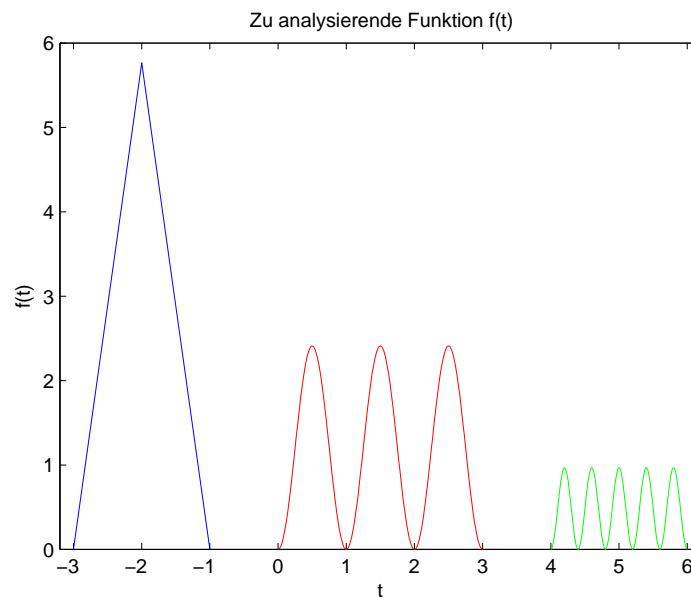
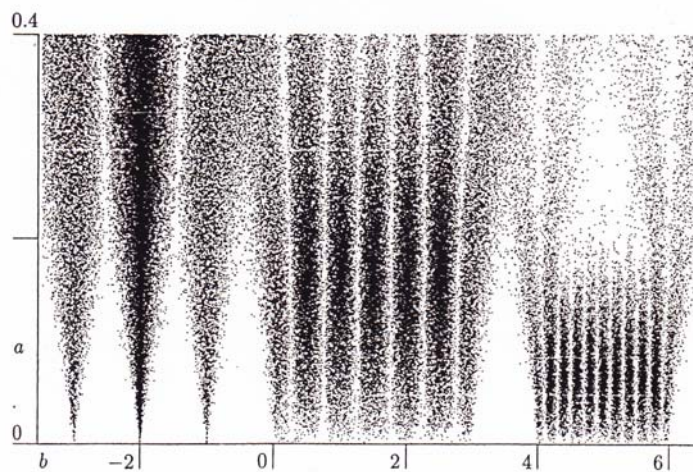
$$f_1(t) = 2 - 2|t - 2| \quad \text{für} \quad -3 \leq t \leq -1$$

$$f_2(t) = 1 - \cos(2\pi t) \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq 3$$

$$f_3(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(5\pi t)) \quad \text{für} \quad 4 \leq t \leq 6$$

$$f_i(t) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{sonst}$$

nach [1], S. 60ff. Versuch einer Grauwertdarstellung der Wavelettransformierten:



- $Wf : \mathbb{R}_-^2 \rightarrow \mathbb{C}^1$: Für eine Umkehrformel der Wavelettransformation ist ein Skalarprodukt für Funktionen $u : \mathbb{R}_-^2 \rightarrow \mathbb{C}^1$ erforderlich.
- Dazu wird ein Maß auf $\mathbb{R}_-^2 = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ benötigt.
- Wegen der „Nichtgleichberechtigung“ der beiden Variablen a und b ist das LEBESGUE-Maß $d\mu = dadb$ ungeeignet: $(a, b)^T \in \mathbb{R}_-^2$ definiert eine affine Streckung $S_{a,b}(\tau) : a\tau + b = t$, wobei $|a|$ verantwortlich ist für die Streckung und b nur für die Verschiebung.
- Deshalb wird das HAARSche Maß $d\mu = \frac{1}{a^2} dadb$ verwendet.

- Weiter wird der dazu passende Hilbertraum $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2(\mathbb{R}_-^2, d\mu)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{\mathbb{H}} = \int_{\mathbb{R}_-^2} u(a, b) \overline{v(a, b)} \frac{1}{a^2} dadb$$

ausgewählt. Dieser Hilbertraum entspricht einem gewichteten Hilbertraum (Bedeutung bei gruppentheoretischer Betrachtung).

- Das Ziel besteht nun darin, den Umkehroperator zu $Wf(a, b)$ zu bestimmen. Der Weg dazu führt über den Nachweis, dass die Wavelettransformation eine Isometrie ist. Denn dann gilt: $Wf^{-1} = Wf^*$.

Satz 4.6 Die Wavelettransformation zum Wavelet $\psi : \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{L}_2(\mathbb{R}_-^2, d\mu) = \mathbb{H}$ ist eine Isometrie.

Beweis:

Wegen $\psi \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \implies \psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right) \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \implies Wf$ ist wohldefiniert.

$$\begin{aligned} \|Wf(a, b)\|_{\mathbb{H}}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^*} |Wf(a, b)|^2 \frac{1}{a^2} dadb \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^*} \left| \widehat{Wf(a, b)} \right|^2 \frac{1}{a^2} dadb \quad (\text{Satz 2.10 bzgl. } b) \end{aligned}$$

Berechnung von $\widehat{Wf}(a, b)$ über $Wf(a, b)$:

$$\begin{aligned}
 Wf(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \frac{1}{|a|^{0.5}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t}{a} - \frac{b}{a}\right)} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{c_\psi |a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{b}{-a} - \frac{t}{-a}\right)} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{c_\psi |a|}} \left(f * \overline{\psi\left(\frac{\cdot}{-a}\right)} \right) b \\
 &= \frac{1}{\sqrt{c_\psi |a|}} (f * \overline{D_{-a}\psi}) b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \widehat{Wf}(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{c_\psi |a|}} \sqrt{2\pi} \left[\widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{D_{-a}\psi} \right]_b \quad (\text{Faltung}) \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{c_\psi |a|}} \left[\widehat{f}(\omega) |a| D_{\frac{1}{-a}} \widehat{\psi} \right]_b \quad (R3) \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi} |a|}{\sqrt{c_\psi |a|}} \left[\widehat{f}(\omega) \widehat{\psi} \left(\frac{\omega}{\frac{1}{-a}} \right) \right]_b \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi} |a|}{\sqrt{c_\psi}} \left[\widehat{f}(\omega) \widehat{\psi}(-a\omega) \right]_b \quad (R6)
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\|Wf(a, b)\|_{\mathbb{H}}^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^*} \frac{2\pi |a|}{c_\psi} \left| \widehat{\psi}(ab) \right|^2 \left| \widehat{f}(b) \right|^2 \frac{1}{a^2} da db$$

Mit der Koordinatentransformation $r = a|b|$; $dr = |b|da$, dem Aufspalten des Integrals in 2 Summanden, der Berechnung und anschließendem Zusammenfassen zu einem Integral erhält man nun:

$$\begin{aligned}
 \|Wf(a, b)\|_{\mathbb{H}}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^*} \frac{2\pi |r|}{c_\psi |b|} \left| \widehat{\psi}(r) \right|^2 \left| \widehat{f}(b) \right|^2 \frac{|b|^2}{|r|^2 |b|} dr db \\
 &= \frac{1}{c_\psi} \cdot \int_{\mathbb{R}^*} 2\pi \left| \widehat{\psi}(r) \right|^2 \frac{dr}{|r|} \cdot \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{f}(b) \right|^2 db \\
 &= \frac{1}{c_\psi} \cdot c_\psi \cdot \|f\|_{L_2}^2
 \end{aligned}$$

■

Die Inversion entspricht nun der adjungierten Abbildung W^* auf dem Bildbereich (/2/, S. 52). Entsprechend deren Definition gilt:

$$\begin{aligned}
(f, W^*g)_{\mathbb{L}_2} &= (Wf, g)_{\mathbb{L}_2(\mathbb{R}_+^2, d\mu)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^*} Wf(a, b) \overline{g(a, b)} \frac{1}{a^2} da db \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^*} \left(\frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{|a|}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \right) \overline{g(a, b)} \frac{1}{a^2} da db \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t) \left[\frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^*} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} \overline{g(a, b)} \frac{1}{a^2} da db \right] dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t) [\overline{W^*g}] dt
\end{aligned}$$

↪

$$f = W^*(Wf) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^*} \frac{1}{\sqrt{|a|}} Wf(a, b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{1}{a^2} da db \quad (4.2.2)$$

- Eine andere Verteilung der Vorfaktoren ist möglich (s. Fouriertransformation) In /1/ wird z.B. bei der Hintransformation mit dem Faktor 1 und bei der Rücktransformation mit dem Faktor c_ψ gearbeitet. Allerdings geht dann die Eigenschaft der Isometrie verloren und damit die einfache Möglichkeit der Bestimmung von Wf^{-1} .
- Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge in den obigen Herleitungen ist wegen der uneigentlichen Integrale heikel.
- Es kann gezeigt werden, dass für Hin- und Rücktransformation sogar unterschiedliche Wavelets benutzt werden können. Der Weg dazu führt über die sogenannte Präwavelettransformation. /2/

4.3 Eigenschaften der kontinuierlichen Wavelettransformation

Mit den unter 2.2 eingeführten Translations- und Dilatationsoperatoren T_h und D_a gilt:

$$\begin{aligned}
Wf(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \frac{1}{|a|^{0.5}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \frac{1}{|a|^{0.5}} (f(t), T_b D_a \psi)_{\mathbb{L}_2}
\end{aligned}$$

D.h. $Wf(a, b)$ ist ein \mathbb{L}_2 -Skalarprodukt von f mit dem Funktionensystem $\{T_b D_a \psi \mid a \neq 0; b \in \mathbb{R}\}$.

Die Inversionsformel besagt, dass dieses Funktionensystem vollständig ist, sofern ψ die Zulässigkeitsbedingung erfüllt.

4.3.1 Filtereigenschaften

Der Einsatz von Filtern in der Signalverarbeitung erfolgt zur

- Verringerung von Datenfehlern
- Trennung von hoch- und niederfrequenten Anteilen des Signals
- Hervorhebung bestimmter Frequenzbereiche

Die gebräuchlichsten Filter sind lineare Faltungsfiler in Zusammenhang mit der Fouriertransformation.

$$f_\phi = f * \phi \xrightarrow{FT} \widehat{f}_\phi = \sqrt{2\pi} \widehat{f} \cdot \widehat{\phi}$$

Beispiel 4.6 Arten von Filtern:

Tiefpassfilter: $\widehat{\phi} \sim \chi_{[-B;B]}$: hohe Frequenzen werden gedämpft

Bandpassfilter: $\widehat{\phi} \sim \chi_{a \leq \omega \leq b}$: Spektrum zwischen a und b wird untersucht

Hochpassfilter: $\widehat{\phi} \sim 1 - \chi_{[-B;B]}$

Interpretation:

Es bestehe f nur aus Details größer als L \curvearrowright

$$f = \sum \alpha_j \chi_{I_j}(t) \quad \text{mit} \quad |I_j| > L$$

$$\begin{aligned} |\widehat{\chi}_I(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \exp\left(-i\frac{c+d}{2}\omega\right) \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega|I|}{2}\right) \right| \quad \text{mit} \quad I = [c; d] \\ &= \frac{|I|}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{2}{|I|\omega} \sin\left(\frac{\omega|I|}{2}\right) \right| \\ &= \frac{|I|}{\sqrt{2\pi}} \left| \text{si}\left(\frac{\omega|I|}{2}\right) \right| \quad \text{mit} \quad |I| = d - c > L \end{aligned}$$

Wegen $\text{si}(\cdot) \gg 0$ in $[-\pi; \pi]$ folgt aus $\frac{\omega|I|}{2} < \pi$ für $\omega : \omega \leq \frac{2\pi}{|I|}$.

D.h. im Wesentlichen besteht der Träger von $\widehat{\chi}_I(\omega)$ aus dem Intervall $\left[-\frac{2\pi}{|I|}; \frac{2\pi}{|I|}\right]$. Folglich entsprechen Details der Größe $|I| \geq L$ einer Frequenz $\omega \leq \frac{2\pi}{L}$.

Umgekehrt gilt: Wenn $|\widehat{f}(\omega_0)| \gg 0$, dann hat f Details der Größe $\frac{2\pi}{\omega_0}$.

Interpretation der Wavelettransformation als Filter:

Schreibe $Wf(a, b)$ mittels Faltung (s. Beweis von Satz 4.6):

$$Wf(a, b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \frac{1}{|a|^{0.5}} (f * \overline{D_{-a}\psi})b$$

Das entspricht einer Filterung mit $\overline{\psi\left(\frac{\cdot}{-a}\right)}$ für festes a .

Wegen Satz 4.1 gilt $\widehat{\psi}(0) = 0$. Wenn $\psi \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ folgt $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \widehat{\psi}(\omega) = 0$. Damit entspricht die Wavelettransformation einer Bandfilterung. Wegen der Isometrie (Satz 4.6) gilt weiter:

Satz 4.7

$$Wf(a, b) = \frac{|a|^{0.5}}{\sqrt{c_\psi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}(a\omega) \overline{\widehat{f}(\omega)} e^{-i\omega b} d\omega$$

Beweis: /2/, S. 28

Folgerungen:

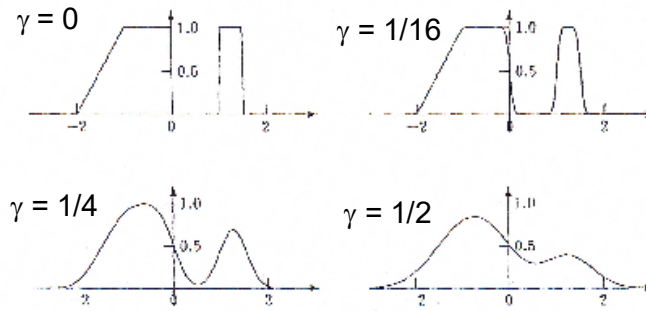
- Wenn $\widehat{\psi}(\omega)$ um ω_0 konzentriert ist (HAAR, Mexikanerhut), so ist $\widehat{\psi}(a\omega)$ um $\omega = \frac{\omega_0}{a}$ konzentriert.
- Für festes a enthält $Wf(a, b)$ hauptsächlich Informationen über Anteile der Frequenz $\frac{\omega_0}{a}$ in f .
- a heißt deshalb Frequenzparameter.
- Für festes a enthält $Wf(a, b)$ die Informationen über Details der Größe $2\pi/\frac{\omega_0}{a}$ in f .

Beispiel 4.7 *In der Rekonstruktion einer Funktion muss sich das oben beschriebene „Detailverhalten“ widerspiegeln. Deshalb wird die inverse Wavelettransformierte mit einem Parameter γ versehen, der die Berechnung des uneigentlichen Integrals steuert:*

$$f_\gamma(t) = \int_{a>|\gamma|} \int_{\mathbb{R}} Wf(a, b) \frac{1}{\sqrt{c_\psi}|a|^{0.5}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{1}{a^2} db da$$

Wir erhalten folgendes Bild mit dem Mexikanerhut \curvearrowright $\omega_0 = \sqrt{2}$, $c_\psi = 1$ (/2/, S. 18, Abb. 1.4)

Die Originalfunktion enthält zwei Objekte der Größe $L_I = 2$ und $L_{II} = 0.5$, die „scharfe Kanten“ besitzen. Diese Kanten sind Details sehr kleiner Länge:



$$L = \frac{2\pi}{\frac{\omega_0}{a}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} a \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0.$$

Für die Frequenz ω gilt dann wegen $L = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} a$:

$$\omega = \frac{\sqrt{2}}{a} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \infty.$$

Damit kann eine scharfe Abbildung der Kanten nur bei $a \rightarrow 0$ erreicht werden. Was passiert nun bei der Abbildung von Objekten der Größe $L = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} a \geq \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \gamma$ durch f_γ ?

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \quad \curvearrowright \quad L_1 = \sqrt{2}\pi \cdot \frac{1}{2} \approx 2.22$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{4} \quad \curvearrowright \quad L_2 = \sqrt{2}\pi \cdot \frac{1}{4} \approx 1.11$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{16} \quad \curvearrowright \quad L_3 = \sqrt{2}\pi \cdot \frac{1}{16} \approx 0.28$$

4.3.2 Phasenraumdarstellung

In der Physik und in der Signalverarbeitung interessiert es, wie die Frequenzverteilung einer Funktion zum Zeitpunkt t_0 oder in dem Intervall $[t_0, t_e]$ aussieht. D.h. es wird eine Funktion $Df(t, \omega)$ gesucht, die $f(t)$ zugeordnet wird und angibt, wie viel die Frequenz ω zum Zeitpunkt t zum Signal f beiträgt.

Definition 4.3 Die Menge $\{(t, \omega) \mid t, \omega \in \mathbb{R}\}$ heißt Phasenraum.

Definition 4.4 Die Funktion $Df(t, \omega)$ heißt Phasenraumdarstellung von f .

Die Phasenraumdarstellung ist nicht eindeutig. Man kann z.B. das Skalarprodukt $Df(t_0, \omega_0) = (g_{t_0, \omega_0}, f)$ benutzen, wobei g eine um t_0 und \hat{g} eine um ω_0 konzentrierte Funktion ist.

Einer gleichzeitig sehr guten Lokalisation von g um t_0 und \widehat{g} um ω_0 steht die HEISENBERG'sche Unschärferelation für $g \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ entgegen:

$$\|(t - t_0)g\| \cdot \|(\omega - \omega_0)\widehat{g}\| \geq \frac{1}{2} \|g\|^2 \quad (\text{s. 2.3})$$

Definition 4.5 Es sei $g \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, $\|g\|_{\mathbb{L}_2} = 1$;

$$\begin{aligned} -\infty < t_0 &= \int_{\mathbb{R}} t |g(t)|^2 dt < \infty \\ -\infty < \omega_0 &= \int_{\mathbb{R}} \omega |\widehat{g}(\omega)|^2 d\omega < \infty \end{aligned}$$

Dann heißt g lokalisiert um den Phasenpunkt (t_0, ω_0) mit der Unschärfe

$$\mu(g) = \|(t - t_0)g\|^2 \cdot \|(\omega - \omega_0)\widehat{g}\|^2 \geq \frac{1}{4}.$$

Interpretation der Wavelettransformation als Phasenraumdarstellung:

Es sei ψ ein Wavelet, d.h. $\|\psi\|_{\mathbb{L}_2}$ mit $\int_{\mathbb{R}} t |\psi(t)|^2 dt = 0$, was u.U. durch Translation erreicht werden kann. Da ψ meist eine gerade Funktion mit zwei ausgeprägten Maxima ist, muss aber das obige Konzept angepasst werden:

$$\begin{aligned} \omega_0^+ &= \int_0^\infty \omega |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \\ \omega_0^- &= \int_{-\infty}^0 \omega |\widehat{\psi}(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

Dann ist ψ lokalisiert um (t_0, ω_0^\pm) . Folglich ist $\psi_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ lokalisiert um $(t_0^{ab}, \omega_0^{ab})$ mit

$$\begin{aligned} t_0^{ab} &= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} t \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} (b + as) |\psi(s)|^2 ds \\ &= a \int_{\mathbb{R}} s |\psi(s)|^2 ds + b \int_{\mathbb{R}} |\psi(s)|^2 ds \\ &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_0^{ab} &= \int_{0 \leq \pm \omega < \infty} \omega \left| \widehat{\psi}_{ab} \right|^2 d\omega \\
 &= \int_{0 \leq \pm \omega < \infty} \omega \frac{1}{|a|} |e^{-i\omega b}|^2 |a|^2 \left| \widehat{\psi}(a\omega) \right|^2 d\omega \\
 &= \int_{0 \leq \pm \omega < \infty} a\omega \left| \widehat{\psi}(a\omega) \right|^2 d\omega \\
 &= \int_{0 \leq \pm s < \infty} s \left| \widehat{\psi}(s) \right|^2 \frac{1}{a} ds \\
 &= \frac{\omega_0^\pm}{a}.
 \end{aligned}$$

↪ Mit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; $a \neq 0$ durchläuft $(t_0^{ab}, \omega_0^{ab})$ den Phasenraum.

↪

$$Wf(a, b) = Df \left(b, \frac{\omega_0^\pm}{a} \right)$$

Sei a fest. ↪

$$Wf(a, \cdot) = Df \left(\cdot, \frac{\omega_0^\pm}{a} \right)$$

entspricht der zeitlichen Veränderung der Frequenzen um $\frac{\omega_0^\pm}{a}$.

Sei b fest. ↪

$$Wf(\cdot, b) = Df \left(b, \frac{\omega_0^\pm}{\cdot} \right)$$

entspricht der Verteilung der Frequenzen zum Zeitpunkt b .

4.3.3 Approximationseigenschaften

Gesucht: Ordnungsprinzip in der Menge der Wavelets mit signaltheoretischer Relevanz:

⇒ Klassifizierung nach dem Hochfrequenzverhalten

⇒ suche nach dominanten Eigenschaften für $|a| \rightarrow 0$

Definition 4.6 ψ heißt Wavelet der Ordnung $N \in \mathbb{N}$, wenn

1. der Mittelwert und die ersten $N - 1$ Momente von ψ verschwinden:

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \psi dt = 0, \quad 0 \leq k \leq N - 1$$

2. das N -te Moment endlich und ungleich Null ist: $\int_{\mathbb{R}} t^N \psi dt = c < \infty$; $c \neq 0$

Satz 4.8 $f \in H^s$; $s \in \mathbb{R}$; $\psi \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ sei Wavelet der Ordnung N ; $\mu = \frac{(-1)^N}{N!} \cdot c$; $c \in \mathbb{R}$

$$\implies \left\| \frac{\operatorname{sgn}^N(-a)}{|a|^{N+0.5}} \sqrt{c_\psi} Wf(a, \cdot) - \mu f^{(N)}(\cdot) \right\|_{H^{s+N}} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$$

D.h. das Hochfrequenzverhalten zweier Wavelettransformierten zu verschiedenen Wavelets der gleichen Ordnung unterscheidet sich nur um einen Faktor $\gamma = \frac{c}{\sqrt{c_\psi} N!}$. Die Ordnung eines Wavelets bestimmt somit das Verhalten der Wavelettransformierten für betragsmäßig kleine a . Analoge Aussagen gelten auch für Wavelets mit kompaktem Träger. Weiter gilt: (Beweise s. /2/)

Satz 4.9 Wavelets mit kompaktem Träger haben eine endliche Ordnung.

Satz 4.10 \exists Wavelets $\psi \in S(\mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}} t^k \psi dt = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ (Beispiel: MEYER-Wavelet).

Zusätzlich zur Klassifikation bringt die Einteilung nach der Ordnung auch noch Aussagen zum Abklingverhalten der Wavelettransformierten bei $a \rightarrow 0$.

Satz 4.11 $\psi \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$ sei Wavelet; Es gelte:

$$1.) \int_{\mathbb{R}} t^k \psi dt = 0 \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, N-1; \quad \int_{\mathbb{R}} t^N \psi dt \in \mathbb{R};$$

$$2.) f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}); \quad \exists k \in \{1, \dots, N\} \mid f^{(k)} \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$$

$$\implies |Wf(a, b)| \leq \|Wf(a, \cdot)\|_{\mathbb{L}^\infty} = O(|a|^{k+0.5}); \quad a \rightarrow 0; \quad \text{für fast alle } b \in \mathbb{R}.$$

Die Wavelettransformierte fällt in den hohen Frequenzen ($|a|$ klein) umso schneller, je glatter die transformierte Funktion ist und je glatter das transformierende Wavelet ist. Die Anzahl der verschwindenden Momente des Wavelets beschränken die erreichbare Abklingrate. Bei Wavelettransformierten mit Wavelets, deren sämtlichen Momente verschwinden, bestimmt allein die zu analysierende Funktion das Abklingverhalten.

\implies Wavelets mit möglichst hoher Ordnung wählen.

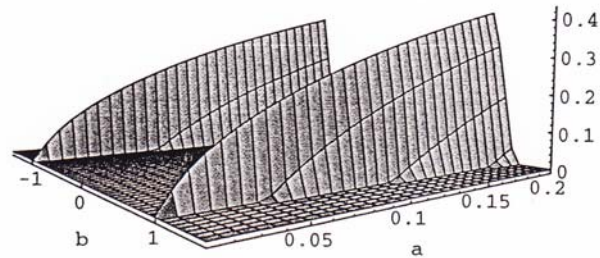
Es gibt sehr viele ähnliche Aussagen zu diesem Punkt. Interessant ist folgende zum Verhalten an einem Knackpunkt.

Definition 4.7 Eine isolierte Sprungstelle b der r -ten Ableitung von f mit $f^{(r)}(b+0) - f^{(r)}(b-0) = \delta$ heißt r -Knackpunkt.

Satz 4.12 Sei ψ ein Wavelet der Ordnung N mit kompaktem Träger, $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ besitze bei b einen r -Knackpunkt, $r < N$.

Dann gilt: $Wf(a, b) = |a|^{r+0.5}(C\delta + o(1)); \quad a \rightarrow 0; \quad C \neq C(f)$

Beispiel 4.8 Wavelettransformierte (HAAR-Wavelet) der charakteristischen Funktion des Intervalls $[-1; 1] : /2/$



Folgerungen:

- Dort, wo f sehr glatt ist, klingt $Wf(a, b)$ mit $|a| \rightarrow 0$ sehr schnell ab.
- An Knackpunkten sind viele Anteile in hohen Frequenzen vorhanden, weil ein Detail geringer Größe vorliegt.
- An diesen Stellen kommt es zu einem zusätzlich langsameren Abklingen als sonst \implies gute Erkennbarkeit
- Dadurch ist eine große Datenkompression möglich: Es werden nur die Werte von $Wf(a, b)$ gespeichert, die einen Schwellenwert übersteigen. (Dort passiert etwas. - Der Rest ist uninteressant und wird zur Rekonstruktion auch nicht benötigt.)

5 Diskrete Wavelettransformation

Ausgangspunkte sind das Verständnis und die richtige Interpretation der kontinuierlichen Wavelettransformation. Bei einer konkreten Rechnung treten jedoch zwei Probleme auf:

1. die effiziente Berechnung der Wavelettransformierten
2. die effektive Rekonstruktion von Signalen, d.h. die effektive Berechnung der inversen Wavelettransformierten.

Wir betrachten zuerst das 2. Problem: Finde diskrete Teilmengen $\left\{ \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \right\} \subset D_{Wf}$, die zur Rekonstruktion von f ausreichen. Das führt auf die Theorie der Frames und die Multiskalenanalyse. Diese erlauben wiederum eine effiziente Berechnung sowohl der Hin- als auch der Rücktransformation, und damit wird auch das 1. Problem gelöst.

5.1 Waveletframes

Die Theorie der Frames bietet die Möglichkeit, kontinuierliche und diskrete Wavelettransformation unter einheitlichen funktionalanalytischen Gesichtspunkten darzustellen. Frame heißt "Rahmen", aber für die mathematische Bedeutung dieses Begriffes gibt es keine Übersetzung.

Definition 5.1 *Frame:* $a. := \{a_i \mid a_i \in \mathbb{H}; i \in I\}$, so dass kein $x \in \mathbb{H}$, $x \neq \mathbb{0}$ existiert, für das gilt $(x, a_i) = 0 \quad \forall i$.

$a.$ ist redundant, weil die Elemente a_i weder linear unabhängig noch orthogonal sein müssen.

5.1.1 Geometrische Interpretation - Einführung

Wir betrachten zunächst einen endlich dimensionalen Hilbertraum \mathbb{X} ,

$$\dim \mathbb{X} = n; \quad a_1, \dots, a_r \in \mathbb{X}; \quad r > n$$

Es sei T ein Operator, der \mathbb{X} nach $\mathbb{Y} = \mathbb{C}^r$ abbildet, so dass gilt:

$$(Tx)_j = (x, a_j) \quad \text{für } 1 \leq j \leq r.$$

Weiter sei $\{e_1, \dots, e_r\}$ eine Basis von $\mathbb{C}^r \implies Tx = \sum_{j=1}^r (x, a_j) e_j$.

$$\mathbb{U} = \text{im}(T) = \{Tx \mid x \in \mathbb{X}\}; \quad \dim \mathbb{U} \leq n \implies \mathbb{U} \subset \mathbb{Y}.$$

Probleme:

- Ist ein $x \in \mathbb{X}$ durch $y = Tx \in \mathbb{Y}$ eindeutig bestimmt?
- Wenn ja, wie bestimmt man x aus y ?

Mit $(y, z) = \sum_{k=1}^r y_k \bar{z}_k$ wird \mathbb{Y} zum Hilbertraum. Wir betrachten nun den adjungierten Operator $T^* : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$, der durch

$$(x, T^*y)_{\mathbb{X}} = (Tx, y)_{\mathbb{Y}} \quad \forall x \in \mathbb{X}, \forall y \in \mathbb{Y}$$

definiert wird. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} (x, T^*e_j) &= (Tx, e_j) \\ &= j\text{-te Komponente von } Tx \\ &= (x, a_j) \quad \forall x \in \mathbb{X} \end{aligned}$$

\curvearrowright

$$T^*e_j = a_j \quad 1 \leq j \leq r \quad (5.1.1)$$

Gram-Operator (\neq Gramsche Matrix!): $G = T^*T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$

$$Gx = T^*Tx = T^* \left(\sum_{j=1}^r (x, a_j) e_j \right) = \sum_{j=1}^r (x, a_j) T^*e_j = \sum_{j=1}^r (x, a_j) a_j \quad (5.1.2)$$

Weiter gilt: $\ker T = \ker G$, da

1. $Tx = \mathbb{0} \implies Gx = \mathbb{0}$
2. $\|Tx\|^2 = (Tx, Tx) = (T^*Tx, x) = (Gx, x) \implies Gx = \mathbb{0} \implies Tx = \mathbb{0}$.

Daraus folgt: T ist eineindeutig $\iff G$ ist regulär.

Wir untersuchen nun G genauer:

- $G = G^*$, da $(x, Gu) = (x, T^*Tu) = (Tx, Tu) = (T^*Tx, u) = (Gx, u)$
- \curvearrowright Die Eigenwerte von G sind reell und $\lambda(x, x) = (Gx, x) = \|Tx\|^2 \geq 0$
- \curvearrowright $0 \leq A := \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n =: B$
- \curvearrowright \exists eine Basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, die G diagonalisiert. In dieser Basis gilt:

$$Gx = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} \quad (5.1.3)$$

• \curvearrowright

$$\|Tx\|^2 = (Gx, x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k |x_k|^2 \begin{cases} \geq A \|x\|^2 \\ \leq B \|x\|^2 \end{cases}.$$

Satz 5.1 $a. = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{X}$ ist Frame $\iff \exists B \geq A > 0$ |

$$A \|x\|^2 \leq \|Tx\|^2 \leq B \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

A, B heißen Frame-Konstanten. Gilt $A = B$, so heißt das Frame „straff“ (tight), und es gilt: $\|Tx\|^2 = A \|x\|^2$. Dann bildet T im Wesentlichen isometrisch auf \mathbb{X} ab.

Beispiel 5.1 Sei $a. = \{a_1, \dots, a_n\}$ eine Orthonormalbasis von \mathbb{X} . Dann gilt

$$\|Tx\|^2 = \sum_{j=1}^n |(x, a_j)|^2 = \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{X}.$$

Damit bildet die ONB ein straffes Frame mit der Framekonstanten $A = 1$. Diese gibt Aufschluss über die Größe der Redundanz; $A = 1$ bedeutet keine Redundanz.

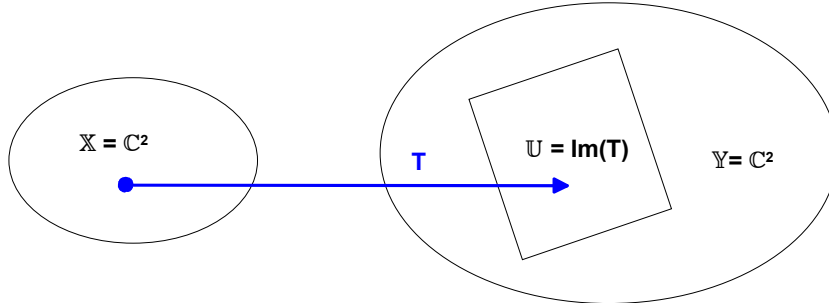
Beispiel 5.2 Es sei $\mathbb{X} = \mathbb{C}^2$; $r \geq 2$; $a_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \exp(\frac{2\pi i j}{r}) \\ \exp(-\frac{2\pi i j}{r}) \end{pmatrix}$ $j = 0, \dots, r-1$. Der Frameoperator $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}^r$ wird dann für $x \in \mathbb{X} = \mathbb{C}^2$, $j = 0, \dots, r-1$ wie folgt gebildet:

$$\begin{aligned} (Tx)_j &= (x, a_j) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x_1 \exp(-\frac{2\pi i j}{r}) + x_2 \exp(\frac{2\pi i j}{r}) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 \omega_r^{-j} + x_2 \omega_r^j) \quad \text{mit } \omega_r = \exp(\frac{2\pi i}{r}). \end{aligned}$$

ω_r ist folglich die r -te Einheitswurzel. \curvearrowright

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{r-1} (x_1 \omega_r^{-j} + x_2 \omega_r^j) (\bar{x}_1 \omega_r^j + \bar{x}_2 \omega_r^{-j}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{r-1} (|x_1|^2 + |x_2|^2 + x_1 \bar{x}_2 \omega_r^{-2j} + \bar{x}_1 x_2 \omega_r^{2j}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{r-1} \|x\|^2 + \frac{1}{2} x_1 \bar{x}_2 \sum_{j=0}^{r-1} (\omega_r^{-2})^j + \frac{1}{2} \bar{x}_1 x_2 \sum_{j=0}^{r-1} (\omega_r^2)^j \\ &= \frac{r}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2} x_1 \bar{x}_2 \frac{(\omega_r^{-2})^r - 1}{\omega_r^2 - 1} + \frac{1}{2} \bar{x}_1 x_2 \frac{(\omega_r^2)^r - 1}{\omega_r^2 - 1} \\ &= \frac{r}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2} x_1 \bar{x}_2 \frac{(\omega_r^r)^{-2} - 1}{\omega_r^2 - 1} + \frac{1}{2} \bar{x}_1 x_2 \frac{(\omega_r^r)^2 - 1}{\omega_r^2 - 1} \\ &= \frac{r}{2} \|x\|^2. \end{aligned}$$

Damit ist a ein straffes Frame mit $A = \frac{r}{2}$, d.h. mit $r = 2$ ergibt sich $A = 1$, d.h. im \mathbb{C}^2 reichen zwei Vektoren der obigen Art aus, um eine Basis in \mathbb{X} und \mathbb{U} zu haben:



Ist $r > 2$, so wird dieses Mehr an „überflüssigen“ Vektoren über die Zahl $\frac{r}{2}$ bewertet, sie entspricht also der Redundanz der Menge a .

Folgerung 5.1 Ist a ein Frame, so ist G regulär und T eindeutig, d.h. T ist prinzipiell invertierbar.

Es bleibt also das Problem 2 zu lösen: Rückgewinnung von x aus $Tx = y$.

Es sei $a = \{a_1, \dots, a_n\}$ ein Frame, G der zugehörige Gramoperator. Da $G = T^*T$ regulär ist, existiert $G^{-1} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$.

Wir betrachten nun die Abbildung $S = G^{-1}T^* : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$

$$ST = G^{-1}T^*T = G^{-1}G = E_{\mathbb{X}}.$$

S ist damit Linksinverse zu T . Ist a straff, folgt mit $\|Tx\|^2 = A\|x\|^2$

$$\begin{aligned} (Gx, x) &= (T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2 = A(x, x) \\ &= A(G^{-1}Gx, x) \end{aligned}$$

↪

$$\begin{aligned} G^{-1} &= \frac{1}{A}E_{\mathbb{X}} \\ S &= \frac{1}{A}E_{\mathbb{X}}T^* = \frac{1}{A}T^*. \end{aligned}$$

D.h. aber, die Linksinverse ist ohne Rechnung zu erhalten! S ist außerdem auch die Rechtsinverse von T , denn

$$P = TS = TG^{-1}T^* = T(T^*T)^{-1}T^* = TT^{-1}(T^*)^{-1}T^* = E_{\mathbb{Y}}.$$

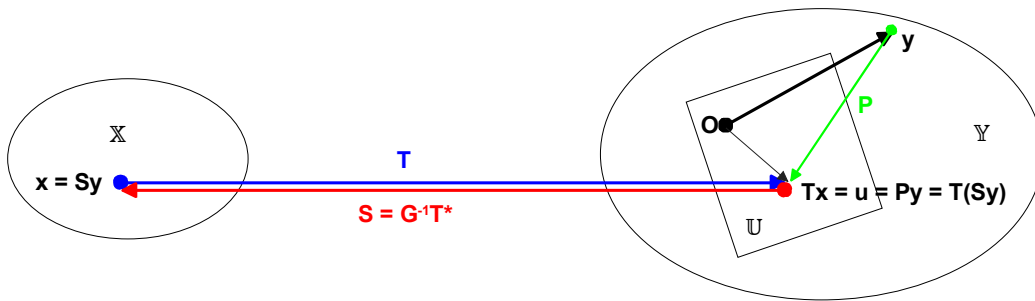
Damit ist S der inverse Operator zu T :

$$S = \frac{1}{A}T^*.$$

Allerdings müssen dabei die Definitionsbereiche von S und T beachtet werden. Wie kann nun die Invertierung effektiv durchgeführt werden? Wie kann y dargestellt werden?

Satz 5.2 $P = TS$ ist die Orthogonalprojektion von \mathbb{Y} auf $\text{Im}(T) = \mathbb{U}$. (Beweis: /1/, S. 84)

Interpretation:



D.h. Für ein beliebiges $y \in \mathbb{Y}$ ist $x = Sy$ der Vektor aus \mathbb{X} , dessen Bild Tx am nächsten bei y liegt!! Ist also $y \in \mathbb{U} \subset \mathbb{Y}$, so ist $x = Sy$ der Vektor aus \mathbb{X} , für den gilt $Tx = y$.

Definition 5.2 $\tilde{a} = \{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r \mid \tilde{a}_j = G^{-1}a_j \in X; 1 \leq j \leq r\}$ heißt *duales Frame* zu a .

Bemerkung 5.1 Ist a . straff, so gilt:

$$(\tilde{T}x)_j = (x, \tilde{a}_j) = (x, G^{-1}a_j) = (x, \frac{1}{A}E_x a_j) = (x, \frac{1}{A}a_j) \quad \curvearrowright$$

$$\tilde{a}_j = \frac{1}{A}a_j$$

Satz 5.3 Sei a . ein Frame mit den Konstanten $0 < A \leq B$, \tilde{a} . das entsprechende duale Frame. Dann gilt:

1. $x = \sum_{j=1}^r (x, a_j)\tilde{a}_j \quad \forall x \in \mathbb{X}$
2. $Sy = \sum_{j=1}^r y_j\tilde{a}_j \quad \forall y \in \mathbb{Y}$

3. \tilde{a} ist Frame mit $\frac{1}{A} \geq \frac{1}{B} > 0$

4. a ist duales Frame zu \tilde{a} , d.h. $x = \sum_{j=1}^r (x, \tilde{a}_j) a_j \quad \forall x \in \mathbb{X}$

5. $x = \sum_{j=1}^r \xi_j \tilde{a}_j$ sei eine beliebige Darstellung von x als Linearkombination der \tilde{a}_j
 $\implies \sum_{j=1}^r |\xi_j|^2 \geq \sum_{j=1}^r |(x, a_j)|^2$

Beweis:

1.

$$\begin{aligned} x &= G^{-1} G x \stackrel{(5.2.2)}{=} G^{-1} \sum_{j=1}^r (x, a_j) a_j = \sum_{j=1}^r (x, a_j) G^{-1} a_j \\ &= \sum_{j=1}^r (x, a_j) \tilde{a}_j \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} S y &= G^{-1} T^* \sum_{j=1}^r y_j e_j = G^{-1} \sum_{j=1}^r y_j T^* e_j \stackrel{(5.2.1)}{=} G^{-1} \sum_{j=1}^r y_j a_j \\ &= \sum_{j=1}^r y_j G^{-1} a_j = \sum_{j=1}^r y_j \tilde{a}_j \end{aligned}$$

3. Sei \tilde{T} der Frameoperator zu \tilde{a} ;

G^* ist selbstadjungiert, denn $G^* = (T^* T)^* = T^* T = G$.

\curvearrowright G^{-1} ist selbstadjungiert, denn $(G^{-1})^* = (G^*)^{-1} = G^{-1}$.

Damit gilt

$$(\tilde{T}x)_j = (x, \tilde{a}_j) = (x, G^{-1} a_j) = (G^{-1} x, a_j) = (T G^{-1} x)_j$$

\curvearrowright

$$\tilde{T} = T G^{-1} \quad (5.1.4)$$

\curvearrowright

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}x\|^2 &= \|T G^{-1} x\|^2 = (T G^{-1} x, T G^{-1} x) \\ &= (T^* T G^{-1} x, G^{-1} x) = (x, G^{-1} x) \end{aligned}$$

Nun wird eine ONB $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ verwendet, die G und G^{-1} diagonalisiert. \curvearrowright

$$\|\tilde{T}x\|^2 = (x, G^{-1} x) \stackrel{(5.1.3)}{=} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} |x_i|^2 \left\{ \begin{array}{l} \geq \frac{1}{B} \|x\|^2 \\ \leq \frac{1}{A} \|x\|^2 \end{array} \right.$$

4.

$$\tilde{G} = \tilde{T}^* \tilde{T} \stackrel{(5.1.4)}{=} (TG^{-1})^* TG^{-1} = (G^{-1})^* T^* TG^{-1} = G^{-1}$$

$$\curvearrowright$$

$$\tilde{a}_j = \tilde{G}^{-1} \tilde{a}_j = (G^{-1})^{-1} \tilde{a}_j = (G^{-1})^{-1} G^{-1} a_j = a_j$$

5. Sei $(\xi_1, \dots, \xi_r)^T = y \in \mathbb{Y}$. Nach 2. gilt $Sy = \sum_{j=1}^r y_j \tilde{a}_j = x \in \mathbb{X}$. Weiter ist $Tx = TSy = P_{\mathbb{U}}y$ die Orthogonalprojektion von \mathbb{Y} auf $\mathbb{U} = \text{Im}(T)$ \curvearrowright

$$\sum_{j=1}^r |(x, a_j)|^2 = \|Tx\|^2 = \|P_{\mathbb{U}}y\|^2 \leq \|y\|^2 = \sum_{j=1}^r |\xi_j|^2.$$

Die Gleichheit gilt jedoch nur, wenn $y = P_{\mathbb{U}}y = Tx \in \mathbb{U}$. ■

Interpretation:

Mittels eines Frames a . und des dazugehörigen dualen Frames \tilde{a} . kann $x \in \mathbb{X}$ als Urbild von y effektiv dargestellt werden. Die „natürliche“ Darstellung 1. aus dem obigen Satz benötigt die minimale „Koeffizientenenergie“.

Im nächsten Abschnitt wird diese Theorie auf unendlichdimensionale Räume übertragen.

5.1.2 Der allgemeine Frame-Begriff

Sei \mathbb{X} ein komplexer unendlichdimensionaler Hilbertraum; M eine Menge von Punkten. Zur Sicherung der Integralrechnung auf \mathbb{X} wird ein Maß μ auf M definiert, das jeder messbaren Teilmenge $E \subset M$ einen Inhalt zuweist.

Es sei die Familie $h. = \{h_m \mid m \in M, h_m \in \mathbb{X}\}$ gegeben.

Definition 5.3 *Frame-Operator* $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{C} : Tf(m) = (f, h_m); \quad f \in \mathbb{X}; \quad m \in M$
mit $\|Tf\|^2 = \int_M |Tf(m)|^2 d\mu(m)$

Damit entsteht ein Datensatz $\{Tf(m) \mid m \in M\}$, der mittels der „Messonden“ h_m Informationen über $f \in \mathbb{X}$ speichert.

Definition 5.4 $h.$ ist ein Frame, wenn

1. Tf μ -messbar ist für alle $f \in \mathbb{X}$ und wenn

2. Konstanten A und B existieren, so dass gilt
 $A \|f\|^2 \leq \|Tf\|^2 \leq B \|f\|^2 \quad \forall f \in \mathbb{X}.$

Der Frame-Operator ist damit linear, beschränkt (folglich stetig) und invertierbar. Im unendlichdimensionalen Fall wird jedoch zur Invertierung ein Iterationsverfahren benötigt, das umso schneller konvergiert je näher $\frac{B}{A}$ bei 1 liegt:

Satz 5.4 *h.* sei ein Frame mit $B \geq A > 0$; $g \in \mathbb{X}$;

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_{n+1} &= f_n + \frac{2}{A+B}(g - Gf_n); \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1} = G^{-1}g.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \frac{2}{A+B}g + \left(E_{\mathbb{X}} - \frac{2}{A+B}G \right) f_n \\ &= \frac{2}{A+B}g + Rf_n \\ &= \tilde{R}f_n \end{aligned}$$

Da $h.$ ein Frame ist, gilt:

$$A\|f\|^2 \leq \|Tf\|^2 = (Tf, Tf) = (T^*Tf, f) = (Gf, f) \leq B\|f\|^2$$

\curvearrowright

$$AE_{\mathbb{X}} \leq G \leq BE_{\mathbb{X}} \quad (5.1.5)$$

$$\begin{aligned} \left\| G - \frac{A+B}{2}E_{\mathbb{X}} \right\| &\leq \left| \|G\| - \left\| \frac{A+B}{2}E_{\mathbb{X}} \right\| \right| \\ &\leq \left| B - \frac{A+B}{2} \right| = \frac{B-A}{2} \end{aligned}$$

$$\|R\| = \left\| \frac{2}{A+B}G - E_{\mathbb{X}} \right\| = \frac{2}{A+B} \left\| G - \frac{A+B}{2}E_{\mathbb{X}} \right\| \leq \frac{B-A}{B+A} < 1$$

Damit ist R eine kontrahierende Abbildung \curvearrowright

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{R}z_n - \tilde{R}f_n \right\| &= \left\| \frac{2}{A+B}g + Rz_n - \frac{2}{A+B}g - Rf_n \right\| \\ &\leq \|R\| \|z_n - f_n\| \end{aligned}$$

Folglich ist auch \tilde{R} eine kontrahierende Abbildung, und es existiert nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau ein Fixpunkt:

$$\begin{aligned} f &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \\ &= \frac{2}{A+B}g + \left(E_{\mathbb{X}} - \frac{2}{A+B}G \right) f \\ &= f + \frac{2}{A+B}(g - Gf) \end{aligned}$$

\curvearrowright

$$g = Gf \quad \curvearrowright \quad f = G^{-1}g$$

■

Bemerkung 5.2 Bei $A = B$ folgt aus (5.1.5)

$$G = BE_{\mathbb{X}} \quad \curvearrowright \quad G^{-1} = \frac{1}{B}E_{\mathbb{X}},$$

d.h. es ist kein Iterationsverfahren nötig.

Anwendung des Frame-Konzepts auf die Wavelettransformation:

$\mathbb{X} := \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$: Raum der Zeitsignale $f(t)$; $\dim \mathbb{X} = \infty$

$M := \mathbb{R}_-^2 := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0\}$ mit dem Maß $d\mu = \frac{dadb}{a^2}$

$\mathbb{Y} := \mathbb{L}_2(\mathbb{R}_-^2, d\mu) = \mathbb{H}$

Wähle ein Mutterwavelet ψ und bilde eine Familie

$$\psi. := \{\psi_{ab} \mid \psi_{ab} = \frac{1}{\sqrt{c_\psi}} \frac{1}{|a|^{0.5}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right); \quad a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0\}$$

$Tf(a, b) = (f, \psi_{ab}) = Wf(a, b)$, d.h. der zur Familie $\psi.$ gehörige Frame-Operator ist die Wavelettransformation. Da die Wavelettransformation eine Isometrie darstellt, gilt

$$\|Wf(a, b)\|_{\mathbb{H}}^2 = \|f\|_{\mathbb{L}_2}^2$$

und damit

Satz 5.5 Für jedes beliebige Wavelet ψ ist $\psi.$ ein straffes Frame mit der Framekonstanten 1.

Folglich gilt $G^{-1} = E_{\mathbb{X}}$; $\tilde{\psi}. = \psi.$

In Analogie zu den obigen Betrachtungen erhält man für die Wiederherstellung von $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ aus den Werten $(Tf)_j = (f, a_j)$

$$f = \int_{\mathbb{R}_-^2} Wf(a, b) \psi_{ab} \frac{dadb}{a^2} \quad \forall f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}).$$

Diese Formel entspricht der inversen Wavelettransformation und gilt unter den dort getroffenen Voraussetzungen.

5.2 Die Diskrete Wavelettransformation

Problem: Muss $Wf(a, b)$ wirklich an jedem Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ bekannt sein, um f zurück zu erhalten?

Bekannt: Das Abtasttheorem von SHANNON im Zusammenhang mit der Fouriertransformation beschreibt, dass die vollständige Wiederherstellung eines bandbegrenzten Signals f aus einem diskreten Satz von Messdaten $f(kT)$, $k \in \mathbb{Z}$ möglich ist.

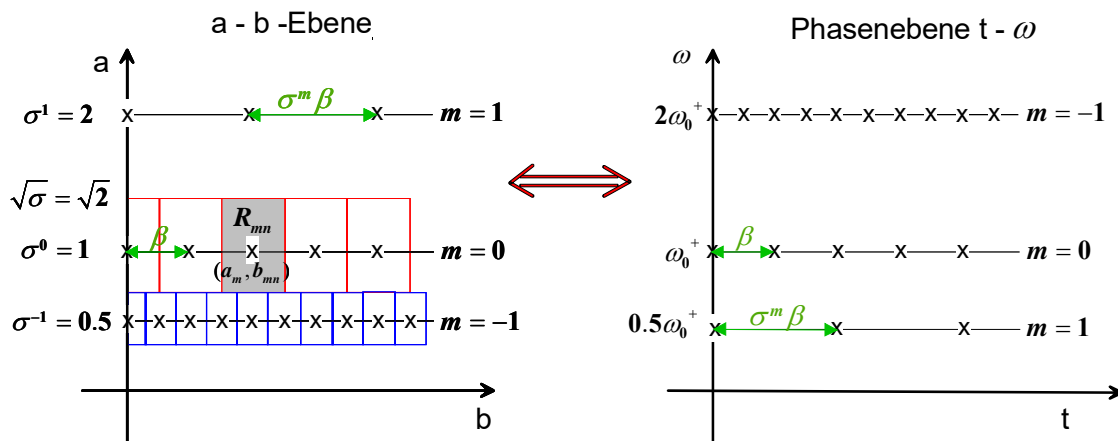
Gesucht ist ein Analogon für die Wavelettransformation, wobei aber keine allgemeine Untersuchung gemacht wird, für welche Teilmengen von \mathbb{R}_+^2 es funktioniert.

Wir betrachten exemplarisch die Menge

$$M := \{(a_m, b_{mn}) \mid m, n \in \mathbb{Z}; \quad a_m = \sigma^m; \quad b_{mn} = n\sigma^m\beta; \quad \sigma > 1, \quad \beta > 0\}.$$

Am gebräuchlichsten ist $\sigma = 2$. σ heißt Zoomfaktor, β Grundschrift.

Bei der Darstellung von M schränken wir uns auf $a > 0$ ein:



Wir betrachten zu dieser Menge die Familie ψ . zum Mutterwavelet ψ :

$$\begin{aligned} \psi &= \{\psi_{mn} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{mit} \\ \psi_{mn} &= \frac{1}{c_\psi \sqrt{a_m}} \psi\left(\frac{t - b_{mn}}{a_m}\right) \\ &= \frac{1}{c_\psi \sqrt{\sigma^m}} \psi\left(\frac{t - n\sigma^m\beta}{\sigma^m}\right) \\ &= \frac{1}{c_\psi} \sigma^{-\frac{m}{2}} \psi(\sigma^{-m}t - n\beta), \end{aligned}$$

Diese Funktionen ψ_{mn} sind im Phasenraum $t - \omega$ um den Punkt

$$\left(b_{mn}; \frac{\omega_0^\pm}{a_m}\right) = (n\sigma^m\beta; \sigma^{-m}\omega_0^\pm)$$

lokalisiert. Mit wachsender Frequenz ω liegen damit die Punkte dichter bzgl. der t -Koordinate, woraus die Zoom-Eigenschaft resultiert.

Gesucht sind nun Eigenschaften dieser Familie, d.h. Bedingungen an ψ , σ , β , so dass sie ein Frame bildet. Dazu benötigen wir ein Maß auf M in Analogie zu oben. Der Punkt (a_m, b_{mn}) vertritt das Rechteck R_{mn} . R_{mn} hat die Breite $\sigma^m\beta$ und die Höhe $\sigma^m\sqrt{\sigma} - \sigma^m\frac{1}{\sqrt{\sigma}}$. Mit dem HAARSchen Maß ergibt sich

$$\begin{aligned}\mu(R_{mn}) &= \sigma^m\beta \int_{\sigma^m/\sqrt{\sigma}}^{\sigma^m\sqrt{\sigma}} 1 \frac{da}{a^2} \\ &= \sigma^m\beta \left(-\frac{1}{a} \right)_{\sigma^m/\sqrt{\sigma}}^{\sigma^m\sqrt{\sigma}} \\ &= \sigma^m\beta \left(-\sigma^{-m-0.5} + \sigma^{-m+0.5} \right) \\ &= \beta \left(-\sigma^{-0.5} + \sigma^{+0.5} \right) \\ &= \frac{\beta}{\sqrt{\sigma}} (\sigma - 1).\end{aligned}$$

Bemerkung 5.3 *Bezüglich des „normalen“ Maßes dadb sind diese Rechtecke natürlich nicht gleich groß!*

$$M \sim \mathbb{Z}^2$$

M kann damit das Zählmaß $\#$ zugewiesen werden, das jedem Punkt von M das Maß $\mu(R_{mn}) = \text{const.}$ zuweist. $\curvearrowright \mathbb{Y} = \mathbb{L}_2(\mathbb{R}_-, d\mu)$ geht über in $\mathbb{Y} = \mathbb{L}^2(\mathbb{Z}^2)$.

Ist ψ ein Frame, so ist der dazugehörige Frameoperator T über

$$Tf(m, n) = (f, \psi_{mn}) = Wf(a_m, b_{mn})$$

an die Wavelettransformation zum Wavelet ψ angeschlossen.

Definition 5.5 *Es sei $\sigma > 1$ gegeben; ψ heißt zulässig, wenn für $\widehat{\psi}$ gilt:*

1.

$$\exists \alpha > 0; \rho > 0; C \in \mathbb{R} \mid \left| \widehat{\psi}(\omega) \right| \leq \begin{cases} C|\omega|^\alpha & |\omega| \leq 1 \\ \frac{C}{|\omega|^{1+2\rho}} & |\omega| > 1 \end{cases}$$

2.

$$\exists A' > 0 \mid \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\psi}(\sigma^m\omega) \right|^2 \geq A' \quad 1 \leq |\omega| \leq \sigma$$

Die Konstanten α , ρ , A' und C heißen Parameter von ψ .

1. gilt z.B. für $t\psi' \in \mathbb{L}_1$ und ψ' von beschränkter Variation mit $\alpha = 1$; $\rho = 0.5$.

2. gilt z.B. für ψ von endlicher Ordnung N , da dann gilt $\widehat{\psi} = \gamma\omega^N + O(N+1)$ \curvearrowright
 $\widehat{\psi}(\omega) \neq 0$ für $0 < |\omega| < h$ ($/1/$)

Satz 5.6 Sei $\sigma > 1$, ψ ein zulässiges Wavelet mit den Parametern α , ρ , A' , und C . Dann existieren Konstanten β_0 , B' , und C' , so dass gilt: Ist $\beta < \beta_0$, so ist $\psi. = \{\psi_{mn}\}$ ein Frame mit den Konstanten

$$A = \frac{2\pi}{\beta c_\psi} (A' - C' \beta^{1+\rho}); \quad B = \frac{2\pi}{\beta c_\psi} (B' - C' \beta^{1+\rho}).$$

Beweis: /1/

Damit ist die Rekonstruktion von $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ bezüglich dieses Frames möglich.

$M \sim \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, d.h. Werte von Wavelettransformierten auf Punkten von M sind ausreichend für diese Rekonstruktion! (Allerdings sind das immer noch abzählbar unendlich viele.)

Nach Satz 5.3 wird zur Darstellung von f das duale Frame $\tilde{\psi}$ benötigt:

$$\tilde{\psi}_{mn} = G^{-1}(\psi_{mn}).$$

Da ψ i. Allg. nicht straff ist, macht die Berechnung der $\tilde{\psi}_{mn}$ Mühe. Sie gehen nicht durch Dilatation und Translation aus einem einzigen $\tilde{\psi}$ hervor. Deshalb sucht man besser ein straffes Frame, denn dann gilt

$$\tilde{\psi}_{mn} = \frac{1}{A} \psi_{mn}.$$

Satz 5.7 Die Fouriertransformierte $\hat{\psi}$ vom Wavelet ψ besitze einen kompakten Träger (bandbegrenzte Signal!) im Intervall $I = [\omega, \omega']$ mit $\omega' > \omega > 0$. Es gelte

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(\sigma^m \xi)|^2 \equiv A' > 0; \quad 1 \leq \xi \leq \sigma.$$

Dann ist $\psi. = \{\psi_{mn}\}$ mit dem Zoomschritt σ und dem Grundschrift $\beta \leq \frac{2\pi}{\omega' - \omega}$ ein straffes Frame. (Beweis: /1/)

Damit ist die Rekonstruktion von f aus der Menge $Tf(m, n)$ ohne größere Probleme möglich, denn $G^{-1} = \frac{1}{A} E_x$. Weiter gilt:

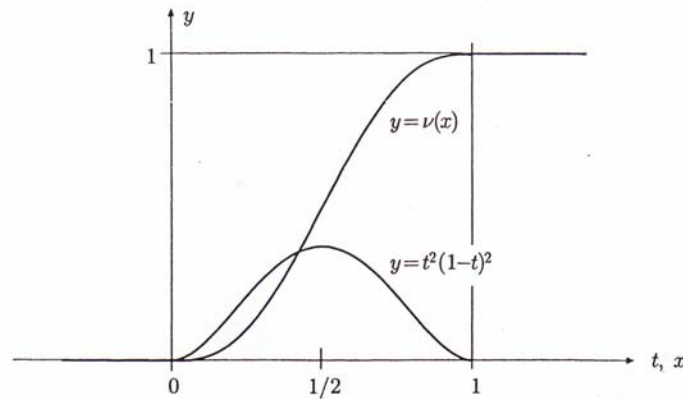
Satz 5.8 Ein festes Frame $\psi. = \{\psi_{mn}\}$ zum Wavelet ψ mit den Schranken $A = B = 1$ erzeugt eine Orthonormalbasis von $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, sofern $\|\psi\|_{L_2} = 1$ gilt. (Beweis: /2/)

Diese beiden Sätze werden auch zur Erzeugung von Wavelets mit den geforderten Eigenschaften bzgl. der Anbindung an ein Frame genutzt, z.B. zur Herstellung der DAUBECHIES-GROSSMANN-MEYER-Wavelets oder des MEYER-Wavelets selbst. Das folgende Beispiel zeigt die Erzeugung eines Wavelets über die beiden obigen Sätze.

Beispiel 5.3 Es sei $\nu = \nu(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $\nu \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$; $k \geq 0$ eine Hilfsfunktion mit

$$\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}, \text{ z.B.}$$

$$\nu(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 10x^3 - 15x^4 + 6x^5 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$



Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \nu(1-x) &= \begin{cases} 0 & \text{für } 1-x \leq 0 & \Leftrightarrow x \geq 1 \\ 1 & \text{für } 1-x \geq 1 & \Leftrightarrow x \leq 0 \\ 10(1-x)^3 - 15(1-x)^4 + 6(1-x)^5 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ &= 1 - \nu(x) \end{aligned}$$

$k = 2$, da aus $\nu'(x) = 30x^2 - 60x^3 + 30x^4$ und $\nu''(x) = 60x - 180x^2 + 120x^3$ folgt:
 $\nu''(0) = 0$; $\nu''(1) = 0$.

Weiterhin besteht eine Symmetrie zu $x = 0.5$.

Es seien $\sigma > 1$; $\beta > 0$ gegeben. Aus

$$\xi = \frac{2\pi}{(\sigma^2 - 1)\beta} > 0 \text{ und } \xi' = \sigma^2\xi > \xi > 0$$

wird $I = [\xi, \xi']$ entsprechend Satzvoraussetzung gebildet.. Nun konstruieren wir ψ über $\hat{\psi}$ mit dem Träger I :

$$\hat{\psi}(\omega) = \sqrt{A'} \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{\omega-\xi}{\sigma\xi-\xi}\right)\right) & \text{für } \xi \leq \omega \leq \sigma\xi \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{\omega-\sigma\xi}{\sigma^2\xi-\sigma\xi}\right)\right) & \text{für } \sigma\xi \leq \omega \leq \sigma^2\xi = \xi' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

A' wird später über die Normierung von ψ bestimmt. Weiter sei $\sigma = 2$; $\beta = 1$. \curvearrowright
 $\xi = \frac{2\pi}{3\beta} = \frac{2}{3}\pi$; $\xi' = \frac{8}{3}\pi$; $\xi' - \xi = 2\pi$.

Noch zu zeigen ist

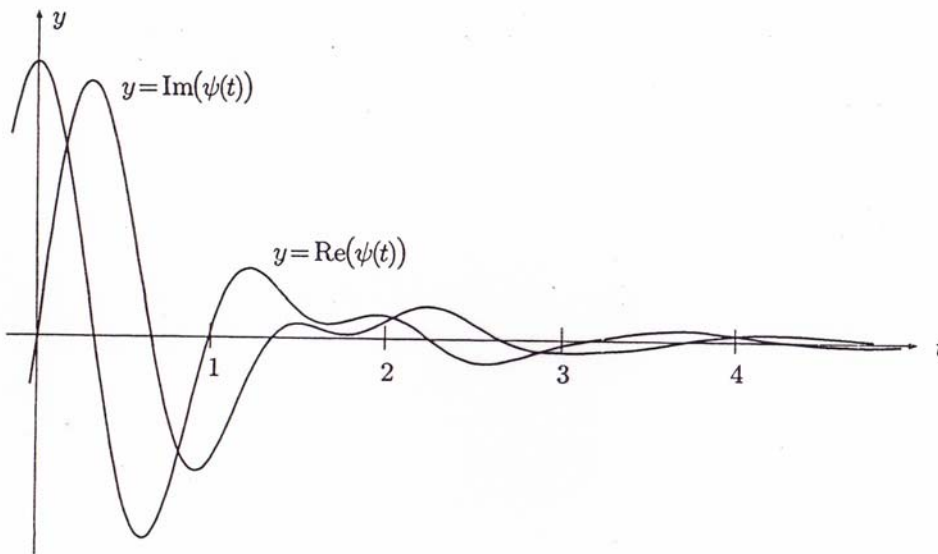
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(\sigma^k \omega) \right|^2 = A'.$$

Für $\omega < 0$ gilt $\sigma^k \omega < 0$ \curvearrowright entsprechende Summanden $\equiv 0$.

Für $\omega \geq 0$ gilt $\exists k^* \in \mathbb{Z} \mid \xi \leq \sigma^{k^*} \omega \leq \sigma \xi \quad \wedge \quad \sigma \xi \leq \sigma^{k^*+1} \omega \leq \sigma^2 \xi$. D.h., die Summe erstreckt sich nur über k^* und $k^* + 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(\sigma^k \xi) \right|^2 &= A' \left(\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{\sigma^{k^*} \omega - \xi}{\sigma \xi - \xi} \right) \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{\sigma^{k^*+1} \omega - \sigma \xi}{\sigma^2 \xi - \sigma \xi} \right) \right) \right) \\ &= A' \left(\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{\sigma^{k^*} \omega - \xi}{\sigma \xi - \xi} \right) \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{\sigma (\sigma^{k^*} \omega - \xi)}{\sigma (\sigma \xi - \xi)} \right) \right) \right) \\ &= A' \end{aligned}$$

Die inverse Fouriertransformation liefert ψ , das DAUBECHIES-GROSSMANN-MEYER-Wavelet zu $\sigma = 2$; $\beta = 1$.

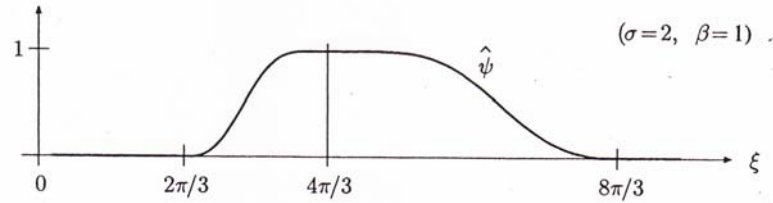


Weiter gilt /2/

$$A' = \frac{1}{\ln \sigma} = \frac{1}{\ln 2}; \quad A \geq \frac{\pi A'}{\beta} = \frac{\pi}{\ln 2}$$

Beispiel 5.4 Das MEYER-Wavelet mit

$$\widehat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\frac{\omega}{2}} (\mu(\omega) + \mu(-\omega))$$



mit der definierenden Funktion $\mu(\omega)$ für $\sigma = 2$ und $\beta = 1$

$$\mu(\omega) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3\omega}{2\pi} - 1\right)\right) & \text{für } \frac{2\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{4\pi}{3} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3\omega}{4\pi} - 1\right)\right) & \text{für } \frac{4\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{8\pi}{3} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

liefert ein straffes Frame mit der Framekonstanten $A = 1$. Außerdem gilt $\|\psi\|_{L_2}^2 = 1$, so dass das Frame $\psi = \{\psi_{mn}\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ bildet.

Beweis: Es sei $I = [\frac{2}{3}\pi; \frac{4}{3}\pi]$, $J = [\frac{4}{3}\pi; \frac{8}{3}\pi]$. Mit $\|\psi\|_{\mathbb{L}_2}^2 = \|\widehat{\psi}\|_{\mathbb{L}_2}^2$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{\mathbb{L}_2}^2 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{|\omega| \in I} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1\right)\right) d\omega + \int_{|\omega| \in J} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{4\pi}|\omega| - 1\right)\right) d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[2 \cdot \frac{2\pi}{3} \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu(x)\right) dx + 2 \cdot \frac{4\pi}{3} \int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu(x)\right) dx \right] \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 \left(1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu(x)\right)\right) dx + \frac{4}{3} \int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu(x)\right) dx \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu(x)\right) dx = 1, \text{ da} \end{aligned}$$

aufgrund der Symmetrie von ν bezüglich $x = 0.5$ gilt $\nu(1-x) = 1 - \nu(x) = 1 - \nu(\frac{1}{2} - x)$ und somit auch

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu(x)\right) dx &= \int_0^{0.5} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu(x)\right) dx + \int_{0.5}^1 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu(x)\right) dx \\ &= \int_0^{0.5} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu(x)\right) dx + \int_0^{0.5} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}(1 - \nu(\frac{1}{2} - x))\right) dx \\ &= \int_0^{0.5} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu(x)\right) dx + \int_0^{0.5} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\nu(x)\right) dx = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Beispiel 5.5 *Der Mexikanerhut mit*

$$\widehat{\psi}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt[4]{\pi} \omega^2 \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right)$$

hat keinen kompakten Träger. \curvearrowright Es wird kein festes Frame $\psi. = \psi_{mn}$ erzeugt. Mit

$$\psi^j(t) = 2^{-\frac{j}{N}} \psi(2^{-\frac{j}{N}} t); \quad j = 0, \dots, N-1$$

wird die Familie

$$\psi. = \{\psi_{mn}^j \mid 0 \leq j \leq N-1; \quad n, m \in \mathbb{Z}\}$$

gebildet, die zu einer Überlagerung von N Gittern im Phasenraum führt. Das entspricht „ N Stimmen pro Oktave“. Dann gelten die Abschätzungen für A, B , abhängig von β, N und $\sigma = 2$ entsprechend Tabelle (/2/ S. 100):

N	1			2		
b_0/π	A	B	B/A	A	B	B/A
0.25	13.091	14.183	1.083	27.273	27.278	1.000
0.50	6.546	7.092	1.083	13.637	13.639	1.000
0.75	4.364	4.728	1.083	9.091	9.093	1.000
1.00	3.223	3.596	1.116	6.768	6.870	1.015

N	3			4		
b_0/π	A	B	B/A	A	B	B/A
0.25	40.914	40.914	1.000	54.552	54.552	1.000
0.50	20.457	20.457	1.000	27.276	27.276	1.000
0.75	13.638	13.638	1.000	18.184	18.184	1.000
1.00	10.178	10.279	1.010	13.586	13.690	1.007

5.3 Multiskalenanalyse - MSA

Sie wurde begründet von MEYER und MALLAT und stellt einen eigenständigen Weg zur Diskreten Wavelettransformation dar. Das Ziel lautet: Konstruktion sehr schneller Algorithmen zur Diskreten Wavelettransformation, damit sie im Vergleich mit der FFT in der Praxis eine Chance hat. Dazu nötig sind Wavelets, deren Frame $(\psi, 2, 1)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ bildet:

$$f = \sum_{m,n} (f, \psi_{mn}^{2,1})_{\mathbb{L}_2} \psi_{mn}^{2,1}$$

Die sogenannte MSA bietet die Möglichkeit, solche Waveletbasen zu konstruieren.

5.3.1 Einführung

Motivation:

Aufspaltung des Signals $f \in \mathbb{V}_{-1} \subset \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ in seinen

hochfrequenten

und

niederfrequenten Anteil

↓

↓

2. $\mathbb{W}_0 \oplus \mathbb{V}_0 = \mathbb{V}_{-1}$

\mathbb{W}_0 als orthogonales Komplement zu \mathbb{V}_0 bzgl. \mathbb{V}_{-1} enthält die „rauen“ Anteile.

Die Projektion von f auf \mathbb{W}_0 sei Q_0f .

↷

1. durch orthogonale Projektion P_0f

↔ auf $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{V}_{-1}$, der die „glatten“ Funktionen von \mathbb{V}_{-1} enthält.

$$\mathbb{V}_{-1} = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{W}_0$$

$$f = P_0f + Q_0f$$

Analoges Vorgehen mit P_0f ergibt Projektoren P_1, Q_1 , für die gilt:

$$P_1(P_0f) = P_1f; \quad Q_1(Q_0f) = Q_1f.$$

Damit folgt:

$$P_0f = P_1f + Q_1f \quad \hat{=} \quad \mathbb{V}_0 = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{W}_1$$

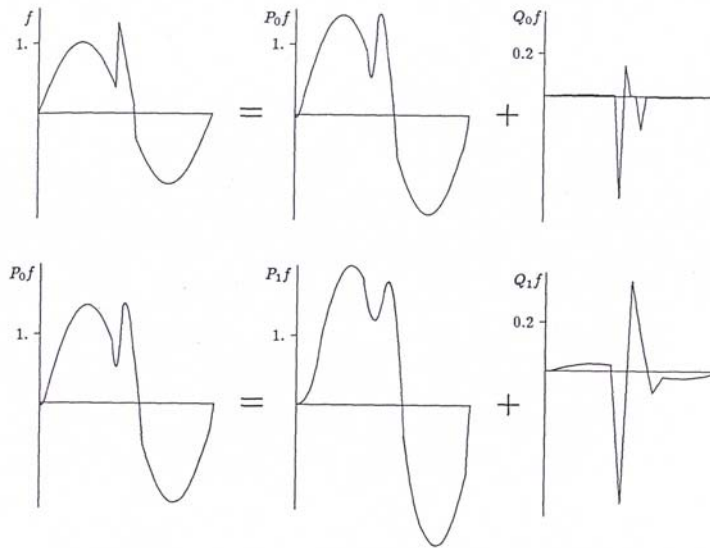
$$f = P_1f + Q_1f + Q_0f$$

⋮

$$f = \underbrace{P_nf} + \underbrace{Q_nf + Q_{n-1}f + \dots + Q_0f}$$

Das entspricht der Zerlegung des Signals in ein Gemisch niedriger Frequenzen (P_nf) und in Frequenzbänder hoher Frequenzen (Q_if). Die Q_if enthalten damit Anteile von f bestimmter Detailgröße entsprechend dem überstrichenen Frequenzband, wobei Q_0f dem Band mit den höchsten Frequenzen, d.h. den kleinsten Details entspricht. Dieser Zerlegungsprozess heißt Multi-Skalen-Analyse (MSA) und besitzt eine gewisse Ähnlichkeit zum Zerlegungsprozess bei Mehrgitterverfahren.

Beispiel 5.6 Funktionszerlegung (/2/, S. 104)



Definition 5.6 Eine Multi-Skalen-Analyse (MSA) ist eine aufsteigende Folge abgeschlossener Unterräume $\mathbb{V}_m \subset \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$:

$$\{\mathbf{0}\} \subset \dots \subset \mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{V}_{-1} \subset \dots \subset \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$$

so dass gilt:

$$a) \overline{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{V}_m} = \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \bigcap_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{V}_m = \{\mathbf{0}\}$$

Vollständigkeitsaxiom Separationsaxiom

$$b) \mathbb{V}_{j+1} = D_2(\mathbb{V}_j) \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad (\text{Skalierungseigenschaft})$$

$$c) \exists \phi \in \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_1 \quad | \quad \{\phi(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ bilden eine ONB von } \mathbb{V}_0.$$

Die Funktion ϕ heißt **Skalierungsfunktion**.

Bemerkung 5.4 $f \in \mathbb{V}_j$ enthalten nur Details mit der Ausdehnung $\geq 2^j$ auf der Zeitachse; Je „negativer“ j , umso feinere Details sind enthalten, bis im Grenzwert jedes $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ erreicht wird. ($\hat{=}$ Tiefpassfilter)

Bemerkung 5.5 Aus b) folgt

$$f(\cdot) \in \mathbb{V}_{j+1} \iff f(2\cdot) \in \mathbb{V}_j \iff f(2^{j+1}\cdot) \in \mathbb{V}_0.$$

Die Eigenschaft b) zeichnet die MSA aus, denn

Bemerkung 5.6 Aus c) folgt:

$$\mathbb{V}_0 = \{f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \mid f(t) = \sum_k c_k \phi(t-k); \sum_k |c_k|^2 < \infty\}.$$

Analog zu den Waveletfunktionen ψ_{mn} werden $\phi_{jk}(t)$ gebildet:

$$\phi_{jk}(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \phi\left(\frac{t - k2^j}{2^j}\right) = 2^{-\frac{j}{2}} \phi\left(\frac{t}{2^j} - k\right) \quad (5.3.1).$$

Bemerkung 5.7 Mit b) folgt dann, dass $\{\phi_{jk} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ eine Orthonormalbasis von \mathbb{V}_j bilden. ϕ_{jk} und $\phi_{j,k+1}$ sind um die Schrittweite 2^j gegeneinander verschoben. Damit sind die Räume \mathbb{V}_j skalierte Versionen des Grundraumes \mathbb{V}_0 , der durch Translation der Skalierungsfunktion ϕ aufgespannt wird.

Beispiel 5.7 Wähle

$$\phi_H = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und setze \mathbb{V}_0 so fest, dass er die Funktionen enthält, die auf den Intervallen $[k; k+1)$ konstant sind:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_0 &= \overline{\text{span}\{\phi_{0k} \mid k \in \mathbb{Z}\}} \quad \curvearrowright \\ \mathbb{V}_j &= D_{2^j}(\mathbb{V}_0); \quad \text{für } j \neq 0. \end{aligned}$$

Mit dieser Definition sind die Inklusion der Räume, das Separationsaxiom und das Vollständigkeitsaxiom (wegen der Dichtheit der Treppenfunktionen) erfüllt. Damit ist $\{\mathbb{V}_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ eine MSA. Diese Wahl von ϕ führt zum HAAR-Wavelet.

Wegen der echten Inklusionen der Teilräume \mathbb{V}_j werden paarweise orthogonale Teilräume $\mathbb{W}_j \subset \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ konstruiert, damit $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ vollständig ausgefüllt werden kann:

$$\mathbb{V}_{j-1} = \mathbb{V}_j \oplus \mathbb{W}_j; \quad \mathbb{W}_j \perp \mathbb{V}_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (5.3.2)$$

Außerdem gilt:

$$\mathbb{W}_{j+1} = D_2(\mathbb{W}_j) \quad \text{bzw.} \quad f \in \mathbb{W}_j \iff f(2^j \cdot) \in \mathbb{W}_0.$$

Satz 5.9 Hat $\{\mathbb{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ die Eigenschaften bis einschließlich a) einer MSA, so sind die Teilräume \mathbb{W}_j paarweise orthogonal, und es gilt

$$\mathbb{L}_2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{W}_j}.$$

Beweis: /1/, S. 108

Es sei P_j der Orthoprojektor von $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ auf \mathbb{V}_j , dann enthält das Bild $P_j f$ eines Signals $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ noch alle Details $\geq 2^j$ auf der Zeitachse. Es gilt:

$$P_j f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f, \phi_{jk}) \phi_{jk}.$$

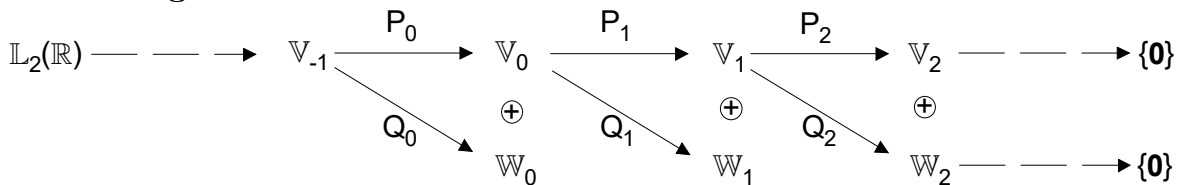
P_j entspricht also einem Tiefpassfilter.

Es sei Q_j der Orthoprojektor von $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ auf \mathbb{W}_j . Wegen (5.3.2) folgt

$$P_{j-1} = P_j + Q_j \quad \text{bzw.} \quad Q_j = P_{j-1} - P_j.$$

Damit enthält $P_{j-1} f$ alle Details $\geq 2^{j-1}$ auf der Zeitachse. $Q_j f$ entfernt daraus die Details $\geq 2^j$. Folglich entspricht Q_j einem (Band-)Filter, der Details der Länge $2^{j-0.5} = 2^j \frac{1}{\sqrt{2}}$ herausholt.

Bemerkung 5.8



Offenbar gilt:

$$\mathbb{V}_m = \bigoplus_{j \geq m+1} \mathbb{W}_j \xrightarrow{m \rightarrow -\infty} \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{W}_j = \mathbb{L}_2(\mathbb{R}).$$

Damit lässt sich $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ zerlegen in

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j f = \sum_{j \geq m+1} Q_j f + \sum_{j \leq m} Q_j f = P_m f + \sum_{j \geq m+1} Q_j f,$$

d.h. in einem Tiefpass und eine Summe von Bandfiltern.

Ausblick:

Für jede MSA existiert ein Wavelet ψ , dessen translatierte und dilatierte Versionen $\psi_{mk}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - k)$ für festes $m \in \mathbb{Z}$ eine Orthonormalbasis von \mathbb{W}_m bilden. Das Wavelet lässt sich aus der Skalierungsfunktion explizit konstruieren. Für $Q_m f$ gilt dann: $Q_m f = \sum_{-\infty}^{\infty} (f, \psi_{mk}) \psi_{mk}$. Die Gesamtheit aller ψ_{mk} , d.h. die Familie ψ , ist dann eine Orthonormalbasis von $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$.

5.3.2 Die Skalierungsfunktion

Sie ist wichtigster Bestandteil jeder MSA, denn nach Bemerkung 5.6 aus 5.3.1 wird mit ϕ der Raum \mathbb{V}_0 festgelegt, danach mit Definition b) die anderen \mathbb{V}_j .

$\phi = \phi_{0,0}$ muss so festgelegt werden, dass die Funktionen $\phi_{0k} = \phi(\cdot - k)$ orthonormiert sind (s. c) der Definition). Notfalls muss mit dem Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren nachgeholfen werden. ϕ muss außerdem so festgelegt werden, dass die Inklusionen der Räume und das Vollständigkeits- bzw. Separationsaxiom gelten.

Satz 5.10 *Es sei $\phi \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, $\phi \neq 0$ gewählt,*

$$\mathbb{V}_0 = \left\{ f \in \mathbb{L}_2 \mid f(t) = \sum_k c_k \phi(t - k); \quad \sum_k |c_k|^2 < \infty \right\}; \quad \mathbb{V}_{j+1} = D_2 \mathbb{V}_j; \quad j \in \mathbb{Z}$$

Gilt $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{V}_{-1}$, so folgt $\{\mathbf{0}\} \subset \dots \subset \mathbb{V}_1 \subset \mathbb{V}_0 \subset \mathbb{V}_{-1} \subset \dots \subset \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$

Satz 5.11

$$\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{V}_{-1} \iff \exists h. \in \mathbf{I}^2(\mathbb{Z}) \mid \phi(t) = \sqrt{2} \sum_{-\infty}^{\infty} h_k \phi(2t - k) \quad f.\ddot{u}.a. \quad (5.3.3)$$

Diese Darstellung für $\phi(t)$ heißt **Skalierungsgleichung**.

Beweis:

I) \implies

Sei $\mathbb{V}_0 = \{f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \mid f(t) = \sum_k c_k \phi(t - k), \sum_k |c_k|^2 < \infty\}$

$$\begin{aligned} f \in \mathbb{V}_{-1} &\iff f(2^{-1}\cdot) \in \mathbb{V}_0 \quad \curvearrowright \\ \phi_{-1,k} &= 2^{\frac{1}{2}} \phi\left(\frac{t - k2^{-1}}{2^{-1}}\right) \text{ ist ONB in } \mathbb{V}_{-1}. \end{aligned}$$

\curvearrowright

$$\mathbb{V}_{-1} = \left\{ f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \mid f(t) = \sum_k h_k \phi_{-1,k}; \quad h. \in \mathbf{I}^2(\mathbb{Z}) \right\}$$

\curvearrowright

$$\phi(t) = \sum_k h_k \sqrt{2} \phi(2t - k) \quad f.\ddot{u}.a. \text{ mit } h. \in \mathbf{I}^2(\mathbb{Z})$$

II) \longleftarrow

Sei

$$\begin{aligned} \phi(t - l) &= \sqrt{2} \sum_k \tilde{h}_k \phi(2(t - l) - k) \\ &= \sqrt{2} \sum_k \tilde{h}_k \phi(2t - (k + 2l)) \end{aligned}$$

↪

$$\phi_{0,l} = \phi(t-l) = \sum_k h_k \phi_{-1,k+2l} \in \mathbb{V}_{-1}$$

↪ $\mathbb{V}_0 \subset \mathbb{V}_{-1}$ ■

Bemerkung 5.9 Die Skalierungsgleichung regiert die MSA, da h die Skalierungsfunktion eindeutig festlegt.

Bemerkung 5.10 h muss für einen schnellen Algorithmus verfügbar sein, ϕ und ψ nicht.

Bemerkung 5.11 Die Skalierungsgleichung beschreibt die „Selbstähnlichkeit“ von ϕ (analog zu der Theorie der fraktalen Mengen), was zu Einschränkungen bei der Wahl von ϕ führt.

Eigenschaften der h_k :

Aus der Tatsache, dass $\{\phi_{0k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis in \mathbb{V}_0 ist, folgt:

1. die Konsistenzbedingung $\delta_{0n} = \sum_k h_k \overline{h_{2n+k}} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (5.3.4)$
2. $\sum_k |h_k|^2 = 1$.

Satz 5.12 Sei $h \in l^1(\mathbb{Z})$; $\int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt = q \implies \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k = \sqrt{2}$.

Satz 5.13 Besitzt die Skalierungsfunktion ϕ einen kompakten Träger, so sind höchstens endlich viele $h_k \neq 0$.

Satz 5.14 ϕ besitze einen kompakten Träger, es sei

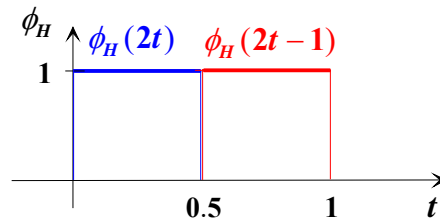
$$\begin{aligned} a &= a(\phi) = \inf\{t \mid \phi(t) \neq 0\} > -\infty \\ b &= b(\phi) = \sup\{t \mid \phi(t) \neq 0\} < +\infty, \end{aligned}$$

dann gilt: $a, b \in \mathbb{Z}$, und es sind höchstens die h_k mit $a \leq k \leq b$ ungleich Null.

Beweis: /1/

Beispiel 5.8

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_H = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \phi_H(2t) + \phi_H(2t-1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{-1,0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{-1,1} \\ &= h_0\phi_{-1,0} + h_1\phi_{-1,1} \end{aligned}$$



Für alle anderen h_k gilt: $h_k = 0$. Außerdem genügt die Funktion ϕ der Skalierungsgleichung und $\sum_k |h_k|^2 = 1$.

Da im schnellen Algorithmus nur noch die h_k von Bedeutung sind, werden im Weiteren ϕ mit kompaktem Träger benutzt.

Unter welchen Bedingungen an ϕ sind in der MSA das Vollständigkeits- und das Separationsaxiom erfüllt?

Satz 5.15 $\phi \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ erfülle $|\phi(t)| \leq \frac{c}{1+t^2}$; $t \in \mathbb{R}$; $\{\phi_{0k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sei eine Orthonormalbasis von \mathbb{V}_0 . Dann gilt

$$\bigcap_j \mathbb{V}_j = \{0\} \quad \wedge \quad \overline{\bigcup_j \mathbb{V}_j} = \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \quad \iff \quad \left| \int \phi dt \right| = 1.$$

Beweis: Blatter S. 114-117

Wann bilden die ganzzahligen Translatierten von ϕ eine Orthonormalbasis von \mathbb{V}_0 ?

Satz 5.16 Es sei $\phi \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$. $\{\phi_k = \phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ bilden ein Orthonormalsystem \iff
 $\Phi(\omega) = \sum_l |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 = \frac{1}{2\pi}$ f.ü.a.

Beweis: (zur Information)

Sei $\phi \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
(\phi_0, \phi_k) &= (\widehat{\phi}_0, \widehat{\phi}_k) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\omega) \overline{\exp(-ik\omega) \widehat{\phi}(\omega)} d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\phi}(\omega)|^2 \exp(ik\omega) d\omega \\
&= \sum_l \int_0^{2\pi} |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 \exp(ik\omega) d\omega \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_l |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 \exp(ik\omega) d\omega \quad (\text{Satz von FUBINI}) \\
&= \int_0^{2\pi} \Phi(\omega) \exp(ik\omega) d\omega \\
&= 2\pi \widehat{\Phi}(-k) \stackrel{!}{=} \delta_{0k} \quad (\widehat{\Phi} \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch}) \\
\iff \widehat{\Phi}(-k) &= \frac{1}{2\pi} \delta_{0k} \quad \curvearrowright \quad \Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{f.ü.a.}
\end{aligned}$$

■

5.3.3 Konstruktion von Skalierungsfunktion und Mutterwavelet

Die Rechnung wird in den Raum der Fouriertransformierten verlagert, da dort das Problem den analytischen Methoden leichter zugänglich ist. Nach Anwendung der Fouriertransformation auf die Skalierungsgleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \phi(2t - k) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \phi(2(t - \frac{k}{2})) \quad \curvearrowright \\
\widehat{\phi}(\omega) &= \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-i\frac{\omega}{2}k} \frac{1}{2} \widehat{\phi}(\frac{\omega}{2}) \quad (R1, R3) \\
\widehat{\phi}(\omega) &= H\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (5.3.5) \\
\text{mit } H\left(\frac{\omega}{2}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-i\frac{\omega}{2}k}.
\end{aligned}$$

Die Funktion $H(\omega)$ ist wegen $\|h.\| = 1$ f.ü.a. konvergent, 2π -periodisch und ein trigonometrisches Polynom, wenn nur endlich viele $h_k \neq 0$ sind.

Wegen Satz 5.16 gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} &= \sum_l \left| \widehat{\phi}(\omega + 4\pi l) \right|^2 + \sum_l \left| \widehat{\phi}(\omega + 2\pi + 4\pi l) \right|^2 \\
&= \sum_l \left| H\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi l\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi l\right) \right|^2 + \sum_l \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi l\right) \right|^2 \\
&= \left| H\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \sum_l \left| \widehat{\phi}(\omega + 2\pi l) \right|^2 + \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \sum_l \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi l\right) \right|^2 \\
&= \left| H\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right) + \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \Phi\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \\
&= \left(\left| H\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 + \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \right) \frac{1}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die "Fourierversion" der Konsistenzbedingung:

Satz 5.17 Die erzeugende Funktion H einer MSA genügt der Gleichung

$$|H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad f.\ddot{u}.a.$$

Damit folgt:

- $|H(\omega)| \leq 1; \quad \omega \in \mathbb{R}$
- Mit $\widehat{\phi}(0) \neq 0$ ergibt sich: $\widehat{\phi}(0) = H(0) \widehat{\phi}(0) \quad \leadsto \quad H(0) = 1$
- $|H(0 + \pi)|^2 = 1 - |H(0)|^2 = 0 \quad \leadsto \quad H(\pi) = 0$
- $H(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k = 1 \quad \leadsto \quad \sum_k h_k = \sqrt{2}$
- $H(\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-ik\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k (-1)^k = 0 \quad \leadsto \quad \sum_k h_k (-1)^k = 0.$

Satz 5.18 $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}), \quad f \in \mathbb{W}_0$

$$\iff \exists \nu = \nu(\cdot) \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}/2\pi) \quad | \quad \widehat{f}(\omega) = \exp(i\frac{\omega}{2}) \nu(\omega) \overline{H(\frac{\omega}{2} + \pi)} \widehat{\phi}(\frac{\omega}{2}).$$

Die Waveletbasis muss den Raum $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ ausfüllen. Durch Abspaltung der Räume \mathbb{W}_j werden Bandfilter definiert. Die Waveletbasis ist Basis in den Räumen \mathbb{W}_j , das Mutterwavelet ψ muss in \mathbb{W}_0 liegen. \leadsto Ansatz für $\widehat{\psi}$:

$$\widehat{\psi}(\omega) = e^{i\frac{\omega}{2}} \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (5.3.9)$$

Satz 5.19 Mit dieser Definition von ψ bilden die Funktionen $\{\psi_{0k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von \mathbb{W}_0 .

Beweis: $1 \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}/2\pi) \rightsquigarrow \psi \in \mathbb{W}_0$ nach dem vorherigen Satz $\rightsquigarrow \psi_{0k} \in \mathbb{W}_0$
 Orthonormalität gilt nach Satz 5.16:

$$\begin{aligned}
 \Psi(\omega) &= \sum_l \left| \widehat{\psi}(\omega + 2\pi l) \right|^2 \\
 &= \sum_l \left| \widehat{\psi}(\omega + 4\pi l) \right|^2 + \sum_l \left| \widehat{\psi}(\omega + 2\pi + 4\pi l) \right|^2 \\
 &= \sum_l \left| \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi l\right)} \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi l\right) \right|^2 + \sum_l \left| \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi l\right)} \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi l\right) \right|^2 \\
 &= \sum_l \left| \overline{H\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi l\right) \right|^2 + \sum_l \left| \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi l\right) \right|^2 \\
 &= \left| \overline{H\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|^2 \sum_l \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi l\right) \right|^2 + \left| \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \right|^2 \sum_l \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2\pi l\right) \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\left| \overline{H\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right|^2 + \left| \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \right|^2 \right) = \frac{1}{2\pi}
 \end{aligned}$$

Es sei $f \in \mathbb{W}_0 \rightsquigarrow \exists \nu = \nu(\cdot) \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}/2\pi)$ so dass gilt:

$$\begin{aligned}
 \widehat{f}(\omega) &= \nu(\omega) \exp(i\frac{\omega}{2}) \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (\text{Satz 5.18}) \\
 &= \nu(\omega) \widehat{\psi}(\omega) \quad (\text{nach 5.16}).
 \end{aligned}$$

Es gilt: $\nu(\omega) = \sum_k \nu_k \exp(-ik\omega)$ mit $\sum_k |\nu_k|^2 = \|\nu\| < \infty$. \rightsquigarrow

$$\begin{aligned}
 \widehat{f}(\omega) &= \sum_k \nu_k \exp(-ik\omega) \widehat{\psi}(\omega) \\
 \stackrel{R1}{\underset{f.\ddot{u}.a.}{\rightleftharpoons}} f(t) &= \sum_k \nu_k \psi(t - k) \\
 &= \sum_k \nu_k \psi_{0k} \quad \text{ist konvergent.}
 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \{\psi_{0k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ bilden eine Basis in \mathbb{W}_0 . ■

Bemerkung 5.12 Der Ansatz für $\widehat{\psi}(\omega)$ ist nicht zwingend. Faktoren

$$(-1) e^{i\alpha} e^{-iN\omega}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$; $N \in \mathbb{N}$ sind möglich. Dabei entspricht die Multiplikation mit $e^{-iN\omega}$ einer Verschiebung des Trägers von ψ um N Einheiten nach rechts.

Rückübersetzung in den Zeitbereich:

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}(\omega) &= e^{i\frac{\omega}{2}} \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k \overline{h_k} e^{i(\frac{\omega}{2} + \pi)k} e^{i\frac{\omega}{2}} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (\text{wegen (5.3.5)}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k (-1)^k \overline{h_k} e^{i\frac{\omega}{2}(k+1)} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\tilde{k}} (-1)^{(\tilde{k}-1)} \overline{h_{-\tilde{k}-1}} e^{-i\frac{\omega}{2}\tilde{k}} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{mit } k = -\tilde{k} - 1
\end{aligned}$$

Mit (R1) und (R3) folgt:

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \sqrt{2} \sum_k (-1)^{k-1} \overline{h_{-k-1}} \phi(2t - k) \\
&= \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2t - k) \quad \text{mit } g_k = (-1)^{k-1} \overline{h_{-k-1}}
\end{aligned}$$

Eine andere zulässige Definition der g_k ist:

$$g_k = (-1)^k \overline{h_{2N-1-k}}.$$

Wenn $h_k \neq 0$ für $0 \leq k \leq 2N - 1$ folgt $g_k \neq 0$ für $0 \leq k \leq 2N - 1$,

\curvearrowright Summation in den Algorithmen: $0 \leq k \leq 2N - 1$

Satz 5.20 *Es sei $\{\mathbb{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ eine MSA mit der Skalierungsfunktion ϕ und der erzeugenden Funktion H , $\psi(t) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2t - k)$ mit $g_k = (-1)^{k-1} \overline{h_{-k-1}}$. Dann folgt:*

$$\{\psi_{jk} \mid j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

ist eine Orthonormalbasis von $\mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, die sogenannte Waveletbasis. (Beweis /1/, S. 124)

Beispiel 5.9 *HAAR-Wavelet:*

$$\phi = \phi_H = \begin{cases} 1 & t \in [0; 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \curvearrowright \quad \widehat{\phi}_H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{si}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-i\frac{\omega}{2}}$$

Nach der Skalierungsgleichung gilt:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{-1,0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{-1,1} \quad \curvearrowright \quad h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \curvearrowright$$

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-ik\omega} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 + e^{-i\omega}) \\ &= e^{-i\frac{\omega}{2}} \frac{1}{2} (e^{i\frac{\omega}{2}} + e^{-i\frac{\omega}{2}}) \\ &= e^{-i\frac{\omega}{2}} \cos \frac{\omega}{2} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} H\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) &= e^{-i\frac{\omega}{4}} \cos \frac{\omega}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{si}\left(\frac{\omega}{4}\right) e^{-i\frac{\omega}{4}} \\ &= e^{-i\frac{\omega}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos \frac{\omega}{4} \sin\left(\frac{\omega}{4}\right) 2}{\frac{\omega}{4}} \\ &= e^{-i\frac{\omega}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} \\ &= \widehat{\phi}_H(\omega) \end{aligned}$$

Mit dem Ansatz $\widehat{\psi}(\omega) = e^{i\frac{\omega}{2}} \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ ergibt sich nach der Rücktransformation eine gegenüber ψ_H um eine Einheit nach links verschobene und mit (-1) multiplizierte Funktion ψ . Deshalb wird folgender Ansatz benutzt:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(\omega) &= -e^{-i\omega} e^{i\frac{\omega}{2}} \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= -e^{-i\frac{\omega}{2}} \cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)\right) e^{i\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{si}\left(\frac{\omega}{4}\right) e^{-i\frac{\omega}{4}} \\ &= -e^{-i\frac{\omega}{2}} \left(-\sin \frac{\omega}{4}\right) \cdot i \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{si}\left(\frac{\omega}{4}\right) \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{4}\right)}{\frac{\omega}{4}} e^{-i\frac{\omega}{2}} \\ &= \widehat{\psi}_H(\omega) \end{aligned}$$

Die Berechnung der g_k erfolgt durch Rückübersetzung von $\widehat{\psi}_H(\omega)$ in den Zeitbereich:

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}(\omega) &= -e^{-i\omega} e^{i\frac{\omega}{2}} \overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k \bar{h}_k e^{ik\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} (-e^{-i\frac{\omega}{2}}) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (\text{Einsetzen von } H) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k (-1)^k \bar{h}_k e^{i(k-1)\frac{\omega}{2}} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) (-1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k (-1)^{k+1} \bar{h}_k e^{-i(1-k)\frac{\omega}{2}} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\tilde{k}} (-1)^{2-\tilde{k}} \bar{h}_{1-\tilde{k}} e^{-i\tilde{k}\frac{\omega}{2}} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (\tilde{k} = 1 - k).
\end{aligned}$$

damit ergibt sich für das Wavelet ψ :

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \sqrt{2} \sum_k (-1)^{2-k} \bar{h}_{1-k} \phi(2t - k) \\
&= \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(2t - k) \quad \text{mit } g_k = (-1)^{2-k} \bar{h}_{1-k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_k &= (-1)^{2-k} \bar{h}_{1-k} = (-1)^k \bar{h}_{1-k} \\
g_0 &= \bar{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
g_1 &= -\bar{h}_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2t - 1) \right) \\
&= \phi(2t) - \phi(2t - 1) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_{-1,0} - \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_{-1,1} \\
&= \psi_H(t)
\end{aligned}$$

Da mit $\phi = \phi_H$ eine MSA gebildet werden kann (s. vorhergehendes Beispiel) führen zwei Wege zum HAARwavelet:

1. Konstruktion über die Räume \mathbb{V}_m , \mathbb{W}_m und die dazugehörigen Projektionsoperatoren P_m , Q_m und

2. die allgemeine Konstruktion über das induzierte Wavelet.

Zusammenfassung:

Satz 5.21 Sei $\phi \in \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ und genüge der Skalierungsgleichung

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{-\infty}^{\infty} h_k \phi(2t - k); \quad \int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt \neq 0;$$

$$f \in \mathbb{V}_j \iff f(2^j \cdot) \in \mathbb{V}_0;$$

$$\mathbb{V}_0 = \{f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \mid f(t) = \sum_k c_k \phi(t - k); \quad \sum_k |c_k|^2 < \infty\}.$$

Wenn Konstanten A, B existieren mit

$$0 < A \leq B \text{ und } A \leq \Phi(\omega) = \sum_l |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 \leq B \quad f.\ddot{u}.a., \text{ dann gilt:}$$

1. $\{\phi_{0k} = \phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ist ein Frame mit den Konstanten $2\pi A$ und $2\pi B$.

2. $\widehat{\phi}(\omega) = \frac{\widehat{\phi}(\omega)}{\sqrt{2\pi\Phi(\omega)}}$ definiert eine MSA mit denselben \mathbb{V}_j ;
 $\{\phi_{0k} = \phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ist Orthonormalbasis von \mathbb{V}_0 .

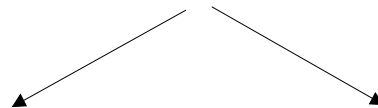
Beweis: /1/, S. 128ff

Bemerkung 5.13 Jede MSA induziert orthogonale Waveletfamilien. Die Umkehrung gilt nicht (Gegenbeispiel s. /2/, S. 118).

Bemerkung 5.14 Verfahren zur Konstruktion einer Waveletbasis:

1. Aufstellung der Skalierungsfunktion ϕ mit nichtverschwindendem Mittelwert
2. Bildung der Räume \mathbb{V}_j
3. Prüfung, ob $\{\phi_{0k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ eine ONB von \mathbb{V}_0 ist:

$$\sum_l |\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)|^2 \stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi} \quad f.\ddot{u}.a.$$



Ja

$\{\phi_{0k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ist festes Frame

$$\widehat{\phi}(\omega) = \widehat{\phi}(\omega)$$

Nein

Suche von Konstanten A, B im Sinne des obigen Satzes

$\{\phi_{0k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ist Frame

$$\widehat{\phi}(\omega) = \frac{\widehat{\phi}(\omega)}{\sqrt{2\pi\Phi(\omega)}}$$

4. Bildung der MSA zu $\widehat{\phi}(\omega)$
5. Berechnung der Skalierungskoeffizienten h_k
6. Bildung der Waveletbasis aus Waveletfunktionen

Bemerkung 5.15 *Problematisch bei diesem Prozess sind*

- die Orthogonalisierung und
- die Bestimmung der h_k , wenn $\widetilde{\phi}$ keinen kompakten Träger besitzt.

5.4 Schnelle Algorithmen

Ausgangspunkt sind die Skalierungsgleichung und die entsprechende Gleichung für $\psi(t)$:

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sqrt{2} \sum_{-\infty}^{\infty} h_k \phi(2t - k) \\ \psi(t) &= \sqrt{2} \sum_{-\infty}^{\infty} g_k \phi(2t - k) \\ \text{mit } g_k &= (-1)^{k-1} \bar{h}_{-k-1} \quad \text{bzw.} \quad g_k = (-1)^k \bar{h}_{2N-k-1}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\phi_{jn}(t) &= 2^{-\frac{j}{2}} \phi\left(\frac{t}{2^j} - n\right) \\ &= 2^{-\frac{j}{2} + \frac{1}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \phi\left(2\left(\frac{t}{2^j} - n\right) - k\right) \\ &= 2^{-(\frac{j-1}{2})} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \phi\left(\frac{t}{2^{j-1}} - 2n - k\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \phi_{j-1, 2n+k}(t) \quad (5.4.1.a)\end{aligned}$$

und analog dazu gilt

$$\psi_{jn}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k \phi_{j-1, 2n+k}(t). \quad (5.4.1.b)$$

Diese Rekursionsformeln bilden die Basis für den schnellen Algorithmus.

5.4.1 Analyse von $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$

Die feinste in Betracht gezogene Skala gehöre zu $j = 0$.

1. Start bei $j = 0$:

$$a_{0k} = (f, \phi_{0k})_{\mathbb{L}_2} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\phi(t-k)} dt \quad (\text{numerische Integration})$$

$$P_0 f = \sum_k a_{0k} \phi_{0k}$$

2. Fortschreiten der Analyse in Richtung längerer Wellen, d.h. $j = j + 1$.

Es sei $j \geq 1$; $a_{j-1,k}$ sind bekannt.

P_{j-1} beschreibt Merkmale, die wenigstens die Ausdehnung 2^{j-1} auf der Zeitachse haben

$$P_{j-1} f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-1,k} \phi_{j-1,k}.$$

$$\begin{aligned} a_{jn} &= (f, \phi_{j,n})_{\mathbb{L}_2} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{h_k} (f, \phi_{j-1,2n+k}) \quad (\text{mit 5.4.1a}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{h_k} a_{j-1,2n+k} \quad (5.4.2) \\ P_j f &= \sum_k a_{jk} \phi_{jk} \end{aligned}$$

Das entspricht der nächstgrößeren Approximation von f . Weiter gilt

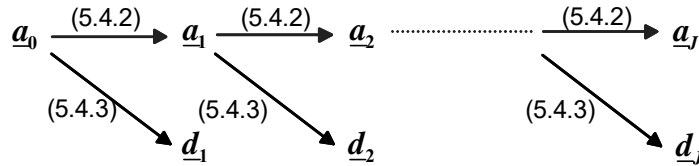
$$P_{j-1} f = P_j f + Q_j f,$$

wobei $Q_j f \in \mathbb{W}_j$ der die ONB $\{\psi_{jk}\}$ besitzt. \curvearrowright

$$\begin{aligned} Q_j f &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{jk} \psi_{jk} \\ d_{jk} &= (f, \psi_{jk}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{g_k} (f, \phi_{j-1,2n+k}) \quad (\text{mit 5.4.1.b}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{g_k} a_{j-1,2n+k} \quad (5.4.3) \end{aligned}$$

Damit befindet sich die beim Übergang aus $a_{j-1,k}$ herausgezogene Information im Vektor \underline{d}_j . Er enthält die Information über Details der Größe $\approx 2^{j-\frac{1}{2}}$ von f . f wird dabei „auf das Doppelte vergrößert“.

Rechengang:



Algorithmus:

Eingabe von \underline{a}_0 und der Zerlegungstiefe J

for $j = 1$ to J

 berechne \underline{a}_j nach (5.4.2)

 berechne \underline{d}_j nach (5.4.3)

end

Ausgabe von $\underline{a}_j, \underline{d}_1, \dots, \underline{d}_J$

Bemerkung 5.16 Der Vektor \underline{a}_0 müsste numerisch berechnet werden. Meist liegt f nur als diskreter Datensatz $\{f(k)\}$ vor, und man arbeitet mit $a_{0k} = f(k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Das ist begründet, wenn $\text{supp}\phi$ schmal ist und die $f(k)$ wenig differieren sowie $\int_{\mathbb{R}} \phi dt = 1$ gilt.

Bemerkung 5.17 Zur Auswertung der Formeln (5.4.2) und (5.4.3) sind nur die Koeffizienten h_k und g_k erforderlich, nicht ϕ und ψ !!! Diese können für jedes Wavelet ein für alle Male berechnet und abgespeichert werden. (s. beiliegende Tabellen)

5.4.2 Synthese

1. Start: Gegeben sind $\underline{a}_j, \underline{d}_1, \dots, \underline{d}_J$. Gesucht: $\underline{a}_0 \mid P_0 f = \sum_k a_{0k} \phi_{0k}$
- 2.

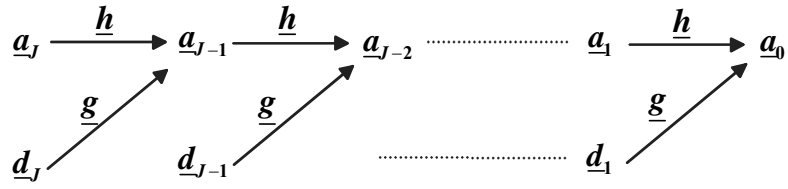
$$P_{j-1} f = P_j f + Q_j f = \sum_k a_{j,k} \phi_{j,k} + \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
 P_{j-1} f &= \sum_k a_{j-1,k} \phi_{j-1,k} \\
 a_{j-1,k} &= (P_{j-1} f, \phi_{j-1,n}) \\
 &= \sum_k a_{j,k} (\phi_{j,k}, \phi_{j-1,n}) + \sum_k d_{j,k} (\psi_{j,k}, \phi_{j-1,n}) \\
 &= \sum_k a_{j,k} h_{n-2k} + \sum_k d_{j,k} g_{n-2k} \quad (6.4.4)
 \end{aligned}$$

da aus $h_l = (\phi_{jk}, \phi_{j-1, 2k+l})$ folgt $n = 2k + l$ bzw. $l = n - 2k$.

Rechengang:



Aufwandsbestimmung:

Annahme: ϕ habe einen kompakten Träger.

$$\leadsto a(\phi) = \inf\{t \mid \phi(t) \neq 0\} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\leadsto b(\phi) = \sup\{t \mid \phi(t) \neq 0\} \stackrel{!}{=} 2N - 1; \quad N \geq 1$$

$$\leadsto h_k \neq 0; \quad g_k = (-1)^k \bar{h}_{2N-1-k} \neq 0 \quad \text{für } 0 \leq k \leq 2N - 1$$

Es sei $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \leadsto$ Information \underline{a}_0

Satz 5.22 Sei $\text{supp}(\underline{a}_0) \subset [0; 2^J]$; $\text{length}(\underline{a}_0) = 2^J$

$\leadsto \text{supp}(\underline{a}_j) \subset [-2N + 2; 2^{J-j}]$; für $j \geq 0$

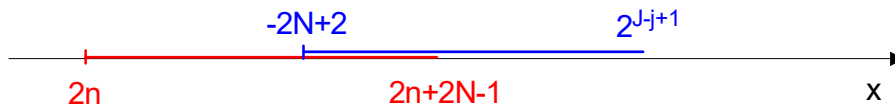
Beweis:

Induktionsanfang: $j = 0$, $\text{supp}(\underline{a}_0) \subset [-2N + 2; 2^J]$: erfüllt nach Voraussetzung

Induktionsvoraussetzung: Es sei $\text{supp}(\underline{a}_{j-1}) \subset [-2N + 2; 2^{J-j+1}]$

Induktionsschritt: $j \geq 1$: Übergang von $j - 1$ zu j :

$$\begin{aligned} a_{nj} &= \sum_{k=0}^{2N-1} \bar{h}_k a_{j-1, 2n+k} \neq 0 \\ &\iff \emptyset \neq \{2n, 2n+1, \dots, 2n+2N-1\} \cap [-2N+2; 2^{J-j+1}] \\ &\iff 2n < 2^{J-j+1} \quad \wedge \quad 2n+2N-1 \geq -2N+2 \\ &\iff n < 2^{J-j} \quad \wedge \quad n \geq -2N + \frac{3}{2} \end{aligned}$$



\leadsto

$$n \in [-2N + 2; 2^{J-j}]$$

■

Der Abbruch erfolgt nach $j = J$ Schritten, da $\text{supp}(\underline{a}_j)$ dann stagniert bei $[-2N + 2; 0)$.

Gesucht ist die Anzahl der Multiplikationen μ :

$$\text{length}(\underline{a}_j) = \text{length}(\underline{d}_j) \leq 2^{J-j} + 2N - 2$$

Zur Berechnung eines a_{jn} werden höchstens $length(\underline{h}) = 2N$ Multiplikationen gebraucht.

$$\begin{aligned}
 \mu &\leq 2 \cdot 2N \cdot \sum_{j=1}^J (2^{J-j} + 2N - 2) \\
 &= 2 \cdot 2N \cdot (2^J - 1 + J(2N - 2)) \quad (\text{geometr. Reihe}) \\
 &= 2 \cdot 2N \cdot ([2^J + 2N - 2] + (J - 1)(2N - 2) - 1) \\
 &= 2 \cdot length(\underline{h}) \cdot length(\underline{a}_0) (1 + o(1)) \\
 &\sim O(length(\underline{a}_0))
 \end{aligned}$$

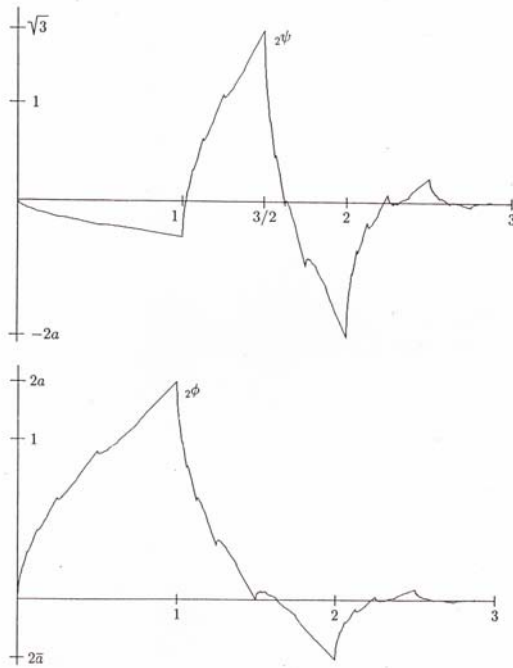
5.4.3 Tabellen

Tabellen zu den Koeffizienten h_k und g_k sowie Abbildungen zu den Mutterwavelet- und Skalierungsfunktionen s. /1/, /2/, /8/. Aus diesen Publikationen wurden beispielhaft einige Daten und Darstellungen übernommen:

Beispiel 5.10 *DAUBECHIES-Wavelets:*

Bei $N = 1$ entsteht das HAAR-Wavelet. Es gilt folgende Koeffiziententabelle:

h_k	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
0	$1/\sqrt{2}$	$\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$	0.332671	0.230378	0.160102
1	$1/\sqrt{2}$	$\frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$	0.806892	0.714847	0.603829
2		$\frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$	0.459878	0.630881	0.724309
3		$\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$	-0.135011	-0.027984	0.138428
4			-0.085441	-0.187035	-0.242295
5			0.035226	0.030841	-0.032245
6				0.032883	0.077571
7				-0.010597	-0.006241
8					-0.012581
9					0.003336



DAUBECHIES-Wavelet
zu $N = 2$

DAUBECHIES-Skalie-
rungsfunktion zu $N = 2$

Beispiel 5.11 MEYER-Wavelet, Tabelle der Koeffizienten:

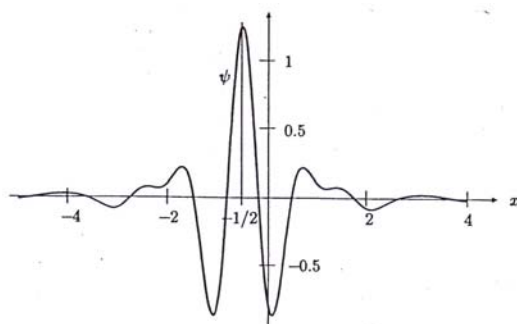
k	$h_k = h_{-k}$
0	.748791
1	.442347
2	-.039431
3	-.127928
4	.033278
5	.057120
6	-.024807
7	-.025310
8	.016000
9	.009538
10	-.008556
11	-.002451
12	.003416
13	.000058
14	-.000647
15	.000225

k	$h_k = h_{-k}$
16	-.000329
17	.000061
18	.000333
19	-.000231
20	-.000059
21	.000174
22	-.000115
23	-.000027
24	.000115
25	-.000067
26	-.000028
27	.000066
28	-.000040
29	-.000015
30	.000046
31	-.000027

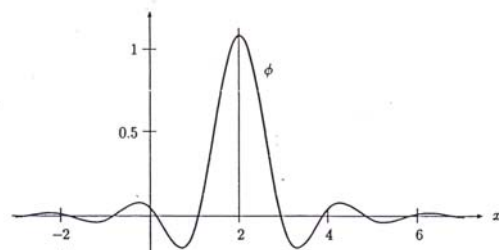
Beispiel 5.12 *BATTLE-LEMARIE-Wavelet für $n = 3$:*
Koeffiziententabelle:

r	$h_r^\# = h_{4-r}^\#$
2	.766130
3	.433923
4	-.050202
5	-.110037
6	.032081
7	.042068
8	-.017176
9	-.017982
10	.008685
11	.008201
12	-.004354
13	-.003882
14	.002187
15	.001882
16	-.001104

r	$h_r^\# = h_{4-r}^\#$
17	-.000927
18	.000560
19	.000462
20	-.000285
21	-.000232
22	.000146
23	.000118
24	-.000075
25	-.000060
26	.000039
27	.000031
28	-.000020
29	-.000016
30	.000010
31	.000008



*BATTLE-LEMARIE-
Wavelet zu $n = 3$*



*BATTLE-LEMARIE-
Skalierungs-
funktion zu $n = 3$*

6 Anwendungen

Ziel der Signalverarbeitung: aus dem Signal $s \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ Informationen zu extrahieren, z.B. das Auftreten

- vordefinierter Muster,
- periodischer Anteile,
- von Sprüngen und
- von Unregelmäßigkeiten.

Die Wavelettransformation ist gut, wenn die gesuchten Phänomene Multiskalenstruktur besitzen, wie z.B. Kanten Sprünge, lokal variierende Differenzierbarkeitsordnungen, usw., die sich durch das asymptotische Verhalten an den Unstetigkeitsstellen erkennen lassen. Das ist ein großer Vorteil gegenüber der Fouriertransformation, die diese Phänomene über \mathbb{R} „verschmiert“.

6.1 Vorbereitungen

In der Praxis liegen diskrete Werte eines gemessenen Signals vor:

$$s_k = s(kh); \quad k \in \mathbb{Z}; \quad h > 0 : \text{ Abtastrate.}$$

Es ist günstig, $h = 2^j$ zu wählen.

1. Anpassung an die Wavelettransformation:

Interpretation der s_k als Entwicklungskoeffizienten einer Funktion \tilde{f} nach der Skalierungsfunktion, da $\phi_{jk} = 2^{-j}\phi\left(\frac{t}{2^j} - k\right)$ eine ONB in \mathbb{V}_j bilden:

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k \phi(h^{-1}t - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(kh) \phi\left(\frac{t}{h} - k\right) \quad \text{mit } h = 2^j. \quad (6.1.1)$$

Wir benötigen aber Entwicklungskoeffizienten für eine Entwicklung in \mathbb{V}_0 , berechnet aus s_k .

1. Möglichkeit: Benutzung spezieller Quadraturformeln für $a_{0k} = (f, \phi_{0k})_{L_2(\mathbb{R})}$.
2. Möglichkeit: Man kann zeigen /7/:

$$\tilde{f}(kh) = \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} s(t) \phi\left(\frac{t}{h} - k\right) dt = s_k + O(h),$$

sofern $s \in C^1(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt = 1$, $\tilde{f} = \tilde{f}(t)$ gilt (/2/, S. 203). Mit der Substitution $x = \frac{t}{h}$ und $t = hx$ ergibt sich dann aus (6.1.1):

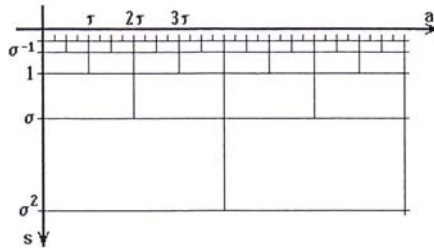
$$f(x) = \tilde{f}(hx) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k \phi\left(\frac{hx}{h} - k\right) \in \mathbb{V}_0.$$

Damit dürfen als Eingangsdaten für die Wavelettransformation sofort die Messwerte $\{s_k\}$ benutzt werden!

2. Darstellung der Ergebnisse der Wavelettransformation:

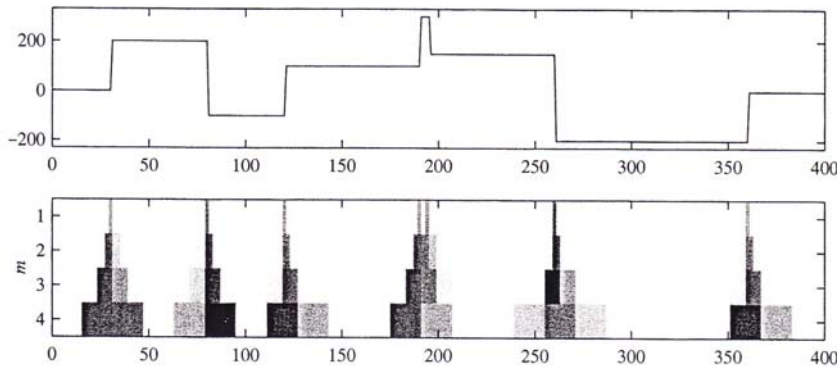
z. B. als Skalendiagramme (wie in /3/). Um diese richtig interpretieren zu können, sind folgende Vereinbarungen nötig:

- a) Tauschen der Achsenrichtung für a



- b) Vertauschen der Größen: $a \hat{=} s$; $b \hat{=} a$
- c) Einfärben von Rechtecken der a - b -Ebene entsprechend der Größe der zugehörigen Koeffizienten. Ist das Mutterwavelet um μ herum konzentriert, bedeutet ein großer Waveletkoeffizient d_k^m , dass bei f in der Umgebung der Stelle $(\mu + hk)2^m$ in der Skala 2^m ein signifikantes Detail der Größe $h2^m$ aufgetreten ist. Damit gehört zum Koeffizienten d_k^m ein Rechteck der Breite $h2^m$ um die Stelle $(\mu + hk)2^m$.

Bsp.: Skalendiagramm über 4 Stufen /3/:



3. Auswahl: kontinuierliche Wavelettransformation (KWT) oder schnelle diskrete Wavelettransformation (SDWT)

Diese Frage steht überhaupt, weil bei der Diskretisierung der Ebene mit dem logarithmischen Gitter die Translationsinvarianz der KWT verloren geht, denn die Gitterpunkte $(2^m, n2^m)$ gehen i.Allg. bei einer Translation nicht in andere Gitterpunkte über.

Die numerische Berechnung der KWT erfordert großen Rechenaufwand, es müssen auch Integrale aus den Skalarprodukten mittels Diskretisierung berechnet werden.

Wenn eine vorgegebene Abtastfolge $f(nh)$, $n \in \mathbb{Z}$ vorliegt, ist es sinnvoll, die Translationsinvarianz nur zu Vielfachen von h zu fordern.

- ↪ Diskretisierung $(a_m, b_n) = (s_m, nh)$; $n \in \mathbb{Z}$; s_m beliebig
- ↪ Anwendung von Quadraturformeln
- ↪ feines Rasterbild

Der direkte Vergleich von KWT und SDWT ergibt:

KWT		SDWT
hoch	Rechenaufwand	gering
ja	Translationsinvarianz	nein
leicht	Interpretierbarkeit	schwierig
leicht, aber sehr hoher Aufwand	Ausdehnung auf mehrere Dimensionen	schwierig, aber bereits erfolgt

Um diesem Auswahlproblem zu entgehen, hat man eine „Mischform“ konstruiert: den „Algorithm à trous“, der Vorteile beider Wavelettransformationen verbindet. Er ist relativ schnell: Bei einer Signallänge von N muss die SDWT $2N$ Koeffizienten berechnen, der „Algorithm à trous“ $2NJ$ Koeffizienten, wenn über J Stufen transformiert wird. Die Skalendiagramme sind „kontinuierlich“ bezüglich t und besser interpretierbar als solche der SDWT /3/.

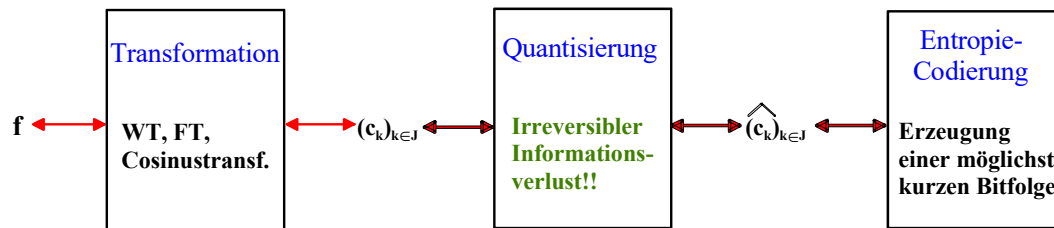
6.2 Datenkompression

Die Datenkompression ist die erfolgreichste Anwendung der Wavelettransformation, sie funktioniert aber auch mit der Fouriertransformation oder mit der Cosinustransformation. Die Datenkompression ist dringend erforderlich zur Echtzeitübertragung oder Speicherung von Bildern. Es werden deshalb sehr hohe Anforderungen bzgl. Rechenzeit und Speicherplatz gestellt. Die Beurteilung erfolgt anhand der Kompressionsrate k :

$$k = \frac{\text{Speicherbedarf des Originals}}{\text{Speicherbedarf der komprimierten Datei}}$$

Technische Details:

- Ein digitalisiertes Schwarz-Weiß-Bild entspricht einer (n, n) – Matrix aus Grauwerten des Bildes im jeweiligen Pixel.
- Farbbilder entsprechen 3 Bildern für die Farben rot, blau und grün. Es wird eine Transformation in Helligkeit und 2 Farbwerte vorgenommen, da Helligkeitsabweichungen vom Auge sehr genau registriert werden, Farbunterschiede hingegen weniger.
- Prinzip:



Zur Transformation:

Bei Fourier- und Cosinustransformation muss zur Auflösung von lokalen Details das Bild vorher in Teilbilder zerlegt werden, da Sinus- und Cosinusfunktionen einen unbeschränkten Träger haben. Die Grenzen der Teilbilder bleiben meist nach der Rücktransformation mit großem k sichtbar.

Bei der Wavelettransformation kann man die zweidimensionale Wavelettransformation nutzen. Dann ist keine Zerlegung in Teilbilder nötig. Gebräuchlicher ist aber der Einsatz von Tensorwavelets. Dabei werden Zeilen und Spalten mit eindimensionalen Algorithmen transformiert. Es entstehen Folgen von Matrizen mit den Zerlegungskoeffizienten der jeweils halben Dimensionslänge, so dass die Speicherung in place erfolgen kann. Problematisch ist die Auswahl der Wavelets, da diese von der Struktur des Signals abhängt. (Schema s. Folie)

Zur Quantisierung:

Die einfachste Art der Quantisierung ist die uniforme skalare Quantisierung. Sie entspricht dem Runden auf ganzzahlige Vielfache vom Quantisierungsschritt $\Delta > 0$. Verwendet man „Quantisierungstableaus“, so sind diese wesentlich für die Qualität der komprimierten Bilder verantwortlich. Bei der Rücktransformation entsteht hier der Fehler, der sich in approximierten Signalwerten äußert. Maße dafür sind $\|f - \tilde{f}\|$ bzw. $\|f - \tilde{f}\|^2 = \sum_{k \in J} |c_k - \tilde{c}_k|^2$ oder MSE (mean square error) = $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |f_k - \tilde{f}_k|^2$, wobei $f - \tilde{f}$ als Quantisierungsrauschen bezeichnet wird. Wenn M die erlaubte Ausdehnung des Wertebereiches von f ist, dann gilt für das in Dezibel gemessene Verhältnis $\frac{M^2}{MSE}$

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{M}{MSE} \quad \text{bzw.} \quad PSNR = 10 \log_{10} \frac{NM^2}{\sum_{k \in J} |c_k - \tilde{c}_k|^2}$$

(PSNR: Peak Signal to Noise Ratio) bei einer Abtastung mit N Werten, $h = 1$.

Zur Entropie-Codierung:

Es werden z.B. Huffman-Codierung oder die Lauflängencodierung benutzt, um möglichst nahe an die optimale Bitlänge heranzukommen.

Beispiele von Originalen und kompromierten Bildern s. Folie (/2/).

6.3 Denoising - Rauschunterdrückung

Denoising mit der Wavelettransformation liefert die besten Ergebnisse mit dem geringsten Aufwand. Analog zu oben wird statt einer Quantisierung Thresholding durchgeführt (Nullsetzen kleiner Waveletkoeffizienten). Die Rücktransformation liefert dann das weniger verrauschte Signal. Um gute Ergebnisse zu erzielen, müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

- Der Rauschpegel $\|f^{rausch}\|$ ist klein im Verhältnis zu $\|f^{wahr}\|$.
- Das wahre Signal lässt sich in der neuen Basis durch wenige Koeffizienten gut darstellen und ist damit gut komprimierbar.
- Das Rauschen ist in dieser Basis nicht gut komprimierbar. (Weißes Rauschen wird durch keine ONB komprimiert.)

Im Wesentlichen gibt es 2 Varianten für das Thresholding:

1. „Hard Thresholding“:

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{für } |c_k| \leq \tau \\ c_k & \text{sonst} \end{cases}$$

2. „Soft Thresholding“:

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{für } |c_k| \leq \tau \\ \text{sgn}(c_k)(|c_k| - \tau) & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Festlegung von τ ist ein statistisches Modell für das Rauschen erforderlich, z.B. wird weißes Rauschen mit der Standardabweichung σ benutzt:

$$f_k = f_k^{\text{wahr}} + \sigma g_k, \quad g_k : \text{Werte von } N(0, 1), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

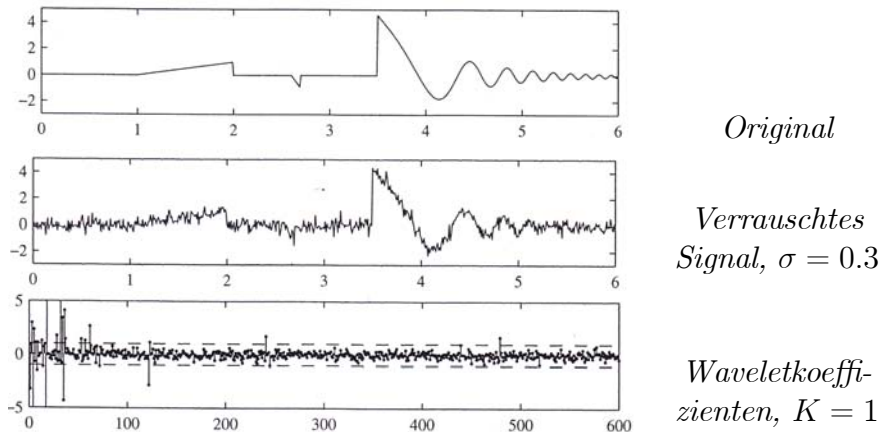
Damit ergibt sich als Schätzung für τ und für σ :

$$\begin{aligned} \tau &= \kappa \sqrt{2 \ln(N)} \sigma; \quad \kappa = O(1) \\ \sigma &\approx \frac{\text{Median der Beträge der Waveletkoeffizienten}}{0.6745} \end{aligned}$$

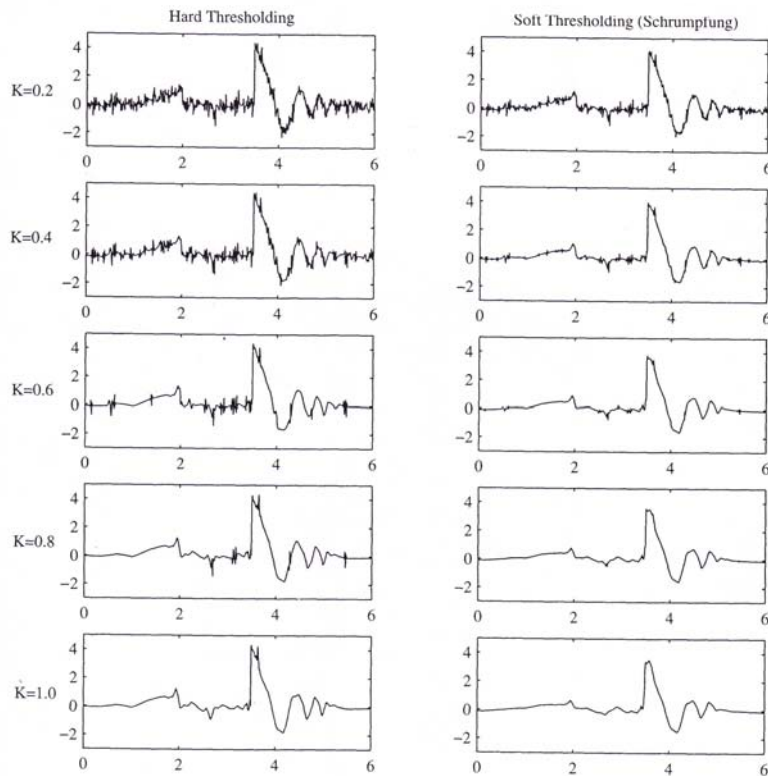
Anwendung des Denoising:

- Klärung von Tonsignalen
- Spracherkennung
- Datenvorbereitung für inverse, schlecht konditionierte Probleme, z.B. bei der Computertomografie oder bei Wirtschaftsdaten....

Beispiel 6.1 Klärung eines verrauschten Signals /3/:



Es gilt: $K = \frac{1}{k}$ mit der Kompressionsrate k .



6.4 Merkmalerkennung

Die Merkmalerkennung findet vielseitige Anwendung in der Medizintechnik z.B. zur Auswertung von EKGs, EEGs, Dopplerultraschalluntersuchungen, Elektrogastrogrammen, Phonocardiogrammen, usw. Vergleiche mit der Fouriertransformation, der gefens- terten Fouriertransformation, der Wignerdistribution, u.a. bringen stets das gleiche Re- sultat: Die Wavelettransformation liefert die besten Ergebnisse. Der Grund dafür liegt in der Instationarität der biologischen Signale. Es sind im Wesentlichen periodische Funktionen mit Kurzzeitstörungen, wobei die Periode wechseln kann und ein hoher Grundrauschpegel vorliegt. Gesucht sind i. Allgemeinen kurze Peaks im Signalverlauf, die u.U. hochenergetisch sein können und sich in unregelmäßigen Abständen wiederhol- en. Probleme liegen in der Abgrenzung vom Grundrauschen, in der Abgrenzung von ähnlichen Signalanteilen und in der Abgrenzung von Artefakten.

Beispiel 6.2 EKG /2/

Es werden u.a. folgende Fragestellungen untersucht: Ist der Herzklappenrhythmus syn- chron zu dem des Hauptherzmuskels? Ist der Hauptmuskel entspannt zwischen den Kon-

traktionen? Wenn nein, so ist das ein akutes Warnzeichen für den plötzlichen Herztod. und andere schwere Herzkrankheiten. (Bild s. Folie)

Beispiel 6.3 EEG /6/

Bei der Auswertung von EEGs werden epileptische Spikes gesucht. Das sind kurze energiereiche Ausschläge (spikes), gefolgt von langen flachen Wellen (waves). Diese epileptischen Spikes sind auch zwischen den Anfällen vorhanden und werden zur Diagnose genutzt.

Als Signal wird eine elektrische Spannung aufgenommen. Die Energie des Signals ist proportional zu $\|f\|$, und es gilt nach PLANCHEREL:

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C} \iint \left| \frac{Wf(a,b)}{a} \right|^2 da db \\ &\sim \sum_l \frac{1}{l^2} \sum_k |c_{lk}|^2. \end{aligned}$$

(Bild s. Folie)

Beispiel 6.4 Zuverlässigkeit von Zahnradgetrieben /5/

Das Problem besteht in einer optimalen Instandhaltungsstrategie, um die Zuverlässigkeit der Zahnradgetriebe zu garantieren. Die größte Fehlerquelle und damit der Diagnoseschwerpunkt sind die Zahnräder. Es wird eine Analyse des vom Getriebe verursachten Schwingungssignals vorgenommen. Der Weg dazu ist lang und führt über die Stationen rotorsynchrone Signalermittlung, Bildung von residuellen Signalen zur Rauschunterdrückung und Unterdrückung anderer periodischer, aber nicht rotorsynchroner Signalanteile zur Analyse mittels KWT und dem Morlet-Wavelet und zu einer benutzerfreundlichen Drehwinkel-Ordnungs-Darstellung. (s. Folien)

Es gibt noch viele weitere Anwendungsmöglichkeiten für die Wavelettransformation, z.B. zur Kantenerkennung in Bildern, zur Fehlersuche in Geweben und Gewirken, zur Bildauswertung bei der Mammografie, für effektive Speicher-algorithmen, in der Breitbandkommunikation, ... In der Mathematik wird die Wavelettransformation u.a. auch für Galerkinverfahren zur Lösung von Randwertaufgaben für partielle Differentialgleichungen getestet.