Funktionalanalytische Grundbegriffe

1 Metrische Räume

Definition 1 *Eine nichtleere Menge $\mathbb{X}$ heißt **metrischer Raum**, wenn jeweils 2 Elementen $x, y \in \mathbb{X}$ eine relle Zahl so zugewiesen wird, so dass gilt:*

1. $d(x, y) \geq 0, \qquad \wedge \qquad d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x) \qquad \forall x, y \in \mathbb{X}$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{X}$

$d(x, y)$ heißt Abstandsfunktion oder **Metrik in** $\mathbb{X}$

Definition 2 $x_0 \in \mathbb{X}$*; Die Menge* $K_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{X} | d(x, x_0) < \varepsilon\}$ *heißt offene Kugel mit dem Mittelpunkt* x_0 *und dem Radius* ε *oder* ε***- Umgebung von*** x_0.

Definition 3 *Die Menge* $A \subset \mathbb{X}$ *heißt **offen**, wenn*
$\forall x \in A \quad \exists r > 0 | K_r(x) \subseteq A$.

Definition 4 *Die Menge* $U \subset \mathbb{X}$ *heißt **Umgebung von*** $\mathbf{x}_0$*, wenn sie eine* $\varepsilon-$*Umgebung von* $\mathbf{x}_0$ *enthält.*

Definition 5 $\mathbf{x}_0$ *heißt innerer Punkt von* $A \iff \exists \varepsilon > 0 \mid K_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subset A$

Definition 6 *Die Menge* $A \subset \mathbb{X}$ *heißt **beschränkt**, wenn* A *ganz in einer Kugel* $K_r(y)$ *mit* $y \in \mathbb{X}$ *und* $0 < r < \infty$ *enthalten ist.*

Definition 7 $x_0 \in X$ *heißt **Häufungspunkt** von* $A \subset \mathbb{X}$ *, wenn jede Umgebung von* x_0 *mindestens ein* $x \in A; \quad x \neq x_0$ *enthält. Die Menge aller Häufungspunkte von* A *heißt **derivierte Menge*** A^+.

Definition 8 *Die Menge* $\overline{A} = A \cup A^+$ *heißt **Abschließung** von* A.

Definition 9 *Die Menge* $A \subset X$ *heißt **abgeschlossen**, wenn* $A^+ \subseteq A$.

Definition 10 *Die Menge* B ***heißt dicht in*** A*, wenn* $B \subset A \quad \wedge \quad \overline{B} = A$.

Definition 11 *Eine **Folge** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{X}$ **heißt konvergent**, wenn ein Element $x_0 \in \mathbb{X}$ existiert, mit $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$. x_0 heißt **Grenzwert** der Folge.*

Definition 12 *Eine Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{X}$ heißt **Cauchyfolge**,
wenn $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad | \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0(\varepsilon)$.*

Definition 13 *Ein metrischer Raum $\mathbb{X}$ heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge aus $\mathbb{X}$ gegen ein Element von $\mathbb{X}$ konvergiert.*

Definition 14 *$\mathbb{X}$ sei ein metrischer Raum mit dem Abstand $d(x, y)$. Die Menge $A \subset \mathbb{X}$ heißt **relativ kompakt**, wenn jede Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ eine konvergente Teilfolge $\left\{x_n^{'}\right\}_{n=1}^{\infty}$ enthält mit $lim_{n\to\infty} x_n^{'} = x \in \mathbb{X}$.*

Definition 15 *Die Menge $A \subset \mathbb{X}$ heißt **kompakt**, wenn jede Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ eine konvergente Teilfolge $\left\{x_n^{'}\right\}_{n=1}^{\infty}$ enthält mit $lim_{n\to\infty} x_n^{'} = x \in A$.*

Bemerkung 16 *$A \subset \mathbb{X}$ ist kompakt $\iff$ $A \subset \mathbb{X}$ ist relativ kompakt und abgeschlossen.*

1.1 Operatoren

Definition 17 *Eine Abbildung $T : A \to B$, die jedem $x \in A$ eindeutig ein $y \in B$ zuordnet heißt **Operator**: $Tx = y$.*

Definition 18 *Bildbereich von T: $T(A) = \{\mathbf{y} \in B \mid \exists \mathbf{x} \in A \text{ mit } T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$.*

Definition 19 *Der Operator $T : A \to B$ heißt*

- **surjektiv** $\iff T(A) = B$
- **injektiv** $\iff T(x) = T(y) \quad \curvearrowright \quad x = y$
- **bijektiv** $\iff$ wenn T surjektiv und injektiv.

Definition 20 *Ist der Operator $T : A \to B$ bijektiv, so existiert der **inverse Operator** $T^{-1} : B \to A$, der durch $T^{-1}y = x \quad \iff \quad Tx = y$ definiert ist.*

Definition 21 *Der* ***Operator*** $T : A \to B$ ***heißt stetig im Punkt*** $x_0 \in A$, *wenn* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) \mid d_y(Tx, Tx_0) < \varepsilon \quad \forall x \in A$ *mit* $d_x(x, x_0) < \delta$. *Ist* T *stetig in allen Punkten* $x_0 \in A$, *so heißt* T ***stetig auf*** A. *Kann* $\delta(x_0, \varepsilon)$ *außerdem für beliebiges* ε *unabhängig von* x_0 *gewählt werden, so heißt* T ***gleichmäßig stetig auf*** A.

Definition 22 *Eine bijektive stetige Abbildung* $T : A \to B$ *, deren inverse Abbildung ebenfalls stetig ist, heißt* ***Homöomorphismus****. Zwei Mengen heißen homöomorph, wenn ein Homöomorphismus* $T : A \to B$ *existiert.*

Definition 23 *Sei* A *abgeschlossen. Die Abbildung* $T : A \to A$ *heißt* ***kontrahierend****, wenn gilt* $d_y(Tx, Ty) \leq q d_x(x, y)$ *mit* $q < 1 \quad \forall x, y \in A$.

Satz 24 ***Banachscher Fixpunktsatz:***
Es sei A *eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes* X*, die durch den kontrahierenden Operator* T *in sich abgebildet wird. Dann hat die Fixpunktgleichung* $x = Tx$ *genau eine Lösung* $x^* \in A$*, den Fixpunkt von* T.
Die Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *mit* $x_0 \in A, \quad x_{n+1} = Tx_n$ *konvergiert für jedes* $x_0 \in A$ *gegen* x^*. *Es gelten die Fehlerabschätzungen:*

- a priori : $d(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1)$
- a posteriori : $d(x_n, x^*) \leq \frac{q}{1-q} d(x_n, x_{n-1})$.

2 Lineare Räume

Definition 25 *Ein* ***linearer Raum*** *über einem Körper* $\mathbb{K}$ *(* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *) ist eine nichtleere Menge* $\mathbb{X}$ *mit*

(A) einer Vorschrift, die jedem Paar $x,\ y$ ($x \in \mathbb{X},\ y \in \mathbb{X}$) genau ein Element $x + y \in \mathbb{X}$ zuordnet (Addition) und

(M) einer Vorschrift, die jedem Paar $\lambda,\ x$ ($\lambda \in \mathbb{K},\ x \in \mathbb{X}$) genau ein Element $\lambda x \in \mathbb{X}$ zuordnet (Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{K}$).

Dabei gelten folgende Regeln ($x, y, z \in \mathbb{X};\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$) :

(A1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (**Assoziativgesetz**)

(A2) $x + y = y + x$ (**Kommutativgesetz**)

(A3) Es existiert genau ein Element $\mathbb{O} \in \mathbb{X}$, mit $x + \mathbb{O} = x \quad \forall x \in \mathbb{X}$
(**Nullelement der Addition in X**)

(A4) Für $\forall x \in \mathbb{X}$ existiert genau ein $(-x) \in \mathbb{X}$ mit $x + (-x) = \mathbb{O}$
(**Inverses Element der Addition in X**)

(M1) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (**Distributivgesetze**

(M2) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ **der Multiplikation**)

(M3) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (**Assoziativgesetz der Multiplikation**)

(M4) $1x = x;$ $(1 \in \mathbb{K})$

Bemerkung 26 *Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $(\mathbb{K} = \mathbb{C})$ spricht man von einem reellen (komplexen) linearen Raum.*

Definition 27 *$U \subset \mathbb{X}$ heißt **Unterraum** von $\mathbb{X}$, wenn für $\forall x, y \in \mathbb{U}$; $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt: $x + y \in U$ und $\lambda x \in U$. U ist dann selbst ein linearer Raum über $\mathbb{K}$.*

Definition 28 *U sei ein Unterraum von $\mathbb{X}$ und $x_0 \in \mathbb{X}$, dann heißt*

$$M = \{x_0 + y \mid y \in U\} \equiv x_0 + U$$

***lineare Mannigfaltigkeit** in $\mathbb{X}$.*

Definition 29 *$A \subset X$. Die Menge*

$$spanA = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k \quad | \quad x_k \in A, \quad \lambda_k \in \mathbb{K}, \quad m \in \mathbb{N} \right\}$$

*heißt **lineare Hülle von** A.*

Definition 30 *U und V seien Unterräume von $\mathbb{X}$, dann heißt*

$$U + V = span(U \cup V)$$

***Summe von** U **und** V. Gilt außerdem $U \cap V = \{\mathbb{O}\}$, so spricht man von der **direkten Summe** $U \oplus V$. Jedes $z \in U \oplus V$ ist eindeutig in der Form $z = x + y$ mit $x \in U$ und $y \in V$ darstellbar.*

Definition 31 *Die Unterräume $U \subset \mathbb{X}$ und $V \subset \mathbb{X}$ heißen **komplementär** zueinander, wenn gilt $\mathbb{X} = U \oplus V$.*

Definition 32 *Die Menge* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ *heißt linear unabhängig, wenn gilt:*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \boldsymbol{\lambda}_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0.$$

Definition 33 *Die Menge* $B \subset \mathbb{X}$ *heißt* ***linear unabhängig****, wenn jede endliche Teilmenge aus* B *linear unabhängig ist.*

Definition 34 *Eine linear unabhängige Teilmenge* $B \subset \mathbb{X}$ *mit* $\mathbb{X} = \overline{spanB}$ *heißt* ***Basis*** *in* $\mathbb{X}$.

Definition 35 *Existiert eine Basis von* $\mathbb{X}$ *mit* $|B| = n$*, so besitzt jede Basis von* X n *Elemente:* $\dim \mathbb{X} = n$. *Existiert kein solches* n *so heißt* $\mathbb{X}$ ***unendlichdimensional.***

Definition 36 $\mathbb{X}$ *und* $\mathbb{Y}$ *seien lineare Räume über* $\mathbb{K}$. $\mathbb{X}$ *und* $\mathbb{Y}$ *heißen* ***linear isomorph*** *zueinander, wenn eine Bijektion f:* $\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *mit der Eigenschaft*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{X}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

existiert.

2.1 Normierte lineare Räume

Definition 37 *Ein linearer Raum* $\mathbb{V}$ *über dem Körper* $\mathbb{K}$ *in dem jedem* $x \in \mathbb{V}$ *eine reelle Zahl* $\|x\|$ *zugeordnet ist, heißt* ***linearer normierter Raum*** $\mathbb{V}$*, wenn gilt.*

- $\|x\| \geq 0 \quad \wedge \quad \|x\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \mathbb{O}$
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

$\|x\|$ heißt **Norm** des Elementes x.

Bemerkung 38 *In einem linearen normierten Raum* $\mathbb{V}$ *kann die* ***kanonische oder die durch die Norm induzierte Metrik*** *gemäß* $d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{V}$ *eingeführt werden. Damit ist jeder lineare normierte Raum stets ein metrischer Raum.*

Definition 39 *Ein linearer normierter Raum, der bezüglich seiner kanonischen Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ vollständig ist, heißt* ***BANACH - Raum****.*

Definition 40 *Die Menge $K_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{B} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$ heißt* ***offene Kugel um $\mathbf{x}_0 \in B$ mit dem Radius*** *r.*

Konvergenz im Banachraum $\mathbb{B}$:

- Es sei $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{B}$.
  $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \mid \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$
- $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{B}$, wenn
  $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \mid \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$
- Wegen der Vollständigkeit besitzt jede Cauchyfolge im Banachraum einen Grenzwert.
- Die Konvergenz in normierten Räumen heißt **Normkonvergenz**.
- Die Menge der normkonvergenten Folgen ist linear:

  Aus $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x} \wedge \lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{y}$ folgt $\lim_{n\to\infty}(\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} + \mathbf{y}$.
  Aus $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x} \wedge \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ folgt $\lim_{n\to\infty} \alpha_n \mathbf{x}_n = \alpha\mathbf{x}$.
  Aus $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ folgt $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n\| = \|\mathbf{x}\|$.

Definition 41 *In einem normierten Raum $\mathbb{V}$ heißen die Normen $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ äquivalent, wenn*
$\exists m, M \in \mathbb{R}, \quad m > 0, M > 0 \mid m\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq M\|\mathbf{x}\|_1 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}$.

Definition 42 *Es seien $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ Elemente eines linearen normierten Raumes $\mathbb{V}$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Existiert ein $s \in \mathbb{V}$ mit $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, so heißt $s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$* ***Summe der unendlichen Reihe*** *$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ in $\mathbb{V}$.*

Definition 43 *Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ heißt* ***absolut konvergent****, wenn die Zahlenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ konvergiert.*

2.2 Lineare Operatoren

Definition 44 *$\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ seien lineare normierte Räume über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $A : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ heißt **linearer Operator**, wenn gilt:*

$$\begin{aligned} A(u+v) &= Au + Av \qquad \forall u, v \in \mathbb{X} \\ A(\alpha u) &= \alpha Au \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K} \wedge \forall u \in \mathbb{X}. \end{aligned}$$

Bildraum von A: $R(A) = \{v \in \mathbb{Y} \mid v = Au;\ u \in \mathbb{X}\}$
Nullraum (Kern) von A: $N(A) = \{u \in \mathbb{X} \mid Au = \mathbb{O}\}$

Definition 45 *Der lineare Operator $A : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ heißt **beschränkt**, wenn eine Konstante $0 < C < \infty$ existiert mit $\|Au\| \le C\,\|u\| \quad \forall u \in \mathbb{X}$.*

Definition 46 *Die Zahl*
$\|A\| = \inf\{C \in \mathbb{R}\,|\,\|Au\| \le C\,\|u\|\,, \forall u \in \mathbb{X}\} = \sup_{\|u\|=1} \|Au\|$ *heißt **Norm des Operators***

Satz 47 *Der lineare Operator $A : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ ist genau dann **stetig**, wenn er beschränkt ist.*

Definition 48 *Ein linearer stetiger Operator zwischen normierten Räumen $A : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ heißt **Isomorphismus**, wenn A bijektiv und A^{-1} stetig ist. Gilt zusätzlich $\|Au\| = \|u\|$ für alle $u \in \mathbb{X}$, so heißt A **isometrisch**. Normierte Räume, zwischen denen ein (isometrischer) Isomophismus existiert, heißen (isometrisch) isomorph.*

Definition 49 ***Die Summe** $T + S$ der linearen Operatoren T und S wird durch die Gleichung $(T + S)x = Tx + Sx \quad \forall x \in \mathbb{X}$ definiert, die **Multiplikation des Operators** T **mit der Zahl** $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$ durch die Gleichung $(\lambda T)x = \lambda(Tx) \quad \forall x \in \mathbb{X}$*

Definition 50 *Die Menge $L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ aller linearen, beschränkten Operatoren $A : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ mit der oben definierten Summe bzw. Multiplikation heißt **Raum der linearen beschränkten Operatoren** $\mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$.oder **Dualraum Dualraum** $\mathbb{X}'$ von $\mathbb{X}$.*

Definition 51 *Die Folge $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ heißt **normkonvergent** (stark konvergent) gegen ein $A \in L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, wenn gilt $\lim_{n\to\infty} \|A_n x - Ax\| = 0$ $\forall x \in \mathbb{X}$.*

Definition 52 *Es seien* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ *lineare Räume und* $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y};\ S : \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$, *lineare Operatoren. Dann ist das Produkt der Operatoren* ST *definiert durch* $(ST)x = S(Tx) \quad \forall x \in \mathbb{X}$.

Definition 53 *Es sei* $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *ein linearer Operator. Wenn ein linearer Operator* $S : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ *existiert, so dass gilt :*
$ST = I_x \quad \wedge \quad TS = I_y; \quad I_x, I_y$: *identische Abbildungen von* $\mathbb{X}$ *bzw.* $\mathbb{Y}$, *so heißt* S *der zu* T ***inverse Operator*** $S = T^{-1}$. *Die Menge aller Operatoren* $T \in \mathbb{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, *für die der inverse Operator existiert, wird mit* $\mathbb{L}_{inv}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ *bezeichnet.*

3 Hilberträume

Definition 54 $\mathbb{H}$ *sei ein linearer Raum über dem Körper* $\mathbb{K}$. *Jedem Paar* $x, y \in \mathbb{H}$ *wird eine Zahl* $(x, y) \in \mathbb{K}$ *mit folgenden Eigenschaften zugeordnet:*

1. $(x, x) \geq 0 \qquad \wedge \qquad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{O}$
2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$
3. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z) \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{H};\ \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{K}$.

Dann heißt (x, y) **inneres oder skalares Produkt** von x und y.

Definition 55 *Ein linearer Raum* $\mathbb{H}$ *über dem Körper* $\mathbb{K}$ *mit dem inneren Produkt* $(x, y) \in \mathbb{K}$ *heißt* ***Prä-Hilbert-Raum.***

Satz 56 *Jeder Prä-Hilbert-Raum ist bezüglich der Norm* $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$
$\forall x \in \mathbb{H}$ *ein normierter Raum.*

Eigenschaften des inneren Produktes :

1. $(u, \alpha v) = \overline{\alpha}(u, v)$
2. $(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$
3. $|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\| \qquad \forall u, v \in \mathbb{H} \qquad$ Schwarz'sche Ungleichung

Satz 57 *Das innere Produkt in einem Prä-Hilbert-Raum ist stetig, d.h. aus* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *und* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ *folgt* $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x, y)$.

Definition 58 *Ein Prä-Hilbertraum heißt **HILBERT- Raum**, wenn er bezüglich der durch die Norm $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ induzierten Metrik $d(x,y) = \|x-y\|$ vollständig ist.*

Definition 59 *$\mathbb{H}$ sein Hilbertraum. Die Elemente $u, v \in \mathbb{H}$ heißen genau dann **orthogonal** zueinander $u \perp v$, wenn gilt $(u,v) = 0$.*

Definition 60 *$\mathbb{H}$ sein Hilbertraum. Ein **Orthonormalsystem** (ONS) $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ liegt vor, wenn gilt $(e_i, e_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$.*
*Das ONS heißt **abgeschlossen**, wenn gilt $\overline{span\{e_i\}} = \mathbb{H}$.*

Folgerung 61 $\forall\ u \in \mathbf{H}\ , \forall \varepsilon > 0 \quad \exists u_i \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad |$
$\|u - \sum_{i=1}^{n} u_i e_i\| < \varepsilon \quad \forall n > n_0$

Definition 62 *Ein Hilbertraum $\mathbb{H}$ heißt **separabel**, wenn $\mathbb{H}$ eine abzählbare Teilmenge $M = \{u_1, u_2, ...\}$ enthält, die dicht ist in $\mathbb{H}$, d.h. $\overline{M} = \mathbb{H}$.*

Satz 63 *Ein separabler Hilbertraum $\mathbb{H}$ besitzt mindestens ein vollständiges ONS. (und umgekehrt)*

Satz 64 *Gegeben sei ein separabler Hilbertraum $\mathbb{H}$ mit einem Orthonormalsystem $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, $u \in \mathbb{H}$, $s_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i$; $\gamma_i \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

- $\|u - s_n\|$ wird minimal für $\gamma_i = u_i = (u, e_i) \quad \forall i$
- $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i e_i = s \in \mathbb{H}$
- Es gilt die Besselsche Ungleichung: $\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 \leq \|u\|^2$
- Ist das ONS $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ abgeschlossen, dann gilt $s = u$ und die Parsevalsche Gleichung: $\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 = \|u\|^2$

Definition 65 *Sei $u \in \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ Hilbertraum, $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ein ONS aus $\mathbb{H}$. Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty}(u, e_i)e_i$ heißt **Fourierreihe** für u bzgl. $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, die Größen $u_i = (u, e_i)$ heißen **Fourierkoeffizienten**.*

Definition 66 *Die Hilberträume $\mathbb{H}_1$, $\mathbb{H}_2$ heißen isometrisch, wenn eine eindeutige Abbildung $f : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2$ existiert, für die gilt:*

- $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

- $(u,v) = (f(u), f(v)) \quad \forall u,v \in \mathbb{H}_1, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Definition 67 *Die Teilmengen $M_1 \subset \mathbb{H}$ und $M_2 \subset \mathbb{H}$ eines Hilbertraumes $\mathbb{H}$ heißen genau dann orthogonal, wenn gilt $(u,v) = 0 \quad \forall u \in M_1, \forall v \in M_2$.*

Definition 68 *Ist M eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{H}$, dann heißt $M^\perp = \{v \in \mathbb{H} \mid \quad (u,v) = 0 \quad \forall u \in M\}$ Orthogonalraum zu M.*

Definition 69 *Es seien $V, W \subset \mathbb{H}$ abgeschlossene Unterräume des Hilbertraumes $\mathbb{H}$. Ist jedes $u \in \mathbb{H}$ eindeutig als Summe $u = v + w$ mit $v \in V$ und $w \in W$ darstellbar, so heißt $\mathbb{H}$* ***direkte Summe*** *der Unterräume V und W: $\mathbb{H} = V \oplus W$.*

Definition 70 *$W \subset \mathbb{H}$ heißt* ***orthogonales Komplement*** *zum abgeschlossenen Unterraum $V \subset \mathbb{H}$, wenn gilt $W \perp V \quad \wedge \quad \mathbb{H} = V \oplus W$.*

Satz 71 *Es gelte $W \perp V \quad \wedge \quad \mathbb{H} = V \oplus W$, $\mathbb{H}$ Hilbertraum. Dann gilt für ein beliebiges $u \in \mathbb{H}$: $u = v + w$ mit $v \in V$ und $w \in W$: $\quad (v,w) = 0$.*
v heißt ***orthogonale Projektion*** *von u auf V bzw.w heißt* ***orthogonale Projektion*** *von u auf W.*
Die Abbildungen $P : \mathbb{H} \to V$ gemäß $Pu = v$ und $Q : \mathbb{H} \to W$ gemäß $Qu = w$ heißen ***orthogonaler Projektor*** *(Orthoprojektor) auf V bzw. W.*

3.1 Lineare Operatoren in Hilberträumen

Definition 72 *Im Hilbertraum $\mathbb{H}$ sei der lineare Operator $A : D(A) \subseteq \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definiert. Es gelte $\overline{D(A)} = \mathbb{H}$.*
$D(A^*) = \{x \in \mathbb{H} \mid \quad \exists y \in \mathbb{H}$ mit $(Au, x) = (u, y) \quad \forall u \in D(A)\}$. Der Operator $A^* : D(A^*) \subseteq \mathbb{H} \to \mathbb{H} \quad$ mit $A^*x = y$ heißt ***adjungierter Operator*** *zu A.*
Es gilt $(Au, x) = (u, A^*x) \quad$ für $\forall u \in D(A), \forall x \in D(A^*)$.

Definition 73 *Im Hilbertraum $\mathbb{H}$ sei der lineare Operator $A : D(A) \subseteq \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definiert. Es gelte $\overline{D(A)} = \mathbb{H}$. A heißt*

- **symmetrisch** $\iff (Au, x) = (u, Ax) \quad \forall u, x \in D(A)$
- **selbstadjungiert** $\iff A = A^*$
- **schiefsymmetrisch** $\iff (Au, x) = -(u, Ax) \quad \forall u, x \in D(A)$

- **schief-adjungiert** $\iff A = -A^*$

Definition 74 *Der lineare Operator* $A : D(A) \subseteq \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *heißt* ***positiv definit****, wenn gilt:* $(Au, u) \geq C \|u\|^2$ *für* $\forall u \in D(A), \quad C \in \mathbb{R}, \quad C > 0$

Definition 75 $\lambda \in \mathbb{C}$ *heißt* ***Eigenwert*** *des Operators* $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *,wenn ein* $x \in \mathbb{H}$ *existiert,* $x \neq \mathbb{O}$*, so dass gilt* $Ax = \lambda x$*. Jedes* $x \neq \mathbb{O}$*, für das* $Ax = \lambda x$ *gilt, heißt* ***Eigenelement*** *zum Eigenwert* λ*.*

Definition 76 *Im Hilbertraum* $\mathbb{H}$ *über dem Körper* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{R}$ *bzw.* $\mathbb{C}$*) heißen Operatoren* $\mathbf{f}$*, die von* $\mathbb{H}$ *nach* $\mathbb{K}$ *abbilden,* ***Funktionale*** *oder* ***Linearformen****:* $\mathbf{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{K}$.

Definition 77 *Das Funktional* $\mathbf{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ *heißt:*

- ***linear****, wenn gilt:* $\mathbf{f}(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u})+\beta f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{H}; \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
- ***beschränkt****, wenn gilt:* $\exists M \in \mathbb{R}, \ M > 0 \mid \quad |f(\mathbf{u})| \leq M \|\mathbf{u}\| \ \forall \mathbf{u} \in \mathbb{H}$
- ***stetig****, wenn gilt: Aus* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{u}_n = \mathbf{u}$ *folgt stets* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{u}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{u})$; $\mathbf{u}_n, \mathbf{u} \in \mathbb{H}$.

Definition 78 *Es sei* $\mathbf{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ *ein lineares beschränktes Funktional. Die Zahl*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\| &= \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} |\mathbf{f}(\mathbf{u})|, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{H} \\ &= \inf\{M \in \mathbb{R} \mid \ |\mathbf{f}(\mathbf{u})| \leq M \|\mathbf{u}\| \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{H}\} \end{aligned}$$

heißt ***Norm des Funktionals****.*

Definition 79 *Sei* $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *eine Folge von Elementen des Hilbertraumes* $\mathbb{H}$*.* $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *heißt* ***schwach konvergent*** *gegen* $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$*, wenn für jedes stetige lineare Funktional* $\mathbf{f}$ *auf* $\mathbb{H}$ *gilt:*
$\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$; *Schreibweise:* $\mathbf{x}_n \rightharpoonup \mathbf{x}$

Definition 80 *Im Hilbertraum* $\mathbb{H}$ *über dem Körper* $\mathbb{K}$ *heißt der Operator* $\mathbf{a}$ *mit* $\mathbf{a} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ *Bilinearform, wenn gilt:*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \alpha\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta\mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ \mathbf{a}(\mathbf{w}, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) &= \alpha\mathbf{a}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + \beta\mathbf{a}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{H}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Definition 81 *Die Bilinearform* $\mathbf{a} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ *heißt:*

- *beschränkt, wenn* $\exists\, C > 0;\ C \in \mathbb{R} \mid \quad |\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq C\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \ \ \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{H}$
- *symmetrisch, wenn gilt* $\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{a}(\mathbf{v},\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{H}$
- *positiv, wenn gilt:* $\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{H}$
- *streng positiv, wenn gilt:*
  $\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geq C\,\|\mathbf{u}\|^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{H} \ \wedge\ C > 0,\ C = const.$

3.2 Der Raum $\mathbf{L}_2$(a,b)

Elemente: quadratisch summierbare Funktionen, d.h. messbare Funktionen

$f:\ (a,b) \to \mathbb{C}$, für die gilt $\displaystyle (L)\int_a^b |f(t)|^2\,dt < \infty$

Rechenoperationen: $f(t) + g(t)$ bzw. $\lambda f(t),\ \lambda \in \mathbb{C}$ werden punktweise ausgeführt

Skalarprodukt / Norm: $\displaystyle (f,g) = (L)\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt,\quad \|f\|^2 = (L)\int_a^b |f(t)|^2\,dt$

Schwarz'sche Ungleichung: $|(f,g)| \leq \|f\|\,\|g\|$, d.h.

$$\left|(L)\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt\right|^2 \leq \left((L)\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)\cdot\left((L)\int_a^b |g(t)|^2\,dt\right)$$

Basissysteme:

- Legendre'sche Polynome
- trigonometrische Basissysteme
- $\{\varphi_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{\frac{1}{\sqrt{T}}e^{ik\omega t},\quad k \in \mathbb{Z},\quad \omega = \frac{2\pi}{T}\}$ bildet für $[a,b] = [0,T]$ eine ONB

Eigenschaften:

- $L_2(a,b)$ ist unendlichdimensional
- $L_2(a,b)$ ist vollständig und separabel

- Die Elemente von L_2 sind Funktionenklassen. $f_1(t)$ und $f_2(t)$ gehören zur selben Funktionenklasse, wenn gilt $f_1(t) = f_2(t)$ f.ü.a. auf $[a, b]$, d.h. wenn gilt $f_1(t) \neq f_2(t)$ auf einer Menge vom Maße Null bzw. $(L)\int\limits_a^b |f_1(t) - f_2(t)|\, dt = 0$

Definition 82 $L_2(\mathbb{R}/2\pi) = \Big\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f(t)$ *ist messbar,* $f(t + 2\pi) = f(t)\ \forall t \in R,$
$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty\Big\}$