Funktionalanalysis

Cordula Bernert

23.02.2011

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] H. Heuser: Funktionalanalysis, BG Teubner 2006

[2] Appell, Väth: Elemente der Funktionalanalysis, Vieweg 2005

[3] D. Werner: Funktionalanalysis, Springer Lehrbuch, 6. Auflage 2007

[4] K. Burg, H. Haf, F. Wille, A. Meister: Partielle Differentialgleichungen und funktionalanalytische Grundlagen, Vieweg+Teubner,4.Auflage 2009

1 Metrische Räume

Eine Menge beliebiger mathematischer Objekte mit gleichen Eigenschaften wird als Raum bezeichnet.

Beispiel 1.1 $\mathbb{R}^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \quad | \quad x_i \in \mathbb{R}; \quad i = 1, 2, 3\}$
** Menge von Punkten aus dem uns umgebenden Raum*
** Abstand zwischen 2 Punkten ist definiert durch:*

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

** Der Abstand ist real messbar (Lineal) und stets nichtnegativ. Der Abstand wird nur dann Null, wenn er zum selben Element gemessen wird. Der Abstand ist symmetrisch und erfüllt die Dreiecksungleichung.*
** Der Abstand gibt uns die Möglichkeit, die Geometrie von Gegenständen und ihre gegenseitige Lage zu beschreiben. D.h. die Abstandsfunktion legt eine Topologie im Raum fest. $\mathbb{R}^3$ ist ein topologischer Raum.Die Abstandsdefinition ist nicht eindeutig.*

Ziel: Einführung einer Abstandsfunktion über allgemeinen mathematischen Mengen (z. B. über Mengen von Funktionen, Folgen, geometrische Köper, Gleichungen,....) die die im Beispiel genannten Eigenschaften besitzt. Die entstehende Struktur heißt metrischer Raum (Menge und Abstandsfunktion). In solchen metrischen Räumen kann nachfolgend eine Topologie und eine Analysis definiert werden.

1.1 Metrischer Raum und Abstandsfunktion

Definition 1.1 *Eine nichtleere Menge $\mathbb{X}$ heißt **metrischer Raum**, wenn jeweils 2 Elementen* $\mathbf{x}$,$\mathbf{y} \in \mathbb{X}$ *eine reelle Zahl so zugewiesen wird, so dass gilt:*

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0, \qquad \wedge \qquad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$
2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}$
3. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{X}$

$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ heißt Abstandsfunktion oder **Metrik in** $\mathbb{X}$

Folgerung 1.1 *Verallgemeinerte Dreiecksungleichung*

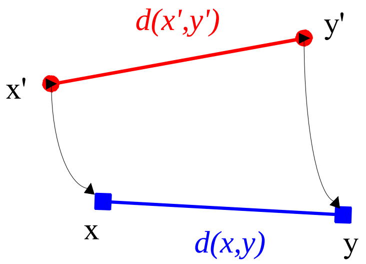
$$d\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n\right) = d\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\right) + d\left(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\right) + \ldots + d\left(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n\right) \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_n \in \mathbb{X}$$

Folgerung 1.2 $|d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - d(\mathbf{y}, \mathbf{z})| \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{X}$
Beweis:
$d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad \curvearrowright \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
$d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \quad \curvearrowright \quad d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Folgerung 1.3 *Stetigkeit der Abstandsfunktion*

$$|d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - d(\mathbf{x}', \mathbf{y}')| \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + d(\mathbf{y}, \mathbf{y}') \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in \mathbb{X}$$

Beweis:
$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + d(\mathbf{x}', \mathbf{y}') + d(\mathbf{y}', \mathbf{y})$
$d(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \leq d(\mathbf{x}', \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{y}')$



Beispiel 1.2 $\mathbb{X} = \mathbb{R} : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}$

Beispiel 1.3 $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2 : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \quad \forall \mathbf{x} = \binom{x_1}{x_2}, \mathbf{y} = \binom{y_1}{y_2} \in \mathbb{R}^2$

Beispiel 1.4 $\mathbb{X} = \mathbb{M}$: *beliebige nichtleere Menge;* $x, y \in \mathbb{M}$
$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & falls \quad x = y \\ 1 & sonst \end{array} \right\}$: *diskrete Metrik*

Beispiel 1.5 $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ *oder* $\mathbb{X} = \mathbb{C}^n$
a) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |\, x_i - y_i|$
b) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\, x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$ *für* $1 \leq p < \infty$
Beweis M3:
a)

$$\begin{aligned} |x_i - y_i| &\leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \qquad \forall i \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - z_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |z_i - y_i| \qquad \forall i \\ \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - z_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |z_i - y_i| \end{aligned}$$

b) Mit der Minkowskischen Ungleichung gilt:

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|^p\right)^{1/p}
\end{aligned}
$$

Beispiel 1.6 $\mathbb{X}-$ *sei die Menge aller reell- oder komplexwertigen Zahlenfolgen* $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\mathbf{y} = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$.

a) $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} | x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$ *für* $1 \leq p < \infty$

für $\forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{X}$ *mit* $\sum_{i=1}^{\infty} | x_i|^p < \infty$ *und* $\sum_{i=1}^{\infty} | y_i|^p < \infty$

b) $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sup_i | x_i - y_i|$

für $\forall\ \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{X}$ *mit* $\sup_i | x_i| < \infty$ *und* $\sup_i | y_i| < \infty$

Beweis. der Dreiecksungleichungen:
a) Nach der Minkowskiungleichung gilt:

$$
\begin{aligned}
d(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|^p\right)^{1/p}\right] \\
&= d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{z},\mathbf{y})
\end{aligned}
$$

das ist möglich, weil wir analog

$$
\begin{aligned}
d(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - 0 + 0 - y_i|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p}\right] < \infty.
\end{aligned}
$$

erhalten.
b)

$$
\begin{aligned}
|x_i - y_i| &\leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \\
&\leq \sup_i |x_i - z_i| + \sup_i |z_i - y_i| \\
\sup_i |x_i - y_i| &\leq \sup_i |x_i - z_i| + \sup_i |z_i - y_i|
\end{aligned}
$$

und analog zu a):

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x},\mathbf{y}) &\le d(\mathbf{x},0)+d(0,\mathbf{y}) \\ &\le \sup_i |x_i| + \sup_i |y_i| < \infty. \end{aligned}$$

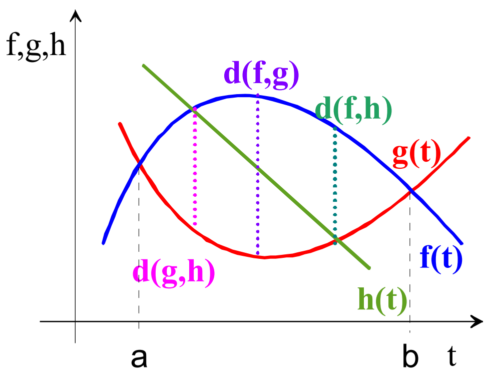
■

Beispiel 1.7 $\mathbb{X} = C[a,b]$: *Menge der auf [a,b] stetigen reell- oder komplexwertigen Funktionen über dem Intervall* $[a,b]$

$$d(\mathbf{f},\mathbf{g}) = \max_{a\le t\le b} |\ \mathbf{f}\,(t) - \mathbf{g}\,(t)\ | \quad f\ddot{u}rbel. \quad \mathbf{f},\mathbf{g} \in \ \mathbf{C}\,[a,b]$$

Beweis. der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}(t)-\mathbf{g}(t)| &\le |\mathbf{f}(t)-\mathbf{h}(t)| + |\mathbf{h}(t)-\mathbf{g}(t)| \quad \forall t\in[a,b] \\ &\le \max_{t\in[a,b]} |\mathbf{f}(t)-\mathbf{h}(t)| + \max_{t\in[a,b]} |\mathbf{h}(t)-\mathbf{g}(t)| \\ \max_{t\in[a,b]} |\mathbf{f}-\mathbf{g}| &\le \max_{t\in[a,b]} |\mathbf{f}-\mathbf{h}| + \max_{t\in[a,b]} |\mathbf{h}-\mathbf{g}| \\ d(\mathbf{f},\mathbf{g}) &\le d(\mathbf{f},\mathbf{h}) + d(\mathbf{h},\mathbf{g}) \quad \forall \mathbf{h}(t) \in \ \mathbf{C}\,[a,b] \end{aligned}$$



■

Beispiel 1.8 $\mathbb{X}-$ *Menge aller reell- oder komplexwertigen Funktionen* $\mathbf{f}\,(t)$, *die auf einem beliebigen Intervall* (a,b) *definiert sind, wobei gilt:* $\int_a^b |\ \mathbf{f}\,(t)\ |^p dt < \infty$.

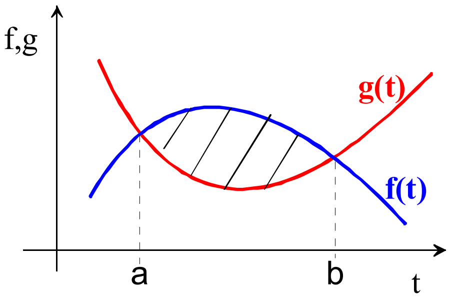
$$d(\mathbf{f},\mathbf{g}) = \left(\int_a^b |\ \mathbf{f}\,(t) - \mathbf{g}\,(t)\ |^p dt \right)^{1/p} \qquad \begin{array}{c} \forall \ \ \mathbf{f},\mathbf{g} \ \in \mathbb{X} \\ 1 \le p < \infty \end{array}$$

Mit der Ungleichung von MINKOWSKI kann die Gültigkeit des $(M3)$ Axioms gezeigt werden:

$$\left(\int_a^b |\,\mathbf{f}(t)-\mathbf{g}(t)\,|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |\,\mathbf{f}(t)-\mathbf{h}(t)\,|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |\,\mathbf{h}(t)-\mathbf{g}(t)\,|^p dt\right)^{1/p}$$

Damit ist $\mathbb{X}$ ein metrischer Raum.
Interpretation bei $p = 1$:

$$d(\mathbf{f},\mathbf{g}) = \int_a^b |\,\mathbf{f}(t)-\mathbf{g}(t)\,|dt$$



Das ist der absolute Betrag der Fläche zwischen den beiden Funktionen im Intervall $[a,b]$.

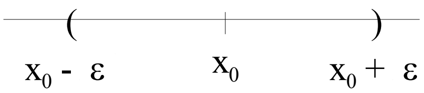
1.2 Topologische Grundbegriffe

Definition 1.2 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{X}$; *Die Menge $K_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \mid d(\mathbf{x},\mathbf{x}_0) < \varepsilon\}$ heißt **offene Kugel** mit dem Mittelpunkt $\mathbf{x}_0$ und dem Radius ε oder ε- **Umgebung von** $\mathbf{x}_0$.*

Definition 1.3 *Die Menge $A \subset \mathbb{X}$ heißt **offen**, wenn $\forall \mathbf{x} \in A \quad \exists r > 0 \mid K_r(\mathbf{x}) \subseteq A$.*

Definition 1.4 *Die Menge $U \subset \mathbb{X}$ heißt **Umgebung von** $\mathbf{x}_0$, wenn sie eine $\varepsilon-$Umgebung von $\mathbf{x}_0$ enthält.*
Diskussion einiger Beispiele von offenen Kugeln:

Beispiel 1.9 $\mathbb{X} = \mathbb{R}$; $\quad d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$
Offene Kugeln sind die offenen Intervalle $(\mathbf{x}_0 - \varepsilon; \mathbf{x}_0 + \varepsilon)$.



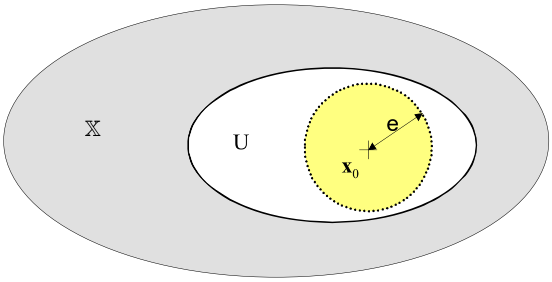


Abbildung 1.1:

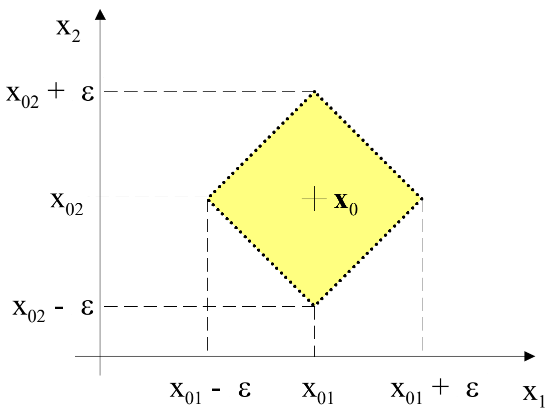
Beispiel 1.10 $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$
a) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

$$K_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \;|\; |x_1 - x_{01}| + |x_2 - x_{02}| < \varepsilon\right\}$$

Zur Interpretation nutzen wir die Gleichung $|x_1 - x_{01}| + |x_2 - x_{02}| = \varepsilon$. *Im 1. Fall erhalten wir aus der Definition des absoluten Betrages*

$$\begin{aligned} x_1 - x_{01} + x_2 - x_{02} &= \varepsilon \\ x_2 &= -x_1 + (\varepsilon + x_{01} + x_{02}) \end{aligned}$$

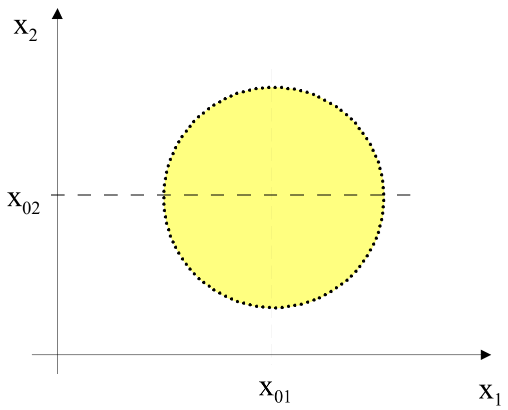
Das ist eine lineare Gleichung in x_1 *und* x_2.



b) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

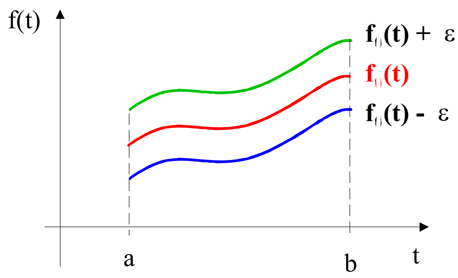
$$K_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \;|\; (x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 < \varepsilon\right\}$$

Das ist das Innere eines Kreises mit dem Mittelpunkt $\mathbf{x}_0$ *und dem Radius* $r = \varepsilon$.



Beispiel 1.11 $\mathbb{X} = C[a,b]; \quad d(\mathbf{f},\mathbf{g}) = \max\limits_{a\le t\le b} |\mathbf{f}(t)-\mathbf{g}(t)|$

$$K_\varepsilon(\mathbf{f}_0) = \left\{ \mathbf{f}(t) \in C[a,b] \mid \max_{a\le t\le b} |\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}_0(t)| < \varepsilon \right\} \quad \curvearrowright |\mathbf{f}(t)-\mathbf{f}_0(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [a,b]$$



Satz 1.1 *Die Vereinigung* $\bigcup\limits_{\lambda\in L} A_\lambda$ *beliebig vieler offener Mengen* A_λ, $\lambda \in L$ *ist die eine offene Menge.*

Beweis. Let A be the union $A = \bigcup\limits_{\lambda\in L} A_\lambda$ and $\mathbf{x} \in A$. $\curvearrowright$ $\exists \lambda_0 \mid \mathbf{x} \in A_{\lambda_0}$.
A_{λ_0} is an open set. $\curvearrowright$ $\exists r > 0 \mid K_r(\mathbf{x}) \subseteq A_{\lambda_0} \subset A$ ∎

Satz 1.2 *Der Durchschnitt* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ *endlich vieler offener Mengen* $\{A_i\}_{i=1}^n$ *ist offen.*

Beweis. Es sei $A = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ und $\mathbf{x} \in A$. $\curvearrowright$ $\mathbf{x} \in A_i \ ; \ i = 1,2,...,n$
$\curvearrowright$ $\exists r_i > 0 \mid K_{r_i}(\mathbf{x}) \subseteq A_i \ ; \ i = 1,2,...,n$
$r = \min\limits_{1\le i\le n} r_i > 0$, da das Minimum über eine endliche Menge gebildet wird.
$\curvearrowright$ $K_r(\mathbf{x}) \subset A_i \ ; \ i = 1,2,...,n$ $\curvearrowright$ $K_r(\mathbf{x}) \subset A$ ∎

Bemerkung 1.1 *Der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen ist i. Allg. nicht offen.*

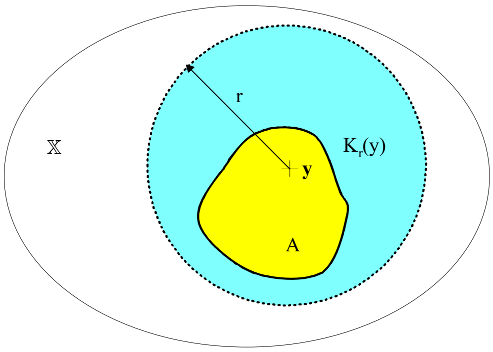
Beispiel 1.12 $\mathbb{X} = R; \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$
$A_n = \left(-\frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n}\right); \quad n = 1, 2, ... \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = [0; 1]$ *ist abgeschlossen.*

Bemerkung 1.2 *Der metrische Raum* $\mathbb{X}$ *sowie die leere Menge* $\varnothing$ *sind stets offen. (*$\varnothing$ *hat per Definition jede Eigenschaft.)*

Definition 1.5 $\mathbf{x}_0$ *heißt* ***innerer Punkt*** *von* $A \iff \exists \varepsilon > 0 \mid K_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subset A$

Bemerkung 1.3 *Eine Menge* A *ist offen* $\iff \forall \mathbf{x} \in A$ *sind innere Punkte.*

Definition 1.6 *Die Menge* $A \subset \mathbb{X}$ *heißt* ***beschränkt****, wenn* A *ganz in einer Kugel* $K_r(\mathbf{y})$ *mit* $\mathbf{y} \in \mathbb{X}$ *und* $0 < r < \infty$ *enthalten ist.*



Satz 1.3 *Die Vereinigung* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *endlich vieler beschränkter Mengen* $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ *ist beschränkt.*

Beweis. Es sei $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i. \quad \rightarrow \quad \exists r_i, \mathbf{y}_i \mid A_i \subseteq K_{r_i}(\mathbf{y}_i); \quad i = 1, 2, ..., n$
$a = \max_{2 \leq i \leq n} d(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{i-1}) < \infty$. Wir definieren $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1$ und wählenein beliebiges $\mathbf{x} \in A$.
O.B.d.A. folgt aus $\mathbf{x} \in A_n$

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= d(\mathbf{x}, \mathbf{y}_1) \\ &\leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}_n) + d(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1}) + ... + d(\mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1) \\ &\leq r_n \quad + \qquad (n-1)a < \infty. \quad \curvearrowright \\ \mathbf{x} &\in K_r(\mathbf{y} = \mathbf{y}_1) \end{aligned}$$

■

Bemerkung 1.4 *Die Vereinigung beliebig vieler beschränkter Mengen ist i. Allg. nicht beschränkt:*

Beispiel 1.13 $\mathbb{X} = \mathbb{R}; \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$
$A_i = [i; i+1); \quad i = 0, 1, 2, ... \quad \rightarrow \quad \underset{i}{\cup} A_i = [0; \infty)$

Definition 1.7 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{X}$ *heißt* ***Häufungspunkt*** *von* $A \subset \mathbb{X}$ *, wenn jede Umgebung von* $\mathbf{x}_0$ *mindestens ein* $\mathbf{x} \in A; \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ *enthält. Die Menge aller Häufungspunkte von* A *heißt* ***derivierte Menge*** A^+.

Definition 1.8 *Die Menge* $\overline{A} = A \cup A^+$ *heißt* ***Abschließung*** *oder abgeschlossenen Hülle von* A.

Definition 1.9 *Die Menge* $A \subset X$ *heißt* ***abgeschlossen****, wenn* $A^+ \subseteq A$.

Definition 1.10 *Die Menge* B ***heißt dicht in*** A*, wenn* $B \subset A \quad \wedge \quad \overline{B} = A$.

Beispiel 1.14 $\mathbb{X} = \mathbb{R} : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$
a) $A = [0; 1]$:
$A = A^+ = \overline{A}$; *Alle Punkte von* A *sind Häufungspunkte.*

b) $B = (0; 1)$:
$B \subset B^+ = \overline{B} = [0; 1] = A$;

c) $C = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N};\ n \neq 0\}$
Der einzige Häufungspunkt ist $\mathbf{x}_0 = 0$*:* $C^+ = \{0\}$
C *ist nicht abgeschlossen wegen* $C^+ \nsubseteq C$.
C *ist nicht offen in* $\mathbb{R}$.

d) Die Menge $\mathbb{Q}$ *der rationalen Zahlen ist dicht in* $\mathbb{R}$.

Bemerkung 1.5 *Der Durchschnitt beliebig vieler und die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen von* $\mathbb{X}$ *sind stets wieder abgeschlossen.*

Bemerkung 1.6 *Die leere Menge und* $\mathbb{X}$ *sind selbst wieder abgeschlossen.*

Bemerkung 1.7 *Die Teilmenge* A *eines metrischen Raumes ist abgeschlossen* $\Longleftrightarrow$ $B = \mathbb{X} \setminus A$ *ist eine offene Menge.*

1.3 Konvergenz und Vollständigkeit

Es sei $\mathbb{X}$ ein metrischer Raum mit der Abstandsfunktion $d(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{X}$.

Definition 1.11 *Eine **Folge** $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{X}$ **heißt konvergent**, wenn ein Element $\mathbf{x}_0\in\mathbb{X}$ existiert, mit $\lim_{n\to\infty} d(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_0)=0$. $\mathbf{x}_0$ heißt **Grenzwert** der Folge.*

Man schreibt: $\lim_{n\to\infty}\mathbf{x}_n=\mathbf{x}_0$ oder $\mathbf{x}_n \overset{n\to\infty}{\to} \mathbf{x}_0$ bzw. in $\delta-\varepsilon-$Notation:
$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\mid d(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_0)<\varepsilon\quad\forall n>n_0$.

Satz 1.4 *Der Grenzwert einer Folge ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$ Grenzwerte der Folge $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ sind und $\mathbf{x}_0\neq\mathbf{y}_0$ gilt. $\curvearrowright$

$$0\le d(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\le d(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_n)+d(\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_0)$$

Für $n\to\infty$ erhalten wir $d(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=0$, Widerspruch! ■

Beispiel 1.15 $\mathbb{X}=\mathbb{R}^n,\quad d(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2)}$:

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{x}^k=\mathbf{x}^0;\quad \mathbf{x}^k=\begin{pmatrix}x_1^k\\ \vdots\\ x_n^k\end{pmatrix}\quad \mathbf{x}^0=\begin{pmatrix}x_1^0\\ \vdots\\ x_n^0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow\quad d(\mathbf{x}^k,\mathbf{x}^0)=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i^k-x_i^0)^2\right)}\overset{k\to\infty}{\to}0\\
&\Longleftrightarrow\quad (x_i^k-x_i^0)^2\overset{k\to\infty}{\to}0\quad\forall i\\
&\Longleftrightarrow\quad x_i^k\overset{k\to\infty}{\to}x_i^0\quad\forall i
\end{aligned}$$

Konvergenz im Euklidischen Raum ist koordinatenweise Konvergenz, was äquivalent zu Konvergenz aller Komponenten ist.

Beispiel 1.16 $\mathbb{X}=C[a,b],\quad d(\mathbf{x},\mathbf{y})=\max_{a\le t\le b}|\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}(t)|$:

$$\lim_{k\to\infty}\mathbf{x}_k(t)=\mathbf{x}_0(t)\Longleftrightarrow d(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_0)=\max_{a\le t\le b}|\mathbf{x}_k(t)-\mathbf{x}_0(t)|\overset{k\to\infty}{\to}0$$

$\curvearrowright\quad\forall\varepsilon>0\quad\exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}\mid |\mathbf{x}_k(t)-\mathbf{x}_0(t)|<\varepsilon\quad\forall k>n_0(\varepsilon),\quad\forall t\in[a,b]$
$\curvearrowright\quad n_0(\varepsilon)$ *ist unabhängig von* t.
Die Konvergen einer Funktionenfolge in $C[a,b]$ ist die gleichmäßige Konvergenz bezüglich t.

Beispiel 1.17 $\mathbb{X} = C[a,b], \quad d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(\int_a^b |\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}; \quad p \geq 1,\ fest:$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_0(t) \Longleftrightarrow d(\mathbf{x}_k,\mathbf{x}_0) = \left(\int_a^b |\mathbf{x}_k(t)-\mathbf{x}_0(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \mid \stackrel{k\to\infty}{\to} 0$$

Diese Konvergenz heißt Konvergenz im p-ten Mittel Wenn $p = 2$ gilt, dann spricht man von Konvergenz im quadratischen Mittel.

Bemerkung 1.8 $A \subset \mathbb{X}; \quad \mathbf{x}_0 \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists \{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty \subset A$ *mit* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$

Definition 1.12 *Cauchyfolge*
*Eine Folge $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{X}$ heißt **Cauchyfolge**, wenn*
$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad | \quad d(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_m) < \varepsilon \quad \forall n,m > n_0(\varepsilon),$ *d.h.* $\lim_{n,m\to\infty} d(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_m) = 0.$

Satz 1.5 *Jede in $\mathbb{X}$ konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.*

Beweis. Angenommen $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty$ konvergiert und $\varepsilon > 0:$
$\curvearrowright \quad \exists \mathbf{x}_0 \in \mathbb{X},\ n_0 \in \mathbb{N},\ n_0 > 0 \mid d(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad d(\mathbf{x}_m,\mathbf{x}_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n,m > n_0$
$\curvearrowright \quad d(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_m) \leq d(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_0) + d(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_m) < \varepsilon \quad \forall n,m > n_0$ ■

Bemerkung 1.9 *Die Umkehrung dieses Satzes gilt im Allg. nicht! D.h. nicht jede Cauchy-Folge muss in einem beliebigen metrischen Raum gegen ein Element des Raumes konvergieren.*

Beispiel 1.18 $\mathbb{X} = (0;1); \quad d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$
Wir wählen $\mathbf{x}_n = \frac{1}{n} : \{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty$ Das ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{X}$, mit $n_0(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1, \quad \forall\varepsilon > 0$. (In eckigen Klammern wird der ganze Anteil der Zahl angegben.).
$\curvearrowright$

$$d(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon \quad \forall n,m > n_0,$$

aber der Grenzwert $\mathbf{x}_0 = 0$ ist kein Element von $\mathbb{X}$. $\Longrightarrow$ $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty$ ist nicht konvergent in $\mathbb{X}$ entsprechend Definition.

Definition 1.13 *Ein metrischer Raum $\mathbb{X}$ heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge aus $\mathbb{X}$ gegen ein Element von $\mathbb{X}$ konvergiert.*

Beispiel 1.19 $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n, \quad d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{(\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2)}$ *ist vollständig:*
$\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, mit $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{(\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2)}$ ist vollständig:
Sei $\{\mathbf{x}^k\}_{k=1}^\infty$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$ $\curvearrowright$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \mid d(\mathbf{x}^k,\mathbf{x}^l) = \sqrt{\sum\nolimits_{i=1}^n (x_i^k - x_i^l)^2} < \varepsilon \quad \forall k,l > n_0 \quad \curvearrowright$$

$$\left|x_i^k - x_i^l\right| < \varepsilon \quad \forall k,l > n_0 \quad \wedge \quad i = 1,2,...,n$$

$\curvearrowright$ $\{x_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ *ist eine Cauchyfolge in* $\mathbb{R}$ $\forall i$. $\mathbb{R}$ *ist vollständig.*
$\curvearrowright$ $\exists$ *der Grenzwert* $x_i^0 \in \mathbb{R}$ *für* $i = 1, 2, .., n$
$\curvearrowright$ $\exists$ *der Grenzwert* $\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Beispiel 1.20 $\mathbb{X} = C[a, b]$, $\quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\limits_{a \le t \le b} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|$ *ist vollständig.*
Der Beweis besteht aus 3 Teilen :
1) Wir konstruieren ein Element $\mathbf{x}_0(t)$ *das der Grenzwert einer Cauchyfolge sein kann.*
2) Wir zeigen, dass $\mathbf{x}_0(t)$ *der Grenzwert der Folge ist.*
3) Wir beweisen: $\mathbf{x}_0(t) \in C[a, b]$.

1) Es sei $\{\mathbf{x}_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *eine Cauchyfolge.in* $C[a, b]$ $\curvearrowright$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \mid d(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{x}_m(t)) = \max_{a \le t \le b} |\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_m(t)| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0$$
$$\curvearrowright \quad |\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_m(t)| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0, \quad \forall t \in [a, b]$$

t sei beliebig, aber fest gewählt. $\curvearrowright$ $\{\mathbf{x}_k(t)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *und*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \mid |\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_m(t)| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0$$

bedeutet, dass $\{\mathbf{x}_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *eine Cauchyfolge in* $\mathbb{R}$ *ist.* $\mathbb{R}$ *ist vollständig.*

$$\curvearrowright \quad \mathbf{x}_n(t) \quad \overset{n\to\infty}{\to} \quad \mathbf{x}_0(t) \quad \forall t \in [a, b] \quad (*)$$

$\curvearrowright$ $\mathbf{x}_0(t)$ *ist eine Funktion über dem Intervall* $[a, b]$.

2) Aus $(*)$ *folgt*

$$|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_{n+k}(t)| < \varepsilon \quad \forall n > n_0, k \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [a, b].$$

Für $k \to \infty$ *erhalten wir*

$$|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_0(t)| < \varepsilon \quad \forall n > n_0 \quad \forall t \in [a, b].$$

$\curvearrowright$ $\{\mathbf{x}_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ *ist geichmäßig konvergent auf* $[a, b]$. *Der Grenzwert ist* $\mathbf{x}_0(t)$.

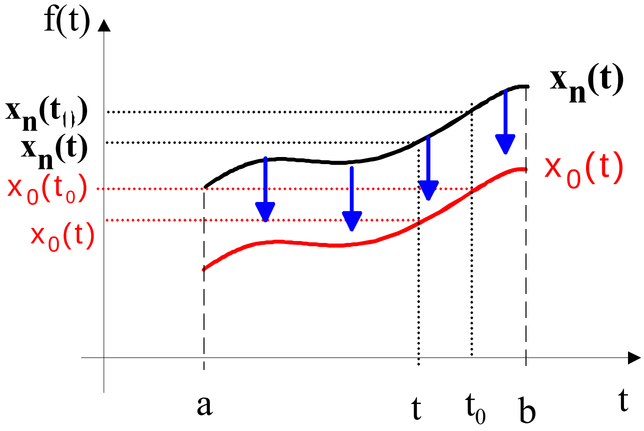
3) Zu zeigen ist: $\mathbf{x}_0(t)$ *ist eine stetige Funktion.*
$\mathbf{x}_n(t)$ *ist stetig. Das heißt:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid |\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_n(t_0)| < \varepsilon \quad \forall t \in [a, b]; |t - t_0| < \delta$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}_0(t_0)| &\le |\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}_n(t)| + |\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_n(t_0)| + |\mathbf{x}_n(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0)| \\ &\le 3\varepsilon \quad \forall |t - t_0| < \delta \end{aligned}$$

$\curvearrowright \mathbf{x}_0(t) \in C[a,b]$.



Beispiel 1.21 $\mathbb{X} = \mathbb{Q}$: *Die Menge der rationalen Zahlen mit* $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ *ist nicht vollständig:*
Gegenbeispiel: $\left\{\mathbf{x}_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ *is Cauchy, but* $\lim \mathbf{x}_n = e \notin \mathbb{Q}$ *(Euler's constant)*

Beispiel 1.22 $\mathbb{X} = C[0,1], \quad d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(\int_0^1 |\mathbf{x}(t)-\mathbf{y}(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ *ist nicht vollständig:*
Gegenbeispiel: Wir betrachten die Folge $\{\mathbf{x}_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\mathbf{x}_n(t) = \begin{cases} n^{1/3} & for \quad t \leq \frac{1}{n} \\ t^{-1/3} & for \quad t > \frac{1}{n} \end{cases}$$

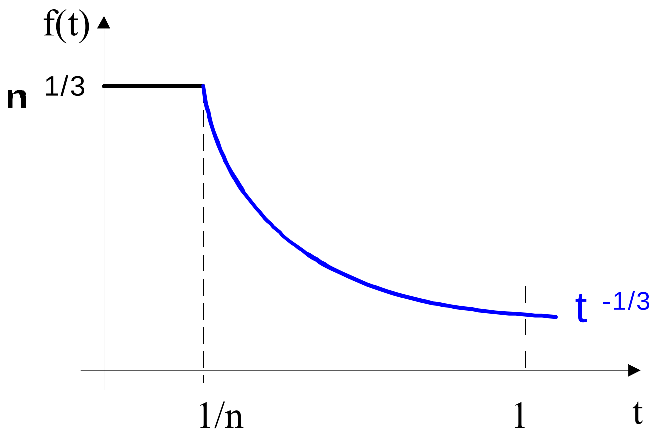
$\mathbf{x}_n(t)$ *ist stetig auf* $[0,1]$ *für alle* n *wegen* $\lim\limits_{t\to 1/n} t^{-1/3} = \left(\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{3}} = n^{\frac{1}{3}}$. *Der Grenzwert von* $\{\mathbf{x}_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ *ist*

$$\mathbf{x}_0(t) = t^{-\frac{1}{3}}$$

denn mit $(*)$*:* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \le a^2 + b^2$ *für* $a, b > 0$*. erhalten wir*

$$\begin{aligned}
(d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_0))^2 &= \int_0^1 |\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_0(t)|^2 dt \\
&= \int_0^{1/n} |n^{1/3} - t^{-1/3}|^2 dt \\
&\overset{(*)}{\le} \int_0^{1/n} \left(n^{2/3} + t^{-2/3}\right) dt \\
&= n^{2/3} \cdot \frac{1}{n} + 3\left(\frac{1}{n}\right)^{1/3} \\
&= 4n^{-1/3} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.
\end{aligned}$$

Aber $\mathbf{x}_0(t)$ *ist nicht stetig auf* $[0, 1]$*.*



1.4 Kompakte Mengen

Definition 1.14 $\mathbb{X}$ *sei ein metrischer Raum mit dem Abstand* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$*. Die Menge* $A \subset \mathbb{X}$ *heißt* ***relativ kompakt****, wenn jede Folge* $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty \subset A$ *eine konvergente Teilfolge* $\left\{\mathbf{x}_n^{'}\right\}_{n=1}^\infty$ *enthält mit* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n^{'} = \mathbf{x} \in \mathbb{X}$*.*

Definition 1.15 *Die Menge* $A \subset \mathbb{X}$ *heißt* ***kompakt****, wenn jede Folge* $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^\infty \subset A$ *eine konvergente Teilfolge* $\left\{\mathbf{x}_n^{'}\right\}_{n=1}^\infty$ *enthält mit* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n^{'} = \mathbf{x} \in A$*.*

Bemerkung 1.10 $A \subset \mathbb{X}$ *ist kompakt* $\iff$ $A \subset \mathbb{X}$ *ist relativ kompakt und abgeschlossen.*

Beispiel 1.23 $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ *mit* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$: *Jede beschränkte Menge* $A \subset \mathbb{X}$ *ist relativ kompakt.*
Für jede beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{X}$ *kann man ein abgeschlossenes Intervall* $I = [a, b]$ *mit* $A \subset [a, b] = I$ *finden.*
Aus einer beliebigen Folge $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ *wählen wir eine Teilfolge* $\{\widetilde{\mathbf{x}}_n\}$ *durch sukzessive Intervallhalbierung in der folgenden Art und Weise aus:*
Im n-ten Schritt wählen wir $\widetilde{\mathbf{x}}_n$ *aus der Hälfte des Intervalls, in der die Anzahl der Folgenelemente unendlich ist.*

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad d(\widetilde{\mathbf{x}}_n, \widetilde{\mathbf{x}}_m) \leq \frac{b-a}{n} \quad for \quad m > n \\
&\Longrightarrow \quad \{\widetilde{\mathbf{x}}_n\} \text{ ist eine Cauchyfolge in } \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow \quad \exists \mathbf{x} \in \mathbb{X} \mid \lim_{n\to\infty} \widetilde{\mathbf{x}}_n = \mathbf{x} \\
&\Longrightarrow \quad A \subset \mathbb{X} \text{ ist relativ kompakt}
\end{aligned}$$

Beispiel 1.24 $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2)}$:
Jede beschränkte Menge $A \subset \mathbb{X}$ *ist relativ kompakt.*

$A \subset \mathbb{X}$ *sei beschränkt und* $\{\mathbf{x}^m\}_{m=1}^{\infty} \subset A$ *sei eine beliebige Folge mit* $\mathbf{x}^m = \begin{pmatrix} x_1^m \\ \vdots \\ x_n^m \end{pmatrix}$.

Dann gibt es ein Element $\mathbf{x}^0$ *für das gilt* $d(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^m) \leq M < \infty \quad \forall m$.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \left|x_i^0 - x_i^m\right| \leq M \quad i = 1, 2, ..., n \\
&\Longrightarrow \quad \{\mathbf{x}_i^m\}_{m=1}^{\infty} \text{ ist beschränkt in } \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, ..., n
\end{aligned}$$

und aufgrund des vorherigen Beispiels existiert eine Teilfolge $\{\widetilde{\mathbf{x}}_i^m\} \subset \{\mathbf{x}_i^m\}$ *mit* $\widetilde{\mathbf{x}}_i^m \overset{m\to\infty}{\to} \mathbf{x}_i, \quad i = 1, 2, ..., n.$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \widetilde{\mathbf{x}}^m \overset{m\to\infty}{\to} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \\
&\Longrightarrow \quad A \subset \mathbb{R}^n \text{ ist relativ kompakt.}
\end{aligned}$$

Beispiel 1.25 $\mathbb{X} = C[a, b], \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{a \leq t \leq b} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|$:
Sei $A \subset \mathbb{X}$ *beschränkt und abgeschlossen*

$$\max_{a \leq t \leq b} |\mathbf{x}(t)| \leq M < \infty \quad \forall \mathbf{x}(t) \in A$$

Sei $A \subset \mathbb{X}$ *gleichgradig stetig. Aus*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \mid \ |t - s| < \delta \text{ folgt } |\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)| < \varepsilon \quad \forall \mathbf{x} \in A;$$

$\Longrightarrow$ *A ist in* $\mathbb{X}$ *kompakt (Satz von Arzela-Ascoli)*
Beweis: s. [3, S.68ff]
z. B.: $A = \{\mathbf{x}(t) \mid |\mathbf{x}(t)| \leq M_1;\ \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| \leq M_2;\quad a \leq t \leq b\}$
$\curvearrowright$ *A ist beschränkt und abgeschlossen*
$\curvearrowright$ $MWS \Longrightarrow |\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)| \leq M_2\,|s-t|$
$\curvearrowright$ *A ist gleichgradig stetig*
$\curvearrowright$ *A ist kompakt*

Folgerung 1.4 *In einem metrischen Raum ist jede relativ kompakte Menge beschränkt.*

Beweis. $A \subset \mathbb{X}$ sei relativ kompakt und unbeschränkt.

$$\Longrightarrow \exists\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \mid d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_n) \geq n$$

Wegen der relativen Kompaktheit von A muss es aber eine konvergente Teilfolge geben. Widerspruch! ∎

Folgerung 1.5 *Aus der Beschränktheit einer Menge folgt i. Allg. nicht die relative Kompaktheit!*

Beispiel 1.26 $A = \mathbb{X} = L_2[0,1], \quad d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{\int_0^1 |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|^2 dt}$
$A = \{\mathbf{g}_n(t) = \sin(n\pi t)\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{g}_n, \mathbf{g}_m) &= \sqrt{\int_0^1 |\mathbf{g}_n(t) - \mathbf{g}_m(t)|^2 dt} \\
&= \sqrt{\int_0^1 |\sin(n\pi t) - \sin(m\pi t)|^2 dt} \\
&= \sqrt{\int_0^1 \left(\sin^2(n\pi t) - 2\sin(n\pi t)\sin(m\pi t) + \sin^2(m\pi t)\right) dt} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{2}} = 1 \\
d(\mathbf{0}, \mathbf{g}_m) &= \sqrt{\int_0^1 \sin^2(m\pi t) dt} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \forall m
\end{aligned}$$

A is bounded, but not sequentially compact.

Nebenrechnung:
$\int \sin^2(n\pi t)dt = \int \sin^2(u)\frac{du}{n\pi} = \frac{1}{2n\pi}(u - \sin u \cdot \cos u) + C$
$= \frac{1}{2n\pi}(n\pi t - \sin(n\pi t) \cdot \cos((n\pi t))) + C$
$\Longrightarrow \int_0^1 \sin^2(n\pi t)dt = \frac{1}{2n\pi}(n\pi - 0) = \frac{1}{2}$

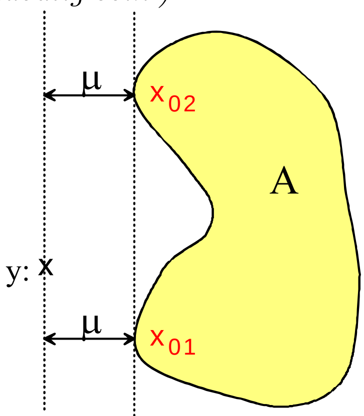
Beispiel 1.27 $\mathbb{X}$*: Menge der Zahlenfolgen* $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *mit* $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2 < \infty$ *und* $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\sum_{i=1}^{\infty}|x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$
A sei die Einheitskugel: $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \mid \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2 \leq 1\}$.
A ist beschränkt und abgeschlossen. Betrachten wir nun $\boldsymbol{\xi} = \{\boldsymbol{\xi}^i\}_{i=1}^{\infty} \subset A$ *mit*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^i &= \Big\{0, ..., 0, \underset{Position\ i}{1}, 0, ...\Big\} \\ &\Longrightarrow d(\boldsymbol{\xi}^i, \boldsymbol{\xi}^j) = \sqrt{2} \quad if \quad i \neq j \end{aligned}$$

Deshalb gibt es keine konvergente Teilfolge in $\boldsymbol{\xi}$ *und die Einheitskugel ist nicht relativ kompakt!*

Satz 1.6 *WEIERSTRASS*
Es sei $f : A \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge* $A \subset \mathbb{X}$*.Dann nimmt* f *ihre Extrema auf* A *an. D.h.*$\exists\ \underline{\mathbf{x}} \in A$ *mit* $f(\underline{\mathbf{x}}) = \min_{\mathbf{x}\in A} f(\mathbf{x}) \quad \wedge \quad \exists\ \overline{\mathbf{x}} \in A$ *mit* $f(\overline{\mathbf{x}}) = \max_{\mathbf{x}\in A} f(\overline{\mathbf{x}})$
Beweis. *(für das Minimum)*
Wir setzen: $\alpha = \inf\limits_{x\in A} f(\mathbf{x})$ *und müssen Folgendes beweisen:* $\exists\ \underline{\mathbf{x}} \in A \mid f(\underline{\mathbf{x}}) = \alpha$.
Wir konstruieren nun die Folge $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ *so, dass gilt* $f(\mathbf{x}_{n)} \leq \alpha + \frac{1}{n}$; $n = 1, 2, ...$
A ist kompakt $\Longrightarrow$ *Es gibt eine Teilfolge* $\{\widetilde{\mathbf{x}}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$*, die gegen* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{A}$ *konvergiert für* $n \to \infty$.
f *ist stetig auf* A*, woraus für* $n \to \infty$ *folgt* $f(\widetilde{\mathbf{x}}_n) \to f(\mathbf{x})$. ■

Satz 1.7 $A \subset \mathbb{X}$ *sei kompakt. Dann existiert zu jedem fest gewählten* $\mathbf{y} \in \mathbb{X}$ *ein Punkt* $\mathbf{x}_0 \in A$*, der zu* $\mathbf{y}$ *den geringsten Abstand besitzt.* $\mathbf{x}_0$ *heißt Bestapproximation von* $\mathbf{y}$ *in A. (*$\mathbf{x}_0$ *muss nicht eindeutig sein!)*



Beweis. Aus $\mu = \inf\limits_{x\in A} d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ dass es eine Folge $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ gibt, für die gilt

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{x}_n) \leq \mu + \frac{1}{n}, \ n = 1, 2, ...$$

A ist kompakt $\Longrightarrow$ Es gibt eine Teilfolge $\{\widetilde{\mathbf{x}}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, die für $n \to \infty$ gegen $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{A}$ konvergiert.

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0) \leq d(\mathbf{y}, \widetilde{\mathbf{x}}_n) + d(\widetilde{\mathbf{x}}_n, \mathbf{x}_0) \overset{n \to \infty}{\to} \mu$$

Andererseits gilt wegen $x_0 \in A$

$$d(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0) \geq \mu$$

Folglich erhalten wir $d(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0) = \mu$ und $\mathbf{x}_0$ ist die beste Approximation. ■

Zusammenfassung:

Der Kompaktheitsbegriff ist die Verallgemeinerung der Begriffe abgeschlossenes Intervall bzw. beschränkte abgeschlossene Menge. Vergleich mit der Analysis: Auf einem endlichen, abgeschlossenen Intervall nimmt eine stetige Funktion ihr Extremum an $\Longrightarrow$ Satz von Weierstraß.

1.5 Operatoren

Die Verallgemeinerung des Funktionsbegriffes führt auf die Definition des Operators. Im Weiteren seien $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ metrische Räume mit $d_x(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ und $d_y(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sowie $A \subseteq \mathbb{X}$; $\quad B \subseteq \mathbb{Y}$.

Definition 1.16 *Eine Abbildung $T : A \to B$, die jedem $\mathbf{x} \in A$ eindeutig ein $\mathbf{y} \in B$ zuordnet heißt **Operator**: $T\mathbf{x} = \mathbf{y}$ mit dem Definitionsbereich A.*

Definition 1.17 *Bildbereich von T: $T(A) = \{\mathbf{y} \in B \mid \exists \mathbf{x} \in A \text{ mit } T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$.*

Beispiel 1.28 *Lineares Gleichungssystem:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 23 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow T\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \text{mit } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2,\ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

Beispiel 1.29 $lnx = y \iff T\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad$ *mit* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^+,\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^1,\ T : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^1$

Beispiel 1.30 $\frac{d}{dt}x(t) = y(t) \iff T\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad$ *mit* $\mathbf{x} \in C^1[a, b];\ \mathbf{y} \in C[a, b];$

$T : C^1[a, b] \to C[a, b]$:*Differentialoperator*

Beispiel 1.31 *Die Abbildung*

$$R\mathbf{x} = \int_a^b \mathbf{x}(t)dt$$

definiert einen Integraloperator R, der von $C[a, b]$ nach $\mathbb{R}$ abbildet:

Beispiel 1.32 *Die Abbildung*

$$S\mathbf{x}(t) = \int_a^b F(t, s, \mathbf{x}(s))ds; \quad t \in [a, b]$$

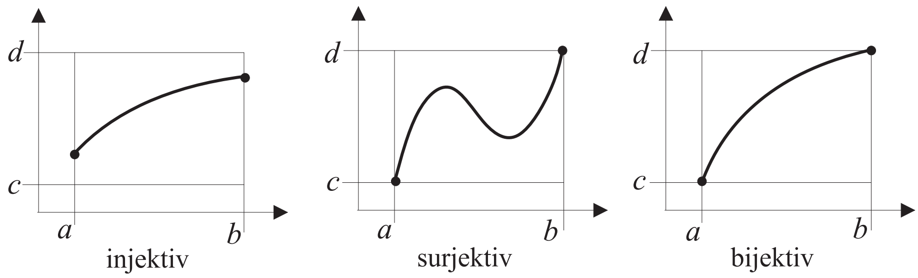
definiert einen Integraloperator S, der von $C[a,b]$ nach $C[a,b]$ abbildet; F wird Kern des Operators genannt.

Integral- und Differentialgleichungen sind ein weites Feld für die Anwendung der Operatortheorie. Sie waren ein Einstiegspunkt für die Entwicklung der Funktionalanalysis.

Definition 1.18 *Der Operator $T : A \to B$ heißt*

- **surjektiv** $\Longleftrightarrow$ $T(A) = B$
- **injektiv** $\Longleftrightarrow$ $T(x) = T(y) \quad \curvearrowright \quad x = y$
- **bijektiv** $\Longleftrightarrow$ wenn T surjektiv und injektiv.

Beispiel 1.33 $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbb{R}, \quad \mathbf{A} = [a, b], \quad \mathbf{B} = [c, d], \quad \mathbf{T} : \mathbf{A} \subseteq \mathbf{X} \to \mathbf{B}$



Definition 1.19 *Ist der Operator $T : A \to B$ bijektiv, so existiert der **inverse Operator** $T^{-1} : B \to A$, der durch $T^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{x} \quad \Longleftrightarrow \quad T\mathbf{x} = \mathbf{y}$ definiert ist.*

Definition 1.20 *Der **Operator** $T : A \to B$ **heißt stetig im Punkt** $\mathbf{x}_0 \in A$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) \quad | \quad d_y(T\mathbf{x}, T\mathbf{x}_0) < \varepsilon \quad \forall \mathbf{x} \in A$ mit $d_x(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta$. Ist T stetig in allen Punkten $\mathbf{x}_0 \in A$, so heißt T **stetig auf** A. Kann $\delta(x_0, \varepsilon)$ außerdem für beliebiges ε unabhängig von x_0 gewählt werden, so heißt T **gleichmäßig stetig auf** A.*

Folgerung 1.6 *T gleichmäßig stetig heißt also:*
$\forall \mathbf{x} \in A, \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \mid d_y(T\mathbf{x}, T\mathbf{y}) < \varepsilon \quad \forall \mathbf{y} \in A$ *mit* $d_x(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$

Satz 1.8 *$\mathbb{X}$ mit $d_x(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ und $\mathbb{Y}$ mit $d_y(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ seien metrische Räume, T:$A \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ sei ein stetiger Operator auf der kompakten Menge A, dann ist T auf A gleichmäßig stetig.*

Beweis. Angenommen T ist nicht geichmäßig stetig, dann findet man eine Zahl $\varepsilon_0 > 0$ und Folgen $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A,\ \{\mathbf{y}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ mit

$$d_x(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) < \frac{1}{n} \text{ } und \text{ } d_y(T\mathbf{x}_n, T\mathbf{y}_n) \geq \varepsilon_0 \quad (*).$$

A ist kompakt, woraus folgt, dass eine Teilfolge $\{\widetilde{\mathbf{x}}_n\}_{n=1}^{\infty}$ existiert, die mit $n \to \infty$ gegen ein Element $\mathbf{x}$ aus$A$ konvergiert. $\curvearrowright$

$$d_x(\mathbf{y}_n, \mathbf{x}) \leq d_x(\mathbf{y}_n, \widetilde{\mathbf{x}}_n) + d(\widetilde{\mathbf{x}}_n, \mathbf{x}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\curvearrowright \quad y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{x}$. und T ist stetig $\curvearrowright$

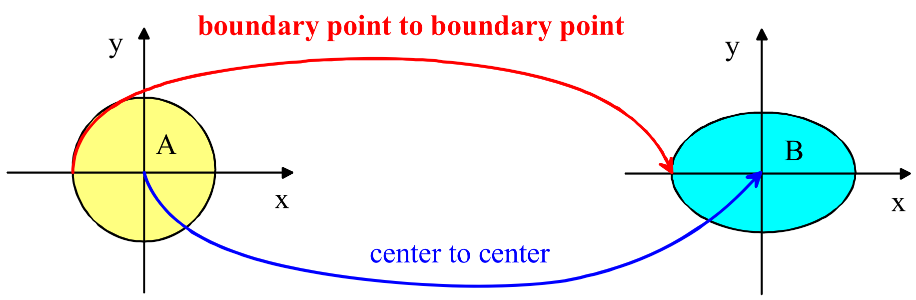
$$d_y(T\widetilde{\mathbf{x}}_n, T\mathbf{y}_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0: \quad \text{Widerspruch zu } (*)$$

■

Definition 1.21 *Eine bijektive stetige Abbildung $T : A \to B$, deren inverse Abbildung ebenfalls stetig ist, heißt* ***Homöomorphismus****. Zwei Mengen heißen homöomorph, wenn ein Homöomorphismus $T : A \to B$ existiert.*

Beispiel 1.34 *Kreis $A := \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$ und Ellipse $B := \{(x, y) \in R^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ sind homöomorph.Die Abbildung T lautet dann:*

$$T(x, y) = \left(\frac{a}{r}x; \frac{b}{r}y\right); \quad T : A \to B$$



1.6 Der Banachsche Fixpunktsatz

Der Banachsche Fixpunktsatz ist von sehr großer Bedeutung für z. B.

- Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für verschiedenste mathematische Probleme
- die Berechnung der Lösung von Operatorgleichungen (s. Numerik)

Im Weiteren sei $\mathbb{X}$ ein metrischer Raum mit der Metrik $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}),\ A \subseteq \mathbb{X}$

Definition 1.22 *Sei A abgeschlossen. Die Abbildung $T : A \to A$ heißt* ***kontrahierend****, wenn gilt $d(T\mathbf{x}, T\mathbf{y}) \leq qd(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mit $q < 1 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$.*

Satz 1.9 ***Banachscher Fixpunktsatz (FPS)***
Es sei A eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes $\mathbb{X}$, die durch den kontrahierenden Operator T in sich abgebildet wird. Dann hat die Fixpunktgleichung $\mathbf{x} = T\mathbf{x}$ genau eine Lösung $\mathbf{x}^* \in A$, den Fixpunkt von T.
Die Folge $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $\mathbf{x}_0 \in A$, $\quad x_{n+1} = T\mathbf{x}_n$ konvergiert für jedes $\mathbf{x}_0 \in A$ gegen $\mathbf{x}^*$.
Es gelten die Fehlerabschätzungen:

- a priori : $d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}^*) \leq \frac{q^n}{1-q} d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$
- a posteriori : $d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}^*) \leq \frac{q}{1-q} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1})$.

Bemerkung 1.11 *Die Satzvoraussetzungen lassen sich abschwächen, was zu Verallgemeinerungen des Banachschen FPS führt.*

Bemerkung 1.12 *Es gibt weitere Typen von FPS mit ähnlichen Aussagen, z.B. den FPS von Schauder (RWP von DGl) oder den FPS von Kakutani (Ökonomie). Sie sind i. Allg. auf spezielle mathematische Hintergründe abgestellt.*

Beweis. Hilfsrechnung: $\mathbf{x}_0 \in A; \quad \mathbf{x}_{n+1} = T\mathbf{x}_n \curvearrowright$

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}) &= d(T\mathbf{x}_{n-1}, T\mathbf{x}_n) \leq qd(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) \\ &= qd(T\mathbf{x}_{n-2}, T\mathbf{x}_{n-1}) \leq q^2 d(\mathbf{x}_{n-2}, \mathbf{x}_{n-1}) = ... \\ &\leq q^{n-k} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) \quad for\ 0 \leq k \leq n \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+m}) &\leq d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}) + d(\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_{n+2}) + ... + d(\mathbf{x}_{n+m-1}, \mathbf{x}_{n+m}) \\ &\leq d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}) + d(T\mathbf{x}_n, T\mathbf{x}_{n+1}) + ... + d(T\mathbf{x}_{n+m-2}, T\mathbf{x}_{n+m-1}) \\ &\leq (1 + q + q^2 + ... + q^{m-1}) d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}) \\ &\leq (1 + q + q^2 + ... + q^{m-1}) q^{n-k} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) \\ &= \frac{1 - q^m}{1 - q} q^{n-k} d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}) \quad for\ 0 \leq k \leq n;\ m \geq 1. \quad (*) \end{aligned}$$

A) Existenz: Aus $(*)$ folgt

$$\lim_{k\to\infty} d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+m}) = 0$$

$\curvearrowright$ $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist eine Cauchyfolge in A. A ist abgschlossen, $A \subseteq \mathbb{X}$ und $\mathbb{X}$ ist vollständig. Damit existiert ein Element $\mathbf{x}^*$,für das gilt $\mathbf{x}^* = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$.

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}^*, T\mathbf{x}^*) &\leq d(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_n) + d(\mathbf{x}_n, T\mathbf{x}^*) \\ &\leq d(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_n) + d(T\mathbf{x}_{n-1}, T\mathbf{x}^*) \\ &\leq d(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_n) + d(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}^*) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

$$\curvearrowright\ T\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*$$

B) Eindeutigkeit: Annahme: $\exists \mathbf{x}^*,\ \mathbf{y}^* \mid \mathbf{x}^* \neq \mathbf{y}^*$ mit $T\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*$ und $T\mathbf{y}^* = \mathbf{y}^*$. $\curvearrowright$

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) &= d(T\mathbf{x}^*, T\mathbf{y}^*) \leq q d(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \\ &\Longrightarrow q \geq 1 : Widerspruch \end{aligned}$$

C) Fehlerabschätzungen:
a posterior: Wir nutzen $(*)$ mit $k = n-1$ und $m \to \infty$.
a priori: Wir benutzen $(*)$ mit $k = 0$ und $m \to \infty$. ■

Beispiel 1.35 *Anwendung auf die Integralgleichung:*
$x(t) = \lambda \int_a^b F(t, s, x(s))ds + f(t); \quad a \leq t \leq b; \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad (+)$
unter den Voraussetzungen:
1) $F : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sei stetig*
2) F_x *sei stetig;* $|F_x(t,s,x)| \leq M_1, \quad \forall t, s \in [a,b], x \in \mathbb{R}$
3) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *sei stetig*
4) $\lambda \in \mathbb{R}$, *so dass gilt:* $(b-a)|\lambda| M_1 = q < 1$.

Satz 1.10 *Unter den Voraussetzungen 1) bis 4) besitzt die obige Integralgleichung eine eindeutig bestimmte Lösung* $x^*(t) \in C[a,b]$.

Beweis. Wenn der Integral operator

$$T_\lambda \mathbf{x}(t) = \lambda \int_a^b F(t, s, \mathbf{x}(s))ds + f(t); \quad a \leq t \leq b$$

benutz wird, kann die Integralgleichung $(+)$ in Form einer Fixpunktgleichung geschrieben werden:

$$\mathbf{x}(t) = T_\lambda \mathbf{x}(t); \quad a \leq t \leq b.$$

A)

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\in C[a,b] \stackrel{1)\ 3)}{\Longrightarrow} T_\lambda \mathbf{x}(t) \in C[a,b] \\ &\curvearrowright \quad T_\lambda : C[a,b] \to C[a,b] \end{aligned}$$

B) Unter Nutzung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung erhalten wir
$\forall s,t \in [a,b] \quad \wedge \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad \exists \xi \in \mathbb{R} \mid$

$$|F(t,s,x_1) - F(t,s,x_2)| = |F_x(t,s,\xi)|\,|x_1 - x_2| \overset{2)}{\leq} M_1\,|x_1 - x_2|$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
d(T_\lambda \mathbf{x}_1(t), T_\lambda \mathbf{x}_2(t)) &= \max_{a \leq t \leq b} |T_\lambda \mathbf{x}_1(t) - T_\lambda \mathbf{x}_2(t)| \\
&= \max_{a \leq t \leq b} |\lambda| \left| \int_a^b (F(t,s,\mathbf{x}_1(s)) - F(t,s,\mathbf{x}_2(s)))\,ds \right| \\
&\overset{MVTI}{\leq} |\lambda| \max_{a \leq t \leq b} |b-a| \cdot |F(t,\eta,\mathbf{x}_1(\eta)) - F(t,\eta,\mathbf{x}_2(\eta))| \\
&\overset{MVTD}{\leq} |\lambda||b-a| \max_{a \leq t \leq b} M_1\,|\mathbf{x}_1(\eta) - \mathbf{x}_2(\eta)| \\
&\leq |\lambda||b-a| M_1 \max_{a \leq t \leq b} |\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| \\
&= q d(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t))
\end{aligned}$$

Die Bedingung 4) liefert $q < 1$. Damit ist der Operator T_λ kontrahierend. ■

Bemerkung 1.13 *Das zugehörige Iterationsverfahren lautet:*

$$x_{n+1}(t) = \lambda \int_a^b F(t,s,x_n(s))ds + f(t); \quad a \leq t \leq b; \quad n = 0,1,2,...$$

Es konvergiert nach dem BFPS mit z.B. $x_0 = 1$ *gegen die einzige Lösung.*

Bemerkung 1.14 *Es gelten die Fehlerabschätzungen nach dem BFPS.*

Bemerkung 1.15 *Spezialfall lineare Integralgleichungen:*
$F(t,s,x(s)) = K(t,s)x(s); \quad K(t,s)$ *: stetig,* $[a,b] \times [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

Beispiel 1.36 *Gegeben sei die lineare Integralgleichung mit* $K(t,s) = ts$ *:*

$$\mathbf{x}(t) = \lambda \int\limits_0^1 ts\mathbf{x}(s)\,ds + 1 \qquad \textit{for} \qquad 0 \leq t \leq 1 \qquad (o)$$

Die Funktionen $f(t) \equiv 1$, $\mathbf{F}(t,s,\mathbf{x}(s)) = ts\mathbf{x}(s)$ *und* $\mathbf{F}_x(t,s) = ts$ *sind damit auf ihren Definitionsgebieten stetig. Es gilt*

$$\max_{0 \leq t,s \leq 1} |\mathbf{F}_x(t,s)| = 1 = M_1$$

Nun sei λ eine reelle Zahl mit $(b-a)\,|\lambda|\,M_1 = |\lambda| < 1$. Dann gilt $q = |\lambda|$, und die Bedingungen des obigen Satzes sind für die Integralgleichung (o) erfüllt Das heißt, dass im Fall von $|\lambda| < 1$ die Gleichung (o) eine eindeutige Lösung $\mathbf{x}^*(t) \in \mathbf{C}(0,1)$ hat. Durch sukzessive Approximation mit der Anfangsnäherung $\mathbf{x}_0(t) \equiv 1$ in $[0,1]$ erhält man die Folge von Näherungsfunktionen $\mathbf{x}_n(t)$, die gegen $\mathbf{x}^*(t)$ konvergiert:

$$\mathbf{x}_{n+1}(t) = \lambda \int_0^1 ts\mathbf{x}_n(s)\,ds + 1 \qquad \textit{for} \quad 0 \le t \le 1 \quad \textit{and} \quad n = 0,1,2,\dots\,.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= \lambda\, t \int_0^1 s\; ds + 1 = \frac{\lambda}{2} t + 1 \\
\mathbf{x}_2(t) &= \lambda\, t \int_0^1 \left(\frac{\lambda}{2} s^2 + s\right)\; ds + 1 = \frac{\lambda\, t}{2}\left(\frac{\lambda}{3} + 1\right) + 1 \\
\mathbf{x}_3(t) &= \lambda\, t \int_0^1 \left[\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\lambda}{3} + 1\right) s^2 + s\right]\; ds + 1 = \frac{\lambda\, t}{2}\left(\frac{\lambda^2}{3^2} + \frac{\lambda}{3} + 1\right) + 1 \\
&\quad - \\
\mathbf{x}_{n+1}(t) &= \lambda\, t \int_0^1 s\; \mathbf{x}_n(s)\; ds + 1 = \frac{\lambda\, t}{2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^k + 1 \\
&\to \frac{3}{2}\left(\frac{\lambda}{3-\lambda}\right) t + 1 = \mathbf{x}^*(t) \qquad \textit{for} \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

$\mathbf{x}^*(t)$ *ist die Lösung von (o) für alle λmit $\lambda \neq 3$.*

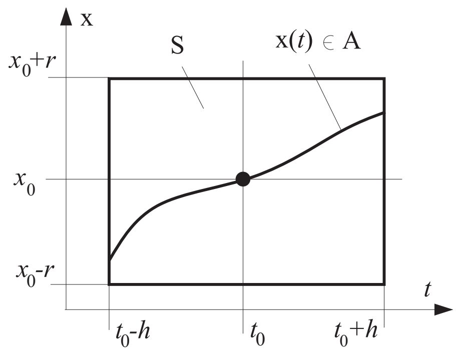
Anwendungen auf Anfangswertprobleme (AWP)

Gegeben ist das **AWP:**

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \qquad |t - t_0| \le h \qquad (*) \\
\mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0
\end{aligned}$$

Gesucht ist $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{A}$
$\mathbf{A} \subset \mathbf{X} = \mathbf{C}(t_0 - h, t_0 + h)$
und $\mathbf{x}(t)$ differenzierbar mit

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{x}(t) \in \mathbf{X} \;\middle|\; \max_{|t-t_0| \le h} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0| \le r \right\}$$



Durch die **Überführung der AWA in eine äquivalente Integralgleichung:**

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\ ds, \qquad |t - t_0| \leq h, \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{A}$$

mit dem Integraloperator $\mathbf{T} : \mathbf{A} \to \mathbf{X}$ gemäß

$$\mathbf{Tx}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\ ds, \qquad |t - t_0| \leq h$$

erhält man die Fixpunktgleichung $\mathbf{x}(t) = \mathbf{Tx}(t)$.

Satz 1.11 ***(PICARD-LINDELÖF)***
Unter den Bedingungen

1. $\mathbf{f} : \mathbf{S} \to \mathbb{R}$ *und deren partielle Ableitung* $\mathbf{f}_x = \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) : \mathbf{S} \to \mathbb{R}$ *seien auf der Menge* $\mathbf{S}$ *stetig.*

$$\mathbf{S} = \left\{ (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid |t - t_0| \leq h; \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq r \right\}$$

2. $\mathbf{f}$ *und* $\mathbf{f}_x$ *seien auf* $\mathbf{S}$ *beschränkt:*

$$\max_{(t,\mathbf{x}) \in \mathbf{S}} |\mathbf{f}(t, \mathbf{x})| = M \qquad\qquad \max_{(t,\mathbf{x}) \in \mathbf{S}} |\mathbf{f}_x(t, \mathbf{x})| = M_1$$

und h *erfülle die Bedingungen*

$$hM \leq r \qquad \textit{und} \qquad hM_1 = q < 1.$$

besitzt die AWA $(*)$ *eine eindeutig bestimmte Lösung*

$$\mathbf{x}^*(t) \in \mathbf{A} \subset \mathbf{C}(t_0 - h, t_0 + h)$$

Die Folge der Näherungslösungen $\mathbf{x}_n(t)$ *gemäß der sukzessiven Approximation*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1}(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_n(s))\ ds \qquad |t - t_0| \leq h \\ \textit{bzw.} \qquad \mathbf{x}_{n+1}(t) &= \mathbf{Tx}_n(t) \qquad n = 0, 1, 2, ... \end{aligned}$$

konvergiert für beliebige $\mathbf{x}_0(t) \in \mathbf{A}$ *gegen* $\mathbf{x}^*(t)$, *d. h.* $\mathbf{x}_n(t) \overset{n\to\infty}{\to} \mathbf{x}^*(t)$.
Als Startfunktion kann z. B. $\mathbf{x}_0(t) \equiv \mathbf{x}_0$ *für* $|t - t_0| \leq h$ *genommen werden.*

Beweis:
Es ist zu zeigen, dass der Operator $\mathbf{T}$ auf dem vollständigen metrischen Raum $\mathbf{X} = \mathbf{C}\,(h - t_0, h + t_0)$ unter den Bedingungen 1. und 2. ein kontrahierender Operator ist. Die Aussagen des Satzes folgen dann aus dem BANACHschen Fixpunktsatz.
a) zu zeigen: $\mathbf{T} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$. Für beliebige $\mathbf{x}\,(t) \in \mathbf{A}$ gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{f}\,(s, \mathbf{x}\,(s))\ ds \right| &\leq |t - t_0| \max_{(t,\mathbf{x})\,\in\,\mathbf{S}} |\mathbf{f}\,(t, \mathbf{x})| \leq hM \leq r \\ \text{mit} \quad |t - t_0| &\leq h \end{aligned}$$

Da $\mathbf{Tx}$ ist für $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$ eine stetige Funktion ist, folgt:

$$d_x\,(\mathbf{Tx}, \mathbf{x}_0) = \max_{|t-t_0|\leq\, h} \left| \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{f}\,(s, \mathbf{x}\,(s))\ ds \right| \leq r$$

und damit $\mathbf{Tx}\,(t) \in \mathbf{A}$.
b) Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt für beliebige $(t, \mathbf{x}_1) \in \mathbf{S}$ und$(t, \mathbf{x}_2) \in \mathbf{S}$

$$|\mathbf{f}\,(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}\,(t, \mathbf{x}_2)| = |\mathbf{f}_x\,(t, \boldsymbol{\xi})|\,|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \leq M_1\,|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$$

und damit

$$\begin{aligned} d_x\,(\mathbf{Tx}_1, \mathbf{Tx}_2) &= \max_{|t-t_0|\leq\, h} \left| \int\limits_{t_0}^{t} [\mathbf{f}\,(s, \mathbf{x}_1\,(s)) - \mathbf{f}\,(s, \mathbf{x}_2\,(s))]\ ds \right| \\ &\leq hM_1 \max_{|t-t_0|\leq\, h} |\mathbf{x}_1\,(t) - \mathbf{x}_2\,(t)| \\ &= q d_x\,(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{aligned}$$

Aus a) und b) folgt, dass $\mathbf{T}$ ein kontrahierender Operator ist.

Beispiel 1.37 *Gegeben sei die Anfangswertaufgabe:*

$$\mathbf{x}'\,(t) = t\ \mathbf{x}\,(t) \qquad \textit{mit} \quad \mathbf{x}\,(0) = \mathbf{x}_0 = 1 \qquad\qquad (**)$$

Die zu $(**)$ *äquivalente Integralgleichung lautet:*

$$\mathbf{x}\,(t) = 1 + \int\limits_{0}^{t} s\ \mathbf{x}\,(s)\ ds.$$

Mit $t_0 = 0$ *und* $\mathbf{x}_0 = 1$ *gilt:* $\mathbf{S} = \{(t,\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid \; |t| \le h; \;\; |\mathbf{x}{-}1| \le r\}$,
und mit $\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) = t\mathbf{x}$, $\mathbf{f}_x(t) = t$ *erhält man:*

$$\max_{(t,\mathbf{x})\,\in\,\mathbf{S}} |\mathbf{f}(t,\mathbf{x})| \le h(r+1) = M \qquad \max_{(t,\mathbf{x})\,\in\,\mathbf{S}} |\mathbf{f}_x(t,\mathbf{x})| = h = M_1.$$

Die Bedingungen des Satzes sind erfüllt, wenn

$$hM = h^2(r+1) \le r \qquad \textit{und} \qquad hM_1 = h^2 = q < 1.$$

(Dabei wurde $|\mathbf{x}| \le r+1$ *benutzt.) D. h. im Falle* $h < 1$ *besitzt die AWA* $(**)$ *eine eindeutig bestimmte Lösung* $\mathbf{x}^*(t) \in \mathbf{C}(-h,h)$. *Mit festem* h *muß* r *die Bedingung* $r \ge h^2/(1-h^2)$ *erfüllen.*
Für die Folge der Näherungen $\mathbf{x}_n(t)$ *nach der sukzessiven Approximation gilt mit* $\mathbf{x}_0(t) \equiv 1$ *auf* $[-h,h]$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= 1 + \int_0^t s\; ds = 1 + \frac{t^2}{2} \\
\mathbf{x}_2(t) &= 1 + \int_0^t s\;\left(1+\frac{s^2}{2}\right) ds = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}\right)^2 \\
\mathbf{x}_3(t) &= 1 + \int_0^t s\;\mathbf{x}_2(s)\;\; ds = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^3 \\
& \quad - \\
\mathbf{x}_{n+1}(t) &= 1 + \int_0^t s\;\mathbf{x}_n(s)\;\; ds = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k \\
&\to \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \mathbf{x}^*(t) \qquad\qquad \textit{für} \qquad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Man beachte, dass $\mathbf{x}^*(t)$ *für alle* $t \in \mathbb{R}$ *eine Lösung von* $(**)$ *ist.*

2 Lineare normierte Räume

Im metrischen Raum kann aufgrund der Abstandsdefinition Analysis betrieben werden, aber es ist kein Vergleich der Elemente untereinander möglich und keine Ordnung der Elemente. Weiter ist auch keine rechnerische Beziehung der Elemente untereinander definiert und damit keine algebraische Struktur.
Als Vorbild für lineare normierte Räume kann der dreidimensionale Vektorraum $\mathbb{V}^3$ dienen:

- Die Verbindung zwischen $\mathbb{V}^3$ und $\mathbb{R}^3$ besteht durch die Abbildung ϕ :
  $\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,
  die jedem Paar $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ einen Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{V}^3$ zuordnet: $(\mathbb{R}^3, \mathbb{V}^3, \phi)$ ist ein affiner Raum.

- $\mathbb{R}^3$ als Ausgangspunkt ist ein metrischer Raum mit

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2} \\ &= \sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2} \\ &= \|\mathbf{v}\|\,, \end{aligned}$$

  wobei $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ der Länge des Vektors $\mathbf{v}$ entspricht: Euklidischer Raum

- $\mathbb{V}^3$ ist ein linearer Raum, Rechenoperationen mit Vektoren sind dort erklärt.

Als Verallgemeinerung werden Vektorräume über allgemeinen mathematischen Objekten definiert, und es wird die Beziehung zu den metrischen Räumen hergestellt. Es entstehen lineare normierte Räume, in denen Messen und Rechnen möglich ist.

2.1 Lineare Räume

Wiederholung der Definition des linearen Raumes aus der Linearen Algebra:

Definition 2.1 *Ein **linearer Raum** über einem Körper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ist eine nichtleere Menge $\mathbb{X}$ mit*

(A) *einer Vorschrift, die jedem Paar $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{X}$) genau ein Element $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathbb{X}$ zuordnet (Addition) und*

(M) *einer Vorschrift, die jedem Paar* $\lambda,\ \mathbf{x}\ (\lambda \in \mathbb{K},\ \mathbf{x} \in \mathbb{X})$ *genau ein Element* $\lambda\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ *zuordnet (Multiplikation mit Elementen aus* $\mathbb{K}$*).*

Dabei gelten folgende Regeln $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{X};\ \lambda, \mu \in \mathbb{K})$:

(A1) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ (**Assoziativgesetz**)

(A2) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ (**Kommutativgesetz**)

(A3) Es existiert genau ein Element $\mathbf{0} \in \mathbb{X}$, mit $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{X}$
(**Nullelement der Addition in X**)

(A4) Für $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{X}$ existiert genau ein $(-\mathbf{x}) \in \mathbb{X}$ mit $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
(**Inverses Element der Addition in X**)

(M1) $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$ (**Distributivgesetze**

(M2) $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$ **der Multiplikation**)

(M3) $(\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x})$ (**Assoziativgesetz der Multiplikation**)

(M4) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}; \quad (1 \in \mathbb{K})$

Bemerkung 2.1 *Im Fall* $\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{C})$ *spricht man von einem reellen (komplexen) linearen Raum.*

Bemerkung 2.2 *hese axioms generalise properties of the vectors introduced in the beginning of this chapter.*

Beispiel 2.1 $\mathbb{V}^n$: *Vektorraum analog zu* $\mathbb{R}^n$

Beispiel 2.2 *Menge aller Polynome der Form:*

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n; \quad a_i \in \mathbb{R}\ (\textit{bzw. } \mathbb{C}),\ i{=}0, 1, .., n$$

Die Addition entspricht der normalen Polynomaddition, die Multiplikation mit einem Skalar entspricht der Multiplikation eines Polynoms mit einer reellen oder komplexen Zahl. TEs gibt eine Verbindung zwischen den Polynomen n-ten Grades $P_n(x)$ *und den Vektoren, die die Koeffizienten der Polynome enthalten:* $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{V}^{n+1}$

Beispiel 2.3 $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \in C[a,b]; \quad \lambda \in \mathbb{K}= \mathbb{C}:$
Addition: $(\mathbf{x}+\mathbf{y})(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{y}(t)$
Multiplikation mit einem Skalar: $(\lambda\mathbf{x})(t) = \lambda\mathbf{x}(t)$
Nullelement: $\mathbf{0}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [a,b]$
Inverses Element: $-\mathbf{x}(t)$

Beispiel 2.4 *Raum* l_p *aller reellen/komplexen Zahlenfolgen* $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$
mit $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty;\ 1 \le p < \infty \quad \lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{C}:$
Addition: $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \{x_i + y_i\}_{i=1}^{\infty}$
Multiplikation mit einem Skalar: $\lambda\mathbf{x} = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$
Wegen

$$\sum\nolimits_{i=1}^{\infty} |\lambda x_i|^p = |\lambda| \sum\nolimits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$$

und der Minkowskiungleichung

$$\left(\sum\nolimits_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum\nolimits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum\nolimits_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{1/p} < \infty$$

erhalten wir $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in l_p$ *und* $\lambda\mathbf{x} \in l_p$
Nullelement: $\mathbf{0} = \{0_i\}_{i=1}^{\infty}$
Inverses Element: $-\mathbf{x} =\{-x_i\}_{i=1}^{\infty}$

Beispiel 2.5 $\mathbb{X} = \mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ *mit* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
Addition: $\mathbf{x}+\mathbf{y} = x \cdot y$
Multiplikation mit einem Skalar: $\lambda\mathbf{x} = x^{\lambda}$
Nullelement: $\mathbf{0} = 1 \in \mathbb{R}$
Das inverse Element $-\mathbf{x}$ *erfüllt* $\mathbf{x} + -\mathbf{x} =1$ *und entspricht damit* $x \cdot \frac{1}{x} = 1 \curvearrowright -\mathbf{x} = \frac{1}{x}$
Hausaufgabe: Nachweis der Axiome A1 bis M4.

Aus der linearen Algebra werden weitere Begriffe in die Funktionalanalysis übernommen:

Definition 2.2 $\mathbb{U} \subset \mathbb{X}$ *heißt* ***Unterraum*** *von* $\mathbb{X}$*, wenn für* $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{U}$*;* $\lambda \in \mathbb{K}$ *gilt:* $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathbb{U}$ *und* $\lambda\mathbf{x} \in \mathbb{U}$*.* $\mathbb{U}$ *ist dann selbst ein linearer Raum über* $\mathbb{K}$*.*

Definition 2.3 $\mathbb{U}$ *sei ein Unterraum von* $\mathbb{X}$ *und* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{X}$*, dann heißt*

$$M = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \mathbb{U}\} \equiv \mathbf{x}_0 + \mathbb{U}$$

lineare Mannigfaltigkeit *in* $\mathbb{X}$*.*

Definition 2.4 $A \subset \mathbb{X}$*. Die Menge*

$$spanA = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \mathbf{x}_k \quad \mid \quad \mathbf{x}_k \in A, \quad \lambda_k \in \mathbb{K}, \quad m \in \mathbb{N} \right\}$$

heißt ***lineare Hülle von*** A*.*

Definition 2.5 $\mathbb{U}$ *und* $\mathbb{V}$ *seien Unterräume von* $\mathbb{X}$*, dann heißt*

$$\mathbb{U} + \mathbb{V} = span(\mathbb{U} \cup \mathbb{V})$$

Summe von $\mathbb{U}$ ***und*** $\mathbb{V}$. *Gilt außerdem* $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} = \{\mathbf{0}\}$ *, so spricht man von der* ***direkten Summe*** $\mathbb{U} \oplus \mathbb{V}$. *Jedes* $\mathbf{z} \in \mathbb{U} \oplus \mathbb{V}$ *ist eindeutig in der Form* $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ *mit* $\mathbf{x} \in \mathbb{U}$ *und* $\mathbf{y} \in \mathbb{V}$ *darstellbar.*

Definition 2.6 *Die Unterräume* $\mathbb{U} \subset \mathbb{X}$ *und* $\mathbb{V} \subset \mathbb{X}$ *heißen* ***komplementär*** *zueinander, wenn gilt* $\mathbb{X} = \mathbb{U} \oplus \mathbb{V}$.

Definition 2.7 *Die Menge* $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{X}$ *heißt linear unabhängig,wenn gilt:*

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

Definition 2.8 *Die Menge* $B \subset \mathbb{X}$ *heißt* ***linear unabhängig****, wenn jede endliche Teilmenge aus* B *linear unabhängig ist.*

Definition 2.9 *Eine linear unabhängige Teilmenge* $B \subset \mathbb{X}$ *mit* $\mathbb{X} = \overline{spanB}$ *heißt* ***Basis*** *in* $\mathbb{X}$.

Definition 2.10 *Existiert eine Basis von* $\mathbb{X}$ *mit* $|B| = n$*, so besitzt jede Basis von* $\mathbb{X}$ n *Elemente:* $\dim \mathbb{X} = n$. *Existiert kein solches* n *so heißt* $\mathbb{X}$ ***unendlichdimensional****.*

Definition 2.11 $\mathbb{X}$ *und* $\mathbb{Y}$ *seien lineare Räume über* $\mathbb{K}$. $\mathbb{X}$ *und* $\mathbb{Y}$ *heißen* ***linear isomorph*** *zueinander, wenn eine Bijektion* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *mit der Eigenschaft*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{X}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

existiert.

Beispiel 2.6 *Dimension von* $\mathbb{P}^n$:

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_n x^n = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, ..., n$$

weil jedes Polynom in $\mathbb{C}$ n *komplexe Wurzeln besitzt (Fundamensatz der Linearen Algebra)*

$\curvearrowright$ *Basis von* $\mathbb{P}^n = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$ $\quad\curvearrowright\quad$ $\dim(\mathbb{P}^n) = n + 1$

Beispiel 2.7 $C[a, b]$:

$$B = \left\{\mathbf{1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^n\right\} \subset C[a, b]$$

Jede endliche Linearkombination von Element von B ist ein Polynom. $\curvearrowright$ B ist linear unabhängig.
Der Approximationsatz nach Weierstraß sagt aus:: Jede stetige Funktion kann durch Polinome in beliebiger Genauigkeit approximiert werden.
$\curvearrowright C[a, b] = \overline{span(B)} \curvearrowright$ *B ist eine Basis.* $\curvearrowright dim(C[a, b]) = \infty$

Beispiel 2.8 l_p :
Basis: $= \left\{\mathbf{x}_k = (0, ..., 0, \underset{position\ k}{1}, 0, ...);\ k = 1, 2, ...\right\}$
l_p *ist unendlich dimensional.*

2.2 Normierter Raum - Banachraum

Definition 2.12 *Ein linearer Raum $\mathbb{V}$ über dem Körper $\mathbb{K}$ in dem jedem $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ eine reelle Zahl $\|\mathbf{x}\|$ zugeordnet ist, heißt **linearer normierter Raum** $\mathbb{V}$, wenn gilt:*

(I) $\|\mathbf{x}\| \geq 0 \quad \wedge \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \mathbf{0}$

(II) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|, \quad \alpha \in \mathbb{K}$

(III) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (Dreiecksungleichung)

$\|\mathbf{x}\|$ *heißt Norm des Elementes* $\mathbf{x}$.

Bemerkung 2.3 *In einem linearen normierten Raum $\mathbb{V}$ kann die **kanonische oder die durch die Norm induzierte Metrik** gemäß $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$ eingeführt werden. Damit ist jeder lineare normierte Raum stets ein metrischer Raum.*

Bemerkung 2.4 *Im linearen normierten Räumen sind folglich metrische Eigenschaften mit denen algebraischer Strukturen vereint. Messen und Rechnen sind möglich.*

Bemerkung 2.5 *Die Umkehrung, dass ein linearer metrischer Raum auch ein linearer normierter Raum ist, gilt nur, wenn in dem linearen Raum $\mathbb{X}$ eine translationsinvariante homogene Metrik $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ eingeführt werden kann:*

(A) Translationsinvarianz: $d(\mathbf{x} + \mathbf{z}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{X}$

(B) Homogenität: $d(\alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{y}) = |\alpha|\ d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{X} \quad \alpha \in \mathbb{K}$
Man kann dann $\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x},\mathbf{0})$ setzen, denn

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\| &= d(\mathbf{x},0) \geq 0 \quad \wedge \quad \|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x},0) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0 \\
\|\alpha\mathbf{x}\| &= d(\alpha\mathbf{x},0) \overset{(B)}{=} |\alpha| d(\mathbf{x},0) = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\| \\
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| &= d(\mathbf{x}+\mathbf{y},0) = d(\mathbf{x}+\mathbf{y},-\mathbf{y}+\mathbf{y}) \\
&\overset{(A)}{=} d(\mathbf{x},-\mathbf{y}) \\
&\leq d(\mathbf{x},0) + d(0,-\mathbf{y}) \\
&\overset{(B)}{=} d(\mathbf{x},0) + d(0,\mathbf{y}) \\
&= \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|
\end{aligned}$$

Bemerkung 2.6 *Die Norm ist eine stetige Funktion, und es gilt:*

$$\big|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\big| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{V}$$

Beweis. *I*)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\| &= \|\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\| \\
\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| &\leq \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|
\end{aligned}$$

II)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{y}\| &= \|\mathbf{y}-\mathbf{x}+\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}\| \\
\|\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\| &\leq \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \\
\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| &\geq -\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|
\end{aligned}$$

damit erhalten wir:

$$\big|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\big| \leq \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{V}$$

■

Definition 2.13 *Ein linearer normierter Raum, der bezüglich seiner kanonischen Metrik $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ vollständig ist, heißt **BANACH - Raum**.*

Beispiel 2.9 *Banachräume sind z.B.:*

1. $\mathbb{R}^n$ *mit*

$$\|\mathbf{x}\|_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} & for \quad 1 \leq p < \infty \\ \max\limits_{1\leq k\leq n} |x_k| & for \quad p = \text{“}\infty\text{”} \end{cases}$$

2. l_p: *Raum der beschränkten Zahlenfolgen* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *mit*

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \qquad for \quad 1 \leq p < \infty$$

3. l_∞ : *Raum der beschränkten Zahlenfolgen* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *mit*

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

4. $C[a,b]$: *Raum der stetigen Funktionen* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *mit*

$$\|\mathbf{f}\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |\mathbf{f}(t)|$$

5. $C^m[a,b]$: *Raum der m-fach stetig differenzierbaren Funktionen* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *mit*

$$\|\mathbf{f}\|_\infty = \sum_{k=0}^{m} \max_{a \leq t \leq b} |\mathbf{f}^{(k)}(t)|$$

6. $L_p[a,b]$: *raum der messbaren Funktionen* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$*, für die gilt:*

$$\int_a^b |\mathbf{f}(t)|^p dt < \infty$$

mit

$$\|\mathbf{f}\|_p = \left(\int_a^b |\mathbf{f}(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

Bemerkung 2.7 *Die kanonische Metrik wird auch als* ***die durch die Norm induzierte Metrik*** *bezeichnet.*

Bemerkung 2.8 *STEFAN BANACH. (1892-1945), Pole; Sein Buch "Theorie des Operations Linéaires"(1932) bildet die Grundlage für die Funktionalanalysis in normierten Räumen.*

2.3 Metrische Eigenschaften von Banachräumen $\mathbb{B}$

Definition 2.14 *Die Menge* $K_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{B} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$ *heißt* ***offene Kugel um*** $\mathbf{x}_0 \in B$ ***mit dem Radius*** r.

Konvergenz im Banachraum $\mathbb{B}$*:*

- Es sei $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{B}$.
  $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \mid \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

- $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{B}$, wenn
  $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) \mid \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$

- Wegen der Vollständigkeit besitzt jede Cauchyfolge im Banachraum einen Grenzwert.

- Die Konvergenz in normierten Räumen heißt **Normkonvergenz**.

- Die Menge der normkonvergenten Folgen ist linear:

  Aus $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x} \wedge \lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{y}$ folgt $\lim_{n\to\infty}(\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} + \mathbf{y}$.
  Aus $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x} \wedge \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ folgt $\lim_{n\to\infty} \alpha_n \mathbf{x}_n = \alpha \mathbf{x}$.
  Aus $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ folgt $\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n\| = \|\mathbf{x}\|$.

Definition 2.15 *In einem normierten Raum $\mathbb{V}$ heißen die Normen $\|.\|_1$ und $\|.\|_2$ äquivalent, wenn*
$\exists m, M \in \mathbb{R}, \quad m > 0, M > 0 \mid m\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq M\|\mathbf{x}\|_1 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}$.

Beispiel 2.10 *äquivalente Normen sind im*

a) $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n (bzw.\ \mathbb{C}^n): \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad x_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$

$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k|; \quad \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|; \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$

A)

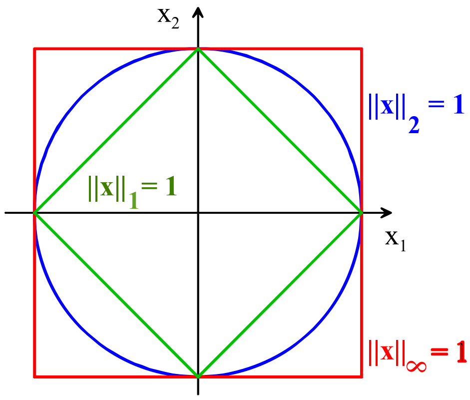
$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| = \|\mathbf{x}\|_1 \leq n \max_{1\leq k\leq n} |x_k| = n\|\mathbf{x}\|_\infty$$

B)

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \max_{1\leq k\leq n} |x_k| = \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty$$

C)

$$\|\mathbf{x}\|_1 \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty \leq n\|\mathbf{x}\|_2 \leq n\sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_1$$



b) $\mathbb{V} = C[a,b]: \quad \|\mathbf{f}\|_\infty = \max\limits_{a\le t\le b}|f(t)|; \quad \|\mathbf{f}\|_2 = \max\limits_{a\le t\le b}|e^{-rt}f(t)|; \ r>0$

$$\begin{aligned} e^{-rb}\,\|\mathbf{f}\|_\infty &= e^{-rb}\max_{a\le t\le b}|\mathbf{f}(t)| = \min_{a\le t\le b} e^{-rt}\cdot\max_{a\le t\le b}|\mathbf{f}(t)| \\ &\le \max_{a\le t\le b}|e^{-rt}\mathbf{f}(t)| = \|\mathbf{f}\|_2 \le \max_{a\le t\le b} e^{-rt}\cdot\max_{a\le t\le b}|\mathbf{f}(t)| = e^{-at}\,\|\mathbf{f}\|_\infty \end{aligned}$$

Bemerkung 2.9 *In einem endlich dimensionalen Raum $\mathbb{V}$ sind alle Normen äqivalent.*

Bemerkung 2.10 *Jeder endlich dimensionale normierte Raum $\mathbb{V}^n$ ist ein Banachraum.*

Beweis. Es sei $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...\mathbf{e}_n\}$ eine Basis in $V^n \Longrightarrow x = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{e}_i \quad \forall x\in\mathbb{V}^n$.
Wir führen folgende Norm ein: $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}|\alpha_i|$. Jede beliebige andere Norm ist äquivalent zu dieser Norm $\|.\|_\infty$.
Es sei $\{\mathbf{x}_k = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{ki}\mathbf{e}_i\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{V}^n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{V}^n$. Aus

$$|\alpha_{mi}-\alpha_{ki}| \le \|\mathbf{x}_m-\mathbf{x}_k\|_\infty \le M\,\|\mathbf{x}_m-\mathbf{x}_k\|_. < \varepsilon \quad \forall m,k\ge n_0(\varepsilon),\ i=1,2,...,n$$

folgt, dass $\{\alpha_{ki}\}_{k=1}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist. Es gilt $\lim_{k\to\infty}\alpha_{ki} = \alpha_{0i} \quad \forall i$.
$\curvearrowright \quad \lim_{k\to\infty}\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0 = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_{0i}\mathbf{e}_i \in \mathbb{V}^n$. ■

Bemerkung 2.11 *Beim Übergang zu äqivalenten Normen bleiben konvergente Folgen konvergent. Es können sich Rechenvorteile ergeben.*

Bemerkung 2.12 *Die Äquivalenz von Normen hat die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation: Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.*

Reihen in normierten Räumen:

Definition 2.16 *Es seien* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n, ...$ *Elemente eines linearen normierten Raumes* $\mathbb{V}$, $\mathbf{s}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k$. *(Partialsumme)*

Existiert ein $\mathbf{s} \in \mathbb{V}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{s}_n = \mathbf{s}$, *so heißt* $\mathbf{s} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ ***Summe der unendlichen Reihe*** $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ *in* $\mathbb{V}$.

Definition 2.17 *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ *heißt* ***absolut konvergent****, wenn die Zahlenreihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbf{x}_k\|$ *konvergiert.*

Bemerkung 2.13 *In einem Banachraum* $\mathbb{B}$ *ist jede absolut konvergente Reihe konvergent, und es gilt:*

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbf{x}_k\| .$$

Beweis. Die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ ist eine Cauchyfolge, weil gilt

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\| &\leq \sum_{k=n+1}^{m} \|\mathbf{x}_k\| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0(\varepsilon) \\ &\Longrightarrow \exists\, s \in \mathbb{B} \mid \lim_{n\to\infty} s_n = s. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k\right\| &\leq \sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{x}_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbf{x}_k\| \quad \textit{und} \\ \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k\right\| &= \|s\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbf{x}_k\| . \end{aligned}$$

■

2.4 Lineare Operatoren

Die spezielle Betrachtung von linearen Aufgabenstellungen in linearen Räumen erleichtert die Arbeit und bringt gute Ergebnisse.

Definition 2.18 *$\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ seien lineare normierte Räume über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\mathbf{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ heißt **linearer Operator**, wenn gilt:*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \mathbf{Au}+\mathbf{Av} && \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{X} \\ \mathbf{A}(\alpha \mathbf{u}) &= \alpha A\mathbf{u} && \forall \alpha \in \mathbb{K} \wedge \forall \mathbf{u} \in \mathbb{X}. \end{aligned}$$

Bildraum von A: $R(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{Y} \mid \mathbf{y} = \mathbf{Ax};\ \mathbf{x} \in \mathbb{X}\}$
Nullraum (Kern) von A: $N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{X} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}$

Bemerkung 2.14 $N(\mathbf{A}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *ist injektiv.*

Definition 2.19 *Der lineare Operator $\mathbf{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ heißt **beschränkt**, wenn eine Konstante $0 < C < \infty$ existiert mit $\|\mathbf{Ax}\| \le C\,\|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{X}$.*

Definition 2.20 *Die Zahl*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\| &= \inf\{C \in \mathbb{R} \,|\, \|\mathbf{Au}\| \le C\,\|\mathbf{u}\|, \forall \mathbf{u} \in \mathbb{X}\} \\ &= \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} \|\mathbf{Au}\| \end{aligned}$$

*heißt **Norm des Operators***

Bemerkung 2.15 *Aus*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Ax}\| &\le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{x}\| \quad \forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{X} \quad \textit{und} \\ \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad \forall\ \mathbf{x} \ne \mathbf{0} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Au}\| &= \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \|\mathbf{A}\| \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{A}\| \qquad \textit{and} \\ \|\mathbf{A}\| &= \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} \|\mathbf{Au}\| \end{aligned}$$

Bemerkung 2.16 *Lineare Operatoren $\mathbf{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ treten in linearen Gleichungen der Form $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{X},\ \mathbf{y} \in \mathbb{Y})$ auf, z.B.in Form von*

- *algebraischen Gleichungen*
- *Integralgleichungen*
- *gewöhnlichen/partiellen Differentialgleichungen mit AW bzw. RW.*

Bemerkung 2.17 *Damit ist die Übertragung von Eigenschaften der Lösungen linearer Gleichungssysteme auf die Lösungen von linearen Operatoraufgaben möglich.*

Beispiel 2.11 *Es sei* $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ *mit der Basis* $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$. *Ein beliebiges Element* $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ *hat dort die Darstellung* $\mathbf{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \mathbf{e}_k$.
Weiter sei $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^m$ *mit der Basis* $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m$. *Ein beliebiges Element* $\mathbf{y} \in \mathbb{Y}$ *hat dort die Darstellung* $\mathbf{y} = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i \mathbf{f}_i$.

Der Operator $\mathbf{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *wird wie folgt definiert:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{e}_k &= \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \mathbf{f}_i \in \mathbb{Y} \qquad k = 1, ..., n \qquad (*) \text{ und} \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \sum_{k=1}^{n} x_k \mathbf{A}\mathbf{e}_k \qquad (**) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{X} \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k a_{ik} \right) \mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^{m} y_i \mathbf{f}_i = \mathbf{y}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{n} x_k a_{ik} = y_i$$

$\curvearrowright$ *Die Definition* $(*), (**)$ *des Operators ist äquivalent zu der Matrixgleichung* $Ax = y$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

in der Basis $\{e_k\}$ *von* $\mathbb{X}$ *und in der Basis* $\{f_k\}$ *von* $\mathbb{Y}$.*An* $(**)$ *oder der Matrix rkennt man, dass der Operator* A *offenbar linear ist. Nun definieren wir Operatornormen in* $\mathbb{X}$ *und* $\mathbb{Y}$ *durch*

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |x_k| \quad \text{und} \quad \|\mathbf{y}\|_\infty = \max_{1 \le k \le m} |y_k|.$$

$\curvearrowright$

$$\begin{aligned}
\|A\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{1 \le i \le m} |y_i| = \max_{1 \le i \le m} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right| \\
&\le \max_{1 \le i \le m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \cdot \max_{1 \le k \le n} |x_k| = \left(\max_{1 \le i \le m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \right) \|\mathbf{x}\|_\infty \le C \|\mathbf{x}\|_\infty
\end{aligned}$$

d.h. A *ist beschränkt.*

Beispiel 2.12 $\mathbb{X} = \left\{ f(t) \in \mathbf{C}[a,b] \;\middle|\; \exists \; \dfrac{df}{dt} \in \mathbf{C}[a,b] \right\}; \quad \mathbb{Y} = \mathbf{C}[a,b].$
Wir führen den Differentiationsoperator $\mathbb{D} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *ein. Dieser Operator ist linear, denn es gilt:*

$$\mathbf{D}(\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) = \alpha \mathbf{D}(\mathbf{f}) + \beta \mathbf{D}(\mathbf{g}) \qquad \textit{für bel. } \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{X} \quad \textit{und} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

z. B. ist mit $\mathbf{f} = f(t) = \sin t \quad t \in [a,b] : \;\; \mathbf{D}(\mathbf{f}) = \dfrac{df}{dt} = \cos t.$
In $\mathbb{X} \subset \mathbf{C}[a,b]$ *und* $\mathbb{Y} = \mathbf{C}[a,b]$ *wird jeweils die Norm* $\|\mathbf{f}\| = \max\limits_{a \le t \le b} |f(t)|$ *eingeführt.*
Dann ist $\mathbf{D}$ *ein unbeschränkter Operator:*
Choose $\mathbf{f}_n(t) = \sin(nt) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{f}_n'(t) = n\cos(nt) \quad \wedge \quad \|\mathbf{f}_n\| = 1$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \; D\mathbf{f}_n = n\cos(nt) \\ &\Longrightarrow \; \|D\mathbf{f}_n\| = n\,\|\mathbf{f}_n\|; \quad n = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Beispiel 2.13 $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbf{C}[a,b]; \quad \mathbf{x} = x(t) \in \mathbf{C}[a,b]$ *und* $\|\mathbf{x}\| = \max\limits_{a \le t \le b} |x(t)|$
Eingeführt wird der Integraloperator:

$$(\mathbf{A}\mathbf{x})(t) = \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds; \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{C}[a,b]$$

mit dem stetigen Kern $K(t,s) : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}.$
Der Operator $\mathbf{A} : \mathbf{C}[a,b] \to \mathbf{C}[a,b]$ *ist dann linear und beschränkt.(Hausaufgabe)*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| &= \max_{a \le t \le b} \left| \int_a^b K(t,s)\mathbf{x}(s)ds \right| \\ &\le \max_{a \le t \le b} \int_a^b |K(t,s)|ds \cdot \max_{a \le t \le b} |\mathbf{x}(s)| \\ &\le (b-a) \max_{a \le t,s \le b} |K(t,s)| \cdot \|\mathbf{x}\| \le (b-a)M\,\|\mathbf{x}\| \\ \|\mathbf{A}\| &\le (b-a)M \end{aligned}$$

Satz 2.1 *Der lineare Operator* $\mathbf{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *ist genau dann* ***stetig****, wenn er beschränkt ist.*

Beweis. I) $\mathbf{A}$ sei stetig auf $\mathbb{X} \Longrightarrow \mathbf{A}$ ist stetig in $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.
Indirekter Beweis: wir nehmen an, $\mathbf{A}$ ist unbeschränkt. $\Longrightarrow \exists \; \{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{X}$ so dass gilt

$$\mathbf{x}_k \ne \mathbf{0} \;\; \wedge \;\; \|\mathbf{A}\mathbf{x}_k\| > k\,\|\mathbf{x}_k\|; \quad k \in \mathbb{N}$$

und setzen

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= \frac{\mathbf{x}_k}{k\,\|\mathbf{x}_k\|} \in \mathbb{X} \\ \|\mathbf{A}\mathbf{u}_k\| &= \frac{\|A\mathbf{x}_k\|}{k\,\|\mathbf{x}_k\|} > 1 \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\|\mathbf{u}_k\| = \frac{1}{k} \stackrel{k\to\infty}{\to} \mathbf{0} \quad \curvearrowright \quad \lim_{k\to\infty} \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$$

Aber durch die Stetigkeit von $\mathbf{A}$ in $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ erhält man

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_k \stackrel{k\to\infty}{\to} \mathbf{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{Widerspruch!}$$

$\curvearrowright$ $\mathbf{A}$ ist beschränkt.
II) Voraussetzung: $\mathbf{A}$ is beschränkt in einem beliebigen Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{X}$. Wenn $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < \frac{\varepsilon}{C} = \delta$ gilt, dann folgt

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\| \leq C\,\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < C\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

$\curvearrowright$ $\mathbf{A}$ ist stetig in $\mathbf{x}_0$. ■

Definition 2.21 *Ein linearer stetiger Operator zwischen normierten Räumen* $\mathbf{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *heißt* ***Isomorphismus****, wenn* $\mathbf{A}$ *bijektiv und* $\mathbf{A}^{-1}$ *stetig ist. Gilt zusätzlich* $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ *für alle* $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$*, so heißt* $\mathbf{A}$ ***isometrisch****. Normierte Räume, zwischen denen ein (isometrischer) Isomophismus existiert, heißen (isometrisch) isomorph.*

Definition 2.22 ***Die Summe*** $\mathbf{T}+\mathbf{S}$ *der linearen Operatoren* $\mathbf{T}$ *und* $\mathbf{S}$ *wird durch die Gleichung* $(\mathbf{T}+\mathbf{S})\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}+\mathbf{S}\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{X}$ *definiert, die* ***Multiplikation des Operators*** $\mathbf{T}$ ***mit der Zahl*** $\lambda \in \mathbb{R}$ *bzw.* $\lambda \in \mathbb{C}$ *durch die Gleichung* $(\lambda\mathbf{T})\mathbf{x} = \lambda(\mathbf{T}\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{X}$

Definition 2.23 *Die Menge* $\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *aller linearen, beschränkten Operatoren* $\mathbf{A} : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *mit der oben definierten Summe bzw. Multiplikation heißt* ***Raum der linearen beschränkten Operatoren*** $\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$.

Bemerkung 2.18 *Addition und Multiplikation nach der obigen Definition führen nicht aus* $L(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *hinaus.*

Definition 2.24 *Wird in* $\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *die Operatornorm* $\|\mathbf{A}\|$ *für beliebiges* $\mathbf{A} \in \mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *eingeführt, so gilt:* $\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ ***ist ein linearer normierter Raum.***

Beispiel 2.14 *(für einen Raum* $\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *)*

$$\mathbb{X} = \mathbb{R}^n \quad \textit{mit} \quad \|\mathbf{x}\| = \max_{1\leq\ j\ \leq\ n} |x_j| \qquad \mathbf{x} = \ (x_1, ..., x_n)$$

$$\mathbb{Y} = \mathbb{R}^m \quad \textit{mit} \quad \|\mathbf{y}\| = \max_{1\leq\ i\ \leq\ m} |y_i| \qquad \mathbf{y} = \ (y_1, ..., y_m)$$

Jeder lineare Operator $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *aus* $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ *kann durch eine Matrix*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dargestellt werden.
Die im Raum der $m \times n-$*Matrizen definierte Summe und die Multiplikation mit Elementen aus* $\mathbb{K}$ *entsprechen genau den Verknüpfungen, die bei den linearen Operatoren auftreten.* $\Longrightarrow$ *Es gibt einen linearen Isomorphismus zwischen der Menge der* $m \times n-$*Matrizen und* $\mathbb{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$.
Wegen

$$\|\mathbf{Au}\| = \max_{1\leq\ i\ \leq\ m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \right| \leq \max_{1\leq\ i\ \leq\ m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \max_{1\leq\ j\ \leq\ n} |u_j| \qquad (+)$$

folgt:

$$\|\mathbf{A}\| \leq \max_{1\leq\ i\ \leq\ m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \,.$$

Mit $\max\limits_{1\leq\ i\ \leq\ m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{kj}|$ *und* $\overline{\mathbf{u}} = (\overline{u}_1, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_n) \in \mathbb{R}^n$, *mit* $\overline{u}_j = sgn\,(a_{kj})$ *ergibt sich* $\|\overline{\mathbf{u}}\| = 1$ *und weiter*

$$\|\mathbf{A}\overline{\mathbf{u}}\| = \max_{1\leq\ i\ \leq\ m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{u}_j \right| = \left(\max_{1\leq\ i\ \leq\ m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) \|\overline{\mathbf{u}}\| \,.$$

Damit existiert ein $\overline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^n$, *für das in der Beziehung* $(+)$ *die Gleichheit eintritt. Folglich ist*

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{1\leq\ i\ \leq\ m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \,.$$

Satz 2.2 *Ist der Bildraum* $\mathbb{Y}$ *eines linearen Operators ein Banachraum, so ist auch der Raum* $\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *ein Banachraum.*
Beweis. *If the image space* $\mathbb{Y}$ *of a linear operator is a BANACH space, then* $\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *is a BANACH space, too.* ■

Beweis. *Es sei* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *eine Cauchyfolge in* $\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. $\curvearrowright$

$$\|\mathbf{A_n}-\mathbf{A}_m\| < \varepsilon \quad \forall n,m \geq n_0(\varepsilon)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_n\mathbf{x}-\mathbf{A}_m\mathbf{x}\| &\leq \|\mathbf{A}_n-\mathbf{A}_m\|\,\|\mathbf{x}\| < \varepsilon\,\|\mathbf{x}\| \quad (*) \quad \forall n,m \geq n_0(\varepsilon), \quad \forall \mathbf{x}\in\mathbb{X} \\ &\Longrightarrow \{\mathbf{A}_n\mathbf{x}\}_{n=1}^{\infty} \textit{ ist Cauchyfolge in } \mathbb{Y} \end{aligned}$$

Da $\mathbb{Y}$ *ein Banachraum ist* $\Longrightarrow$

$$\exists\ \mathbf{Ax} = \lim_{n\to\infty}\mathbf{A}_n\mathbf{x} \in \mathbb{Y} \quad \forall \mathbf{x}\in\mathbb{X}$$

$$\curvearrowright \left.\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_n(\alpha\mathbf{r}+\beta\mathbf{s}) & = & \alpha\mathbf{A}_n\mathbf{r}+\beta\mathbf{A}_n\mathbf{s} \\ \downarrow & n\to\infty & \downarrow \\ \mathbf{A}(\alpha\mathbf{r}+\beta\mathbf{s}) & = & \alpha\mathbf{Ar} + \beta\mathbf{As} \end{array}\right\} \mathbf{A} \textit{ ist linear}$$

$$\curvearrowright \|\mathbf{Ax}\| \leq \|\mathbf{Ax}-\mathbf{A}_n\mathbf{x}\| + \|\mathbf{A}_n\mathbf{x}\| \leq (\varepsilon + \|\mathbf{A}_n\|)\,\|\mathbf{x}\| \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon), \quad \forall \mathbf{x}\in\mathbb{X}$$

$$\curvearrowright \mathbf{A} \textit{ ist beschränkt.}$$

Aus $(*)$ *folgt bei* $m\to\infty$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_n\mathbf{x}-\mathbf{Ax}\| &\leq \varepsilon\,\|\mathbf{x}\| \quad \forall n\geq n_0(\varepsilon), \quad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{X} \\ \|\mathbf{A}_n-\mathbf{A}\| &\leq \varepsilon \quad \forall n\geq n_0(\varepsilon), \quad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{X} \\ &\curvearrowright \lim_{n\to\infty}\mathbf{A}_n = \mathbf{A}\in\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \end{aligned}$$

■

Definition 2.25 *Die Folge* $\{\mathbf{A}_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *heißt* ***normkonvergent*** *(stark konvergent) gegen ein* $\mathbf{A}\in\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, *wenn gilt* $\lim_{n\to\infty}\|\mathbf{A}_n\mathbf{x}-\mathbf{Ax}\| = 0 \quad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{X}$.
Schreibweise: $\mathbf{A}_n \overset{n\to\infty}{\to} \mathbf{A}$ *oder* $\lim_{n\to\infty}\mathbf{A}_n = \mathbf{A}$

Bemerkung 2.19 *Aus der Normkonvergenz folgt die punktweise Konvergenz.*

Definition 2.26 *Es seien* $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$ *lineare Räume und* $\mathbf{T}:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$; $\mathbf{S}:\mathbb{Y}\to\mathbb{Z}$, *lineare Operatoren. Dann ist das Produkt der Operatoren* $\mathbf{ST}$ *definiert durch*
$(\mathbf{ST})\mathbf{x} = \mathbf{S}(\mathbf{Tx}) \quad \forall\mathbf{x}\in\mathbb{X}$.

Definition 2.27 *Es sei* $\mathbf{T}:\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ *ein linearer Operator. Wenn ein linearer Operator* $\mathbf{S}:\mathbb{Y}\to\mathbb{X}$ *existiert mit* $\mathbf{ST}=\mathbf{I}_x \quad\wedge\quad \mathbf{TS}=\mathbf{I}_y$; $\mathbf{I}_x,\mathbf{I}_y$: *identische Abbildungen von* $\mathbb{X}$ *bzw.* $\mathbb{Y}$, *so heißt* $\mathbf{S}$ *der zu* $\mathbf{T}$ ***inverse Operator*** $\mathbf{S}=\mathbf{T}^{-1}$.

Bemerkung 2.20 *Die Menge aller Operatoren* $T\in\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$, *für die der inverse Operator existiert, wird mit* $\mathbb{L}_{inv}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *bezeichnet.*

Beispiel 2.15 *Die Operatoren aus* $\mathbb{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m\right)$ *können nur für* $n = m$ *invertierbar sein. Ist dies der Fall, so gilt:*

$$\mathbb{L}_{inv}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right) = \{\mathbf{A} \in \mathbb{L}\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right) \;\mid\; \det\left(\mathbf{A}\right) \neq 0\}\,.$$

Satz 2.3 *Der inverse Operator* T^{-1} *zu einem gegebenen Operator* T *ist eindeutig, falls er existiert.*

Beweis. Annahme: $\exists\ \mathbf{T}_1^{-1}\ \wedge\ \mathbf{T}_2^{-1} \mid \mathbf{T}_1^{-1} \neq \mathbf{T}_2^{-1}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}\mathbf{T}_1^{-1} &= I_y\ \wedge\ \mathbf{T}\mathbf{T}_2^{-1} = I_y \\
\mathbf{T}(\mathbf{T}_1^{-1} - \mathbf{T}_2^{-1}) &= \mathbf{0} \qquad \curvearrowright \\
\mathbf{T}_1^{-1} &= \mathbf{T}_2^{-1} \qquad \text{Widerspruch!}
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 2.21 *Die Menge* $\mathbb{L}_{inv}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *ist in* $\mathbb{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ *bezüglich der Operatornorm offen.*

3 Hilberträume

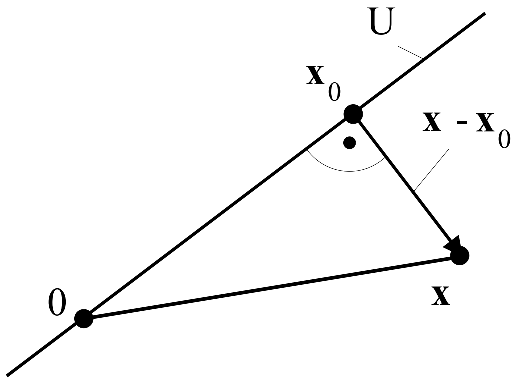
Im Raum $\mathbb{R}^3$ ist ein skalares Produkt definiert:
$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \quad \forall \mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3)^T, \mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3)^T \in \mathbb{R}^3$.
Weiter gilt $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$.
Über das skalare Produkt ist der Begriff der Orthogonalität zweier Elemente von $\mathbb{R}^3$ definiert: $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann orthogonal, wenn $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ gilt. Damit können Lagebeziehungen zwischen Elementen des Raumes erklärt werden.
Die **Orthogonalität** bildet die **Grundlage zur Lösung** des folgenden **Approximationsproblems**:

Gegeben:

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ und Unterraum $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^3$

Gesucht:

$\mathbf{x}_0 \in \mathbf{U}$ mit $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| = \min\limits_{\mathbf{y}\in\mathbf{U}} \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$



$\mathbf{x}_0$ heißt **bestapproximierendes Element** für $\mathbf{x}$ bzg. des Unterraumes $\mathbf{U}$. $\mathbf{x}_0$ erfüllt die Bedingung

$$(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0,\mathbf{y}) = 0 \qquad \forall \mathbf{y} \in \mathbf{U}.$$

Mit dem Skalarprodukt kann weiterhin der Basisbegriff spezifiziert werden zu einer Orthonormalbasis (ONB). Daraus ergeben sich neue Darstellungsmöglichkeiten für die Elemente des Raumes: z.B. ist $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ wegen $(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ eine ONB von $\mathbb{R}^3$, und es gilt $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^3 (\mathbf{x},\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.
Die Übertragung dieser Darstellungsmöglichkeit auf allgemeinere Räume ist möglich. Wenn der Raum vollständig ist, können die Elemente als Fourierreihe nach einer ONB entwickelt werden, was die Begründung für die entsprechende Numerik liefert.
Für alle diese Entwicklungen wird jedoch ein Raum mit Skalarprodukt benötigt, der möglichst noch vollständig sei n sollte.

Definition 3.1 $\mathbb{H}$ *sei ein linearer Raum über dem Körper* $\mathbb{K}$. *Jedem Paar* $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{H}$ *wird eine Zahl* $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{K}$ *mit folgenden Eigenschaften zugeordnet:*

1. $(\mathbf{x},\mathbf{x}) \geq 0 \qquad \wedge \qquad (\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

2. $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})}$

3. $(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y},\mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x},\mathbf{z})+\beta(\mathbf{y},\mathbf{z}) \qquad \forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{H};\ \alpha,\beta\in\mathbb{K}.$

Dann heißt $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ **inneres oder skalares Produkt** *von* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$.

Definition 3.2 *Ein linearer Raum* $\mathbb{H}$ *über dem Körper* $\mathbb{K}$ *mit dem inneren Produkt* $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{K}$ *heißt* ***Prä-Hilbert-Raum.***

Satz 3.1 *Jeder Prä-Hilbert-Raum ist bezüglich der Norm* $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$ $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{H}$ *ein normierter Raum. (Beweis s. unten)*

Beispiel 3.1 $\mathbb{H} = \mathbf{l}_2 : \mathbf{x} = \{x_1, x_2, ...\} \in \mathbb{H}, \quad \mathbf{y} = \{y_1, y_2, ...\} \in \mathbb{H}$

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}; \quad \|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{0.5}$$

Beispiel 3.2 $\mathbb{H} = \mathbf{C}[a,b] :\ \mathbf{f},\mathbf{g} \in \mathbb{H}$

$$(\mathbf{f},\mathbf{g}) = \int_a^b \mathbf{f}(t)\overline{\mathbf{g}(t)}dt; \quad \|\mathbf{f}\| = \left(\int_a^b |\mathbf{f}|^2 dt\right)^{0.5}$$

Eigenschaften des inneren Produktes :

1. $(\mathbf{u},\alpha\mathbf{v}) = \overline{\alpha}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{H},\ \alpha \in \mathbb{K}$
2. $(\mathbf{u},\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u},\mathbf{v})+(\mathbf{u},\mathbf{w}) \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{H}$
3. $|(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\| \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{H}$ $\qquad$ Schwarz'sche Ungleichung

Beweis. 1.:

$$(\mathbf{u},\alpha\mathbf{v}) = \overline{\alpha}\overline{(\mathbf{v},\mathbf{u})} = \overline{\alpha}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{H},\ \alpha \in \mathbb{K}$$

2.:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u},\mathbf{v}+\mathbf{w}) &= \overline{(\mathbf{v}+\mathbf{w},\mathbf{u})} = \overline{(\mathbf{v},\mathbf{u})}+\overline{(\mathbf{w},\mathbf{u})} \\ &= (\mathbf{u},\mathbf{v})+(\mathbf{u},\mathbf{w}) \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{H}\end{aligned}$$

3.:

$$\begin{aligned}0 &\leq (\mathbf{u}-\lambda\mathbf{v},\mathbf{u}-\lambda\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{H},\ \lambda \in \mathbb{K} \\ &= (\mathbf{u},\mathbf{u}) - \lambda(\mathbf{v},\mathbf{u}) - \overline{\lambda}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \lambda\overline{\lambda}(\mathbf{v},\mathbf{v})\end{aligned}$$

Nun wählen wir $\lambda = \frac{(\mathbf{u},\mathbf{v})}{(\mathbf{v},\mathbf{v})}$ und ersetzen es:

$$\begin{aligned}
0 &\leq (\mathbf{u},\mathbf{v}) - \frac{(\mathbf{u},\mathbf{v})}{(\mathbf{v},\mathbf{v})}(\mathbf{v},\mathbf{u}) - \frac{\overline{(\mathbf{u},\mathbf{v})}}{(\mathbf{v},\mathbf{v})}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \frac{(\mathbf{u},\mathbf{v})(\mathbf{u},\mathbf{v})}{(\mathbf{v},\mathbf{v})(\mathbf{v},\mathbf{v})}(\mathbf{v},\mathbf{v}) \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{|(\mathbf{u},\mathbf{v})|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \curvearrowright \\
|(\mathbf{u},\mathbf{v})| &\leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|
\end{aligned}$$

■

Beweis. zu Satz 3.1:Die Normeigenschaften 1 und 2 von $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$ sind offensichtlich. Deshalb beweisen wir nur Eigenschaft 3:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) \\
&= (\mathbf{x},\mathbf{x})+(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{y},\mathbf{x})+(\mathbf{y},\mathbf{y}) \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + (\mathbf{x},\mathbf{y}) + \overline{(\mathbf{x},\mathbf{y})} \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + \mathbf{2}\operatorname{Re}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + \mathbf{2}|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \\
&\leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + \mathbf{2}\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| \quad (SCHWARZ) \\
&= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2
\end{aligned}$$

■

Satz 3.2 *Das innere Produkt in einem Prä-Hilbert-Raum ist stetig, d.h. aus* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ *und* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{y}$ *folgt* $\lim_{n\to\infty}(\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_n) = (\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
0 &\leq |(\mathbf{x},\mathbf{y})-(\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_n)| \\
&= |(\mathbf{x},\mathbf{y}) - (\mathbf{x_n},\mathbf{y})+(\mathbf{x_n},\mathbf{y})-(\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_n)| \\
&\leq |(\mathbf{x},\mathbf{y}) - (\mathbf{x_n},\mathbf{y})| + |(\mathbf{x_n},\mathbf{y})-(\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_n)| \\
&\leq \|\mathbf{x}-\mathbf{x_n}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{x}_n\|\,\|\mathbf{y}-\mathbf{y}_n\| = \alpha_n
\end{aligned}$$

α_n ist eine Nullfolge wegen $\lim_{n\to\infty}(\mathbf{x}-\mathbf{x_n}) = \lim_{n\to\infty}(\mathbf{y}-\mathbf{y_n}) = \mathbf{0}$ und $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x_n} = \mathbf{x}$. ■

Definition 3.3 *Ein Prä-Hilbertraum heißt* ***HILBERT- Raum****, wenn er bezüglich der durch die Norm* $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$ *induzierten Metrik* $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ *vollständig ist.*

Bemerkung 3.1 *Jeder Hilbertraum ist ein Banachraum. Die Umkehrung gilt nur dann, wenn die Norm des Banachraumes die Parallelogrammgleichung*

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)$$

erfüllt.

Bemerkung 3.2 *Damit sind alle Definitionen, Sätze und Aussagen über lineare, normierte Räume in Hilberträumen gültig!*

Beispiel 3.3 $\mathbb{H} = \mathbb{C} : (\textit{or } \mathbb{H} = \mathbb{R}) :$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\overline{\mathbf{y}}; \quad \|\mathbf{x}\| = |\mathbf{x}| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{H}$$

Beispiel 3.4 $\mathbb{H} = \mathbb{C}^n$ $(\textit{or } \mathbb{H} = \mathbb{R}^n) :$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}; \quad \|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{0.5} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}$$

Beispiel 3.5 $n \to \infty : \mathbb{H} = \mathbf{l}_2, \ \dim \mathbf{l}_2 = \infty :$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}; \quad \|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{0.5} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}$$

(Raum der quadratisch summierbaren Folgen)

Beispiel 3.6 $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2[a, b] : \ -\infty < a < b < \infty$
ist die Menge aller messbaren Funktionen $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbb{C}$ *mit* $(L) \int_a^b |\mathbf{f}(t)|^2 \, dt < \infty$

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_a^b \mathbf{f}(t)\overline{\mathbf{g}(t)} dt \quad \forall \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{H}$$

Aber: $C[a, b]$ *mit* $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_a^b \mathbf{f}(t)\overline{\mathbf{g}(t)} dt$ *ist kein Hilbertraum! Es gilt:* $C[a, b]$ *mit diesem inneren Produkt ist in* $\mathbb{L}_2(a, b)$ *ein dichter Unterraum.*

3.1 Fourierreihen in Hilberträumen

Definition 3.4 $\mathbb{H}$ *sei ein Hilbertraum. Die Elemente* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{H}$ *heißen genau dann* ***orthogonal*** *zueinander* $(\mathbf{u} \perp \mathbf{v})$, *wenn gilt* $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

Definition 3.5 $\mathbb{H}$ *sei ein Hilbertraum. Ein* ***Orthonormalsystem*** *(ONS)* $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ *liegt vor, wenn gilt* $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$.
Das ONS heißt ***abgeschlossen oder vollständig****, wenn gilt* $\overline{\underset{i}{span}\{\mathbf{e}_i\}} = \mathbb{H}$.

Folgerung 3.1 $\forall\ \mathbf{u} \in \mathbb{H}\ , \forall \varepsilon > 0 \quad \exists u_i \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \exists n_0(\varepsilon) \quad |$

$$\left\| \mathbf{u} - \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{e}_i \right\| < \varepsilon \quad \forall n > n_0$$

Definition 3.6 *Ein Hilbertraum* $\mathbb{H}$ *heißt* ***separabel,*** *wenn* $\mathbb{H}$ *eine abzählbare Teilmenge* $M = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ...\}$ *enthält, die dicht ist in* $\mathbb{H}$*, d.h.* $\overline{M} = \mathbb{H}$.

Satz 3.3 *Ein separabler Hilbertraum* $\mathbb{H}$ *besitzt mindestens ein vollständiges ONS (und umgekehrt).*

Beweis. A) Zuerst konstruieren wir ein Basis von $\mathbb{H}$:
$M = \{u_i|\ i = 1, 2, ...\}$ sei dicht in $\mathbb{H}$ $\curvearrowright$ $\overline{M} = \mathbb{H}$
1. Schritt: Wir entfernen alle linear abhängigen Elemente von M und erhalten
$M_u = \{u_k|\ k = 1, 2, ...\}$ Es gilt

$$span\overline{(M)} = span\left(\overline{M_u}\right) = \mathbb{H}.$$

2. schritt: Wir orthogonalisieren und normalisieren die Elemente von M_u mittels des Verfahrens von Erhard Schmidt und führen den Beweis durch vollständige Induction.
Induktionsanfang:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}; \quad \|\mathbf{e}_1\| = 1 \\
\widetilde{\mathbf{e}}_2 &= \mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\widetilde{\mathbf{e}}_2}{\|\widetilde{\mathbf{e}}_2\|}; \quad \|\mathbf{e}_2\| = 1 \\
(\widetilde{\mathbf{e}}_2, \mathbf{e}_1) &= (\mathbf{u}_2 - (\mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \\
&= (\mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1) - (\mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 0
\end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\widetilde{\mathbf{e}}_k = \mathbf{u}_k - \sum_{i=1}^{k-1}(\mathbf{u}_k, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i; \quad \mathbf{e}_k = \frac{\widetilde{\mathbf{e}}_k}{\|\widetilde{\mathbf{e}}_k\|} \ mit\ (\widetilde{\mathbf{e}}_k, \mathbf{e}_l) = (\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = 0; \quad l = 1, .., k-1 \quad (*)$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{e}}_{k+1} &= \mathbf{u}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}(\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i; \quad \mathbf{e}_{k+1} = \frac{\widetilde{\mathbf{e}}_{k+1}}{\|\widetilde{\mathbf{e}}_{k+1}\|}; \quad \|\mathbf{e}_{k+1}\| = 1 \\
(\widetilde{\mathbf{e}}_{k+1}, \mathbf{e}_l) &= \left(\mathbf{u}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}(\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l\right); \quad l = 1, 2, .., k \\
&= (\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}_l) - \sum_{i=1}^{k}(\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l) \\
&= (\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}_l) - (\mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{e}_l) = 0 \quad \text{weil gilt } (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_l) = \delta_{il} \text{ (s. } (*))
\end{aligned}$$

$\curvearrowright$ $\mathbf{e}_{k+1}$ und $\mathbf{e}_l$ sind orthonormal für alle $l < k$.
B) $span\{\mathbf{e}_i\}$ ist dicht in $\mathbb{H}$, weil wir nur die linear abhängigen Elemente entfernt haben.
■

Folgerung 3.2 *Ein HILBERT-Raum mit einem vollständigen ONS ist separabel. (= Umkehrung des obigen Satzes)*

Beispiele für ONS und separable HILBERT-Räume:

Beispiel 3.7 $\mathbb{H} = l_2$:

$$M = \{\mathbf{x} = \{r_1, r_2, ..., r_n, 0, 0...\} \mid n \in \mathbb{N};\ \ r_k \in \mathbb{Q};\ \ k = 1, 2, ..., n\}$$

Beispiel 3.8 $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2(a, b)$:

$$M = \{\mathbf{P}(t) = \sum_{k=0}^{n} r_k t^k \mid n \in \mathbb{N};\ \ r_k \in \mathbb{Q};\ \ k = 0, 1, ..., n\}$$

Beispiel 3.9 $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2(-\pi, \pi)$: *ONS:*

$$\mathbf{e}_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}};\ \ \mathbf{e}_{2k-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kt);\ \ \mathbf{e}_{2k}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kt);\ \ k = 1, 2, ...$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &\in \mathbb{L}_2(-\pi, \pi) \ \curvearrowright\ \mathbf{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{f}(t)\cos(kt)dt; \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{f}(t)\sin(kt)dt
\end{aligned}$$

Beispiel 3.10 *Orthonormalisierungsverfahren von Schmidt*
$\mathbb{H} = L_2(-1, 1)$: $\quad M_n = \{\mathbf{f}_n(t) = t^n;\ n = 0, 1, 2, ...\}; \quad \overline{M_n} = \mathbb{L}_2(-1, 1)$
Die Funktionen $\mathbf{f}_n(t)$ *sind linear unabhängig.*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{f}_0(t)\| &= \sqrt{\int_{-1}^{1} 1dt} = \sqrt{2} \\
\mathbf{e}_1(t) &= \frac{\mathbf{f}_0(t)}{\|\mathbf{f}_0(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\widetilde{\mathbf{e}}_2(t) &= \mathbf{f}_1 - (\mathbf{f}_1, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 = t - \left(\int_{-1}^{1} t\frac{1}{\sqrt{2}}dt\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= t - \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = t - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = t \\
\mathbf{e}_2(t) &= \frac{t}{\|t\|} = \frac{t}{\sqrt{(t, t)}} = \frac{t}{\sqrt{\int_{-1}^{1} t^2 dt}} = \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{3}\left[t^3\right]_{-1}^{1}}} \\
&= \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{3}[1 - (-1)}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{e}}_3(t) &= \mathbf{f}_2 - (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{f}_2, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 \\
&= t^2 - \left(t^2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(t^2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right) t \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} t \\
&= t^2 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2 dt - \sqrt{\frac{3}{2}} t \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}} t^3 dt \\
&= t^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} - \sqrt{\frac{3}{2}} t \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{1} = t^2 - \frac{1}{3} \\
\mathbf{e}_3(t) &= \frac{\widetilde{\mathbf{e}}_3(t)}{\|\widetilde{\mathbf{e}}_3(t)\|} = \frac{t^2 - \frac{1}{3}}{\left(\int_{-1}^{1}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) dt\right)^{0.5}} = ...(\textit{homework}) \\
&= \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Das ONS, das hierbei entsteht, sind die LEGENDRE'schen Polynome. Sie können auch durch folgende Formel beschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_n &= \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{(2n)!!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n; \quad n = 0, 1, 2, ... \\
(2n)!! &= 2n(2n-2)...2
\end{aligned}
$$

Bemerkung 3.3 $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ *ist ein abgeschlossenes ONS im Hilbertraum* $\mathbb{H}$
$\Longleftrightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{e}_i) = 0 \quad \forall i \Longrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

Bemerkung 3.4 *Jedes* $\mathbf{u} \in \mathbb{H}$ *ist in der Form* $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \mathbf{e}_i$ *darstellbar*
$\Longleftrightarrow$ *das ONS* $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ *nicht erweitert werden kann.*

Satz 3.4 *Gegeben sei ein separabler Hilbertraum* $\mathbb{H}$ *mit einem Orthonormalsystem* $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{H}$, $\mathbf{s}_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{e}_i$; $\gamma_i \in \mathbb{C}$. *Dann gilt:*

1. $\|\mathbf{u} - \mathbf{s}_n\|$ wird minimal für $\gamma_i = u_i = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_i) \quad \forall i$

2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{e}_i = \mathbf{s} \in \mathbb{H}$

3. Es gilt die Besselsche Ungleichung: $\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2$

4. Ist das ONS $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ abgeschlossen, dann gilt $\mathbf{s} = \mathbf{u}$ und die Parsevalsche Gleichung: $\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 = \|\mathbf{u}\|^2$

Beweis. 1)

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}-\mathbf{s}_n\|^2 &= \left(\mathbf{u}-\sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{e}_i, \mathbf{u}-\sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{e}_i\right) \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 - \sum_{i=1}^n \gamma_i(\mathbf{e}_i,\mathbf{u}) - \sum_{i=1}^n \overline{\gamma}_i(\mathbf{u},\mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^n \gamma_i\overline{\gamma}_i \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + \sum_{i=1}^n (u_i\overline{u}_i - \gamma_i\overline{u}_i - u_i\overline{\gamma}_i + \gamma_i\overline{\gamma}_i) - \sum_{i=1}^n u_i\overline{u}_i \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + \sum_{i=1}^n |u_i-\gamma_i|^2 - \sum_{i=1}^n |u_i|^2
\end{aligned}$$

Wir finden das Minimum im Fall $u_i = \gamma_i$. Dann folgt aus $\mathbf{s}_n = \sum_{i=1}^n \gamma_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{u},\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i$

$$0 \le \|\mathbf{u}-\mathbf{s}_n\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \sum_{i=1}^n |(\mathbf{u},\mathbf{e}_i)|^2 \quad \text{Besselsche Gleichung}$$

3) $\curvearrowright$

$$\sum_{i=1}^n |(\mathbf{u},\mathbf{e}_i)|^2 \le \|\mathbf{u}\|^2 \quad \text{Besselsche Ungleichung } (*)$$

2) Wir zeigen, dass $\{\mathbf{s}_n = \sum_{i=1}^n u_i\mathbf{e}_i\}_{n=1}^\infty$ eine Cauchyfolge ist.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{s}_n-\mathbf{s}_m\|^2 &= \left(\sum_{i=n+1}^m u_i\mathbf{e}_i, \sum_{i=n+1}^m u_i\mathbf{e}_i\right) \\
&= \sum_{i=n+1}^m |u_i|^2 < \sum_{i=1}^\infty |u_i|^2 \le \|\mathbf{u}\|^2 \quad \text{wegen } (*)
\end{aligned}$$

Aus der Konvergenz von $\sum_{i=1}^\infty |u_i|^2$ folgt $\|\mathbf{s}_n-\mathbf{s}_m\|^2 < \varepsilon$ für $n, m \ge n_0(\varepsilon)$.
$\mathbb{H}$ ist vollständig $\curvearrowright$ $\mathbf{lim}_{n\to\infty}\mathbf{s}_n = \mathbf{s} \in \mathbb{H}$
4) Wir zeigen, dass $\mathbf{lim}_{n\to\infty}\mathbf{s}_n = \mathbf{u}$ gilt.
Aus der Voraussetzung der Vollständigkeit des ONS folgt, dass $\overline{span\{\mathbf{e}_i\}} = \mathbb{H}$ gilt.

$$\curvearrowright \quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists \mathbf{v}\in span\{\mathbf{e}_i\} \mid \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| < \varepsilon \ \wedge\ \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \beta_i\mathbf{e}_i\,;\ n = n(\varepsilon)$$

Nach 1) erhalten wir

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{s}_n\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \sum_{i=1}^n |(\mathbf{u},\mathbf{e}_i)|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\curvearrowright$

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2$$

■

Definition 3.7 *Sei $\mathbf{u} \in \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ Hilbertraum, $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ ein ONS aus $\mathbb{H}$.
Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty}(\mathbf{u}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i$ heißt **Fourierreihe** für $\mathbf{u}$ bzgl. $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$,
die Größen $u_i = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_i)$ heißen **Fourierkoeffizienten**.*

Beispiel 3.11 *Bekannt ist aus der Analysis im $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2(-\pi, \pi)$:*

$$\mathbf{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)]$$

Beispiel 3.12 $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2^c[0, T]$, *d.h.* $f : [0, T] \to \mathbb{C}$
Ein vollständiges ONS ist z.B.:

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{ik\omega t}; \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Damit gilt:

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}; \quad mit \quad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbf{f}(t) e^{-ik\omega t} dt$$

<u>Problem:</u> Bekannt ist nun:
Wenn $\mathbf{u} \in \mathbb{H}$, $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ ein ONS in $\mathbb{H}$ ist $\Longrightarrow$ $(\mathbf{u}, e_i) = u_i$; $\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 \le \|\mathbf{u}\|^2$. Gilt auch umgekehrt, dass jeder Zahlenfolge mit $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 < \infty$ ein $\mathbf{y} \in \mathbb{H}$ zugeordnet werden kann?

Satz 3.5 ***RIESZ - FISCHER***
*$\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ sei ein ONS im Hilbertraum $\mathbb{H}$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ sei eine Zahlenfolge mit
$\sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i|^2 < \infty \quad \Longrightarrow \quad \exists \mathbf{v} \in \mathbb{H} \mid (\mathbf{v}, \mathbf{e}_i) = \gamma_i \quad \forall i \quad \wedge \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \mathbf{e}_i$.
Ist $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ abgeschlossen in $\mathbb{H}$, so ist $\mathbf{v}$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. 1) $s_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{e}_i$ ist eine Cauchyfolge (s. Beweis von Satz 3.5)
$\mathbb{H}$ ist vollständig $\curvearrowright$ $\mathbf{lim}_{n\to\infty}\mathbf{s}_n = \mathbf{v} \in \mathbb{H}$ $\curvearrowright$ $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \mathbf{e}_i$ $\curvearrowright$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{e}_k) = \mathbf{lim}_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \mathbf{e}_i, e_k \right) = \gamma_k \quad \forall k$$

2) Das ONS $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ sei Vollständig. Annahme:

$$\exists \mathbf{u} \in \mathbb{H} \mid (\mathbf{u}, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{v}, \mathbf{e}_i) \quad \forall i \quad \wedge \quad \mathbf{u} \neq \mathbf{v}$$

Aus $\mathbf{z} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ folgt $(\mathbf{z}, \mathbf{e}_i) = 0 \quad \forall i \quad \wedge \quad \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$.
Aus der Parsevalschen Gleichung folgt dann

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(\mathbf{z}, \mathbf{e}_i)|^2 = \|\mathbf{z}\|^2 = 0 \curvearrowright \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad \text{Widerspruch!}$$

■

Zusammenfassung:

1. Jedes Element eines separablen Hilbertraumes kann durch eine Fourierreihe dargestellt werden:
$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \mathbf{e}_i; \quad u_i = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_i).$$

2. Jede Zahlenreihe $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \mathbf{e}_i$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_i|^2 < \infty$ definiert eindeutig ein Element eines Hilbertraumes.

3. Durch
$$\mathbf{s}_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{e}_i; \quad \text{mit } u_i = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_i)$$
wird das Element $\mathbf{u}$ über der endlichen Basis am besten approximiert. (s. Satz 3.4)

3.2 Konkrete Hilberträume

3.2.1 Der Raum $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$

Elemente: Vektoren $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ ...x_n)^T \quad x_i \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$

Rechenoperationen: Addition, Multiplikation mit Zahlen sind bekannt aus der linearen Algebra.

Skalarprodukt/Norm: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$

Schwarzsche Ungleichung: $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$, d.h.

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}$$

Basissysteme: $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n = \{(0\ ...0\ e_i^i = 1\ 0...0)^T, \quad i = 1, 2, ..., n\}$
$\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ ist ONB, $span\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n = \mathbb{C}^n, \quad \dim \mathbb{C}^n = n$

Eigenschaften:
$\mathbb{C}^n$ ist separabel: Eine in $\mathbb{C}^n$ dichte und abzählbare Teilmenge entsteht, wenn $span\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ mit rationalen Koeffizienten gebildet wird.
Fourierreihen:

- $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i; \quad x_i = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$
- $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$: Parsevalsche Gleichung
- Jedem n-Tupel $\{x_i\}_{i=1}^n$ kann ein $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ zugeordnet werden (Satz von Riesz-Fischer).

Bemerkungen:

1. Es können andere Skalarprodukte definiert werden:
   z.B. bei $A = A^*$: $\quad (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
   $\curvearrowright \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y})_A = (A\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist Skalarprodukt
   $\curvearrowright \quad |(\mathbf{x}, \mathbf{y})_A| \leq \|\mathbf{x}\|_A \|\mathbf{y}\|_A$, d.h.

$$\left| \sum_{j,k=1}^n a_{kj} x_j \overline{y_k} \right|^2 \leq \sum_{j,k=1}^n a_{kj} x_j \overline{x_k} \cdot \sum_{i=1}^n a_{kj} y_j \overline{y_k}$$

2. Beispiel für einen anderen endlichdimensionalen Hilbertraum:
   $P^n = \{\mathbf{X}(t) \mid \mathbf{X}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n; \quad t \in [a, b], \quad a_i \in \mathbb{C}\}$
   $(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)) = \int_a^b \mathbf{X}(t)\overline{\mathbf{Y}(t)} dt$

3.2.2 Der Raum l_2

Elemente: Zahlenfolgen $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^\infty \ \ \mathbf{y} = \{y_k\}_{k=1}^\infty$
mit $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 < \infty; \quad \sum_{k=1}^\infty |y_k|^2 < \infty; \quad x_i, y_i \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$
Die Elemente sind Folgen: $\mathbf{x} =(x_1, x_2, ...)$ mit den Komponenten x_i

Rechenoperationen: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...)$
$\lambda\mathbf{x} =(\lambda x_1, \lambda x_2, ...); \quad \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$

Skalarprodukt/Norm:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^\infty x_k \overline{y_k} \qquad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2}$$

Schwarzsche Ungleichung: $|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$, d.h.

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\overline{y_k}\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2}$$

(Die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\overline{y_k}$ muss auf andere Weise gezeigt werden:
Wegen $(|a|-|b|)^2 \geq 0$ folgt $|a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 \geq 0$ und damit $2|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2$.
$\curvearrowright \quad \left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\overline{y_k}\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k\overline{y_k}| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(|x_k|^2 + |y_k|^2) < \infty$)

Basissysteme:

- $\{\mathbf{e}_k = (0,...,0,e_k^k = 1,0,...)\}_{k=1}^{\infty}$ ist ein ONS.
- $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\infty}$ ist abgeschlossen.
- l_2 ist unendlichdimensional.

Eigenschaften: l_2 ist separabel. (o.B.)
Fourierreihen:

- $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty}(\mathbf{x},\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i; \quad x_i = (\mathbf{x},\mathbf{e}_i) \quad \forall \mathbf{x}\in l_2$
- $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2$: Parsevalsche Gleichung

Bemerkung zum Raum $\mathbf{l}_p$; $p \geq 1$; $p \neq 2$:

- Menge aller Zahlenfolgen $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ mit $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p < \infty$
- normiert durch: $\|\mathbf{x}\| = \sqrt[\frac{1}{p}]{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p}$
- vollständig
- separabel
- $\mathbf{l}_p$ ist aber kein Hilbertraum, da kein Skalarprodukt existiert, für das gilt: $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$.

3.2.3 Der Raum $\mathbb{L}_2(a,b)$

Elemente: messbare Funktionen $\mathbf{f}: (a,b) \to \mathbb{C}$, für die gilt $(L)\int\limits_a^b |\mathbf{f}(t)|^2\, dt < \infty$

Diese Funktionen heißen quadratisch summierbar.
Rechenoperationen: $\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)$ bzw. $\lambda\mathbf{f}(t),\ \lambda \in \mathbb{C}$ werden punktweise ausgeführt

Skalarprodukt / Norm: $(\mathbf{f},\mathbf{g}) = (L)\int\limits_a^b \mathbf{f}(t)\overline{\mathbf{g}(t)}dt, \quad \|\mathbf{f}\|^2 = (L)\int\limits_a^b |\mathbf{f}(t)|^2\, dt$

Schwarz'sche Ungleichung: $|(\mathbf{f},\mathbf{g})| \leq \|\mathbf{f}\|\,\|\mathbf{g}\|$, d.h.

$$\left|(L)\int\limits_a^b \mathbf{f}(t)\overline{\mathbf{g}(t)}dt\right|^2 \leq \left((L)\int\limits_a^b |\mathbf{f}(t)|^2\, dt\right) \cdot \left((L)\int\limits_a^b |\mathbf{g}(t)|^2\, dt\right)$$

Basissysteme:

A) $(a,b) = (-1,1):$ $\qquad \widetilde{\mathbf{e}_n}(t) = t^n; \quad n = 0,1,2,...$
$\{\widetilde{\mathbf{e}_n}\}_{n=0}^{\infty}$ ist linear unabhängig und vollständig in $\mathbb{L}_2(-1,1)$.
SCHMIDTsche Orthonormierung liefert:

$$\mathbf{e}_n(t) = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} \mathbf{L}_n(t) \qquad n = 0,1,2,...$$

mit den LEGENDREschen Polynomen

$$\mathbf{L}_n(t) = \frac{1}{n!2^n}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^2-1\right)^n$$

insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0(t) &= 1, \qquad \mathbf{L}_1(t) = t, \qquad \mathbf{L}_2(t) = \frac{1}{2}\left(3t^2-1\right) \\ \mathbf{L}_3(t) &= \frac{1}{2}\left(5t^3-3t\right), \quad \mathbf{L}_4(t) = \frac{1}{8}\left(35t^4-30t^2+3\right) \end{aligned}$$

B) $(a,b) = (-\pi,\pi):$
vollständiges Orthonormalsystem :

$$\boldsymbol{\varphi}_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ ,\ \boldsymbol{\varphi}_{2k-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kt)\ ,\ \boldsymbol{\varphi}_{2k}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kt) \qquad k = 1,2,...$$

Damit ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \right] \quad , \\ \text{wobei} \quad a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{f}(t) \cos(kt)\, dt \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{f}(t) \sin(kt)\, dt \end{aligned}$$

C) $(a,b) = (0,\pi)$:
vollständiges Orthonormalsystem I :

$$\boldsymbol{\varphi}_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \ , \ \boldsymbol{\varphi}_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(kt)\, , \quad k = 1, 2, ...$$

vollständiges Orthonormalsystem II :

$$\boldsymbol{\varphi}_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kt)\, , \quad k = 1, 2, ...$$

D) $(a,b) = (0,T)$:
vollständiges Orthonormalsystem:

$$\boldsymbol{\varphi}_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \exp(ik\omega t) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Damit ist

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ik\omega t) \ , \quad \text{wobei} \qquad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(t) \exp(-ik\omega t)\, dt$$

Eigenschaften:

- Der $\mathbb{L}_2(a,b)$ ist unendlich-dimensional.
  Beweis: Es sei $[c,d] \subset (a,b)$ mit $-\infty < c < d < \infty$ und

$$\mathbf{f}_m(t) = \begin{cases} t^m & \text{für} \quad t \in [c,d] \\ 0 & \qquad \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

  Dann ist $\mathbf{f}_m \in \mathbb{L}_2(a,b)$ und das System $\mathbf{f}_0(t), ..., \mathbf{f}_m(t)$ ist für beliebige $m \in \mathbb{N}$ in $\mathbb{L}_2(a,b)$ linear unabhängig. Damit ist $\dim(L_2(a,b)) = \infty$.

- $\mathbb{L}_2(a,b)$ ist vollständig und separabel. Ist (a,b) ein endliches Intervall, so ist die Menge der Polynome mit rationalen Koeffizienten eine in $\mathbb{L}_2(a,b)$ dichte Menge. Jedes $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{L}_2(a,b)$ kann mit beliebiger Genauigkeit durch ein solches Polynom approximiert werden.

- Die Elemente von $\mathbb{L}_2(a,b)$ sind Funktionenklassen. $\mathbf{f}_1(t)$ und $\mathbf{f}_2(t)$ gehören zur selben Funktionenklasse, wenn gilt $\mathbf{f}_1(t) = \mathbf{f}_2(t)$ fast überall (f.ü.a). auf (a,b), d.h. wenn gilt $\mathbf{f}_1(t) \neq \mathbf{f}_2(t)$ auf einer Menge vom Maße Null bzw. $(L)\int\limits_a^b |\mathbf{f}_1(t) - \mathbf{f}_2(t)|\, dt =$ 0

Fourierreihen:

Mit den Basissystemen B, C und D ergeben sich die üblichen Fourierreihen.

Bemerkungen:

- **zum Raum** $\mathbb{L}_p$:
  Der Raum $\mathbb{L}_p$ mit zur p-ten Potenz integrierbaren Funktionen $\mathbf{f}(t),\ p \geq 1;\ p \neq 2$ ist kein Hilbertraum: Es gilt:
  $(L)\int_a^b |\mathbf{f}(t)|^p\, dt < \infty; \quad \|\mathbf{f}\| = \sqrt[\frac{1}{p}]{(L)\int_a^b |\mathbf{f}(t)|^p\, dt}.$
  Es gibt für $p \neq 2$ kein Skalarprodukt, so dass $\|\mathbf{f}\| = \sqrt{(\mathbf{f},\mathbf{f})}$ gilt.

- Die Menge $\mathbf{C}_*\,[a,b]$ aller stetigen Funktionen auf $[a,b]$ mit dem inneren Produkt

$$(\mathbf{f},\mathbf{g}) = \int\limits_a^b \mathbf{f}\,(t) \cdot \overline{\mathbf{g}\,(t)} dt \qquad \text{für bel.} \quad \mathbf{f},\mathbf{g} \in \mathbf{C}\,[a,b]$$

  ist ein Prä-Hibertraum, aber kein Hilbertraum. Es gilt jedoch: $\mathbf{C}_*\,[a,b]$ mit diesem inneren Produkt ist in $\mathbb{L}_2\,(a,b)$ ein dichter Unterraum.

- Der Grund für die Definition des Integrals im inneren Produkt des Raumes $\mathbb{L}_2\,(a,b)$ im LEBESGUEschen Sinne ist, dass dieser Integralbegriff gegenüber den Riemannintegralen wesentlich allgemeiner ist. Z.B. sind Vertauschungen von Integral und Grenzprozess gemäß

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b \mathbf{f}_n\,(t)\, dt = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}_n\,(t)\, dt$$

  bei Definition der Integrale im RIEMANNschen Sinne gegenüber der Definition nach LEBESGUE an wesentlich einschneidendere Voraussetzungen gebunden. Die Berechnung der inneren Produkte in der Menge der Funktionen des $\mathbb{L}_2\,(a,b)$ über Riemannintegrale würde deshalb zu einem Prä-Hilbertraum führen.

3.2.4 Der Raum $\mathbb{L}_2(G)$; $G \subseteq \mathbb{R}^n$; $G \neq \varnothing$; G messbar

Elemente: alle auf G definierten, messbaren, reell- bzw. komplexwertigen Funktionen $\mathbf{f}: G \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) mit
$(L) \int\limits_G |\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2 \, dG < \infty$. Diese Funktionen heißen auf G quadratisch summierbar.
Rechenoperationen:

$$\begin{array}{rcll} \alpha\mathbf{f}+\beta\mathbf{g} & \in & \mathbb{L}_2(G) \quad \text{gemäß} \quad (\alpha\mathbf{f}+\beta\mathbf{g})(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{f}(\mathbf{x})+\beta\mathbf{g}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in G \\ \forall \mathbf{f},\mathbf{g} & \in & \mathbb{L}_2(G) \ \text{ und } \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}\,(\text{bzw. } \mathbb{C}) & \end{array}$$

Skalarprodukt/Norm:

$$(\mathbf{f},\mathbf{g}) = \int\limits_G \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, \overline{\mathbf{g}(\mathbf{x})} \, dG \qquad \|\mathbf{f}\|_{L_2} = \sqrt{\int\limits_G |\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2 \, dG}$$

Schwarzsche Ungleichung: $|(\mathbf{f},\mathbf{g})| \leq \|\mathbf{f}\| \, \|\mathbf{g}\|$, d.h.

$$\left| \int\limits_G \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, \overline{\mathbf{g}(\mathbf{x})} \, dG \right| \leq \sqrt{\int\limits_G |\mathbf{f}(\mathbf{x})|^2 \, dG} \cdot \sqrt{\int\limits_G |\mathbf{g}(\mathbf{x})|^2 \, dG}$$

Basissystem: $\mathbb{H}=\mathbb{L}_2(-\infty,\infty)$: $\qquad \mathbf{f}_n(t) = t^n \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) \quad n = 0,1,2,...$
$\{ \mathbf{f}_n \}$ ist linear unabhängig und vollständig in $\mathbb{L}_2(-\infty,\infty)$.
SCHMIDTsche Orthonormierung liefert:

$$\begin{array}{rcll} \boldsymbol{\varphi}_n(t) & = & \dfrac{1}{\alpha_n} \exp\left(-\dfrac{1}{2}t^2\right) \mathbf{H}_n(t) & n = 0,1,2,... \\ \text{mit} \quad \alpha_n & = & \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}} & \end{array}$$

und den HERMITEschen Polynomen

$$\mathbf{H}_n(t) = (-1)^n \exp\left(t^2\right) \frac{d^n}{dt^n} \left(\exp\left(-t^2\right)\right)$$

Insbesondere ist:

$$\mathbf{H}_0(t) = 1, \qquad \mathbf{H}_1(t) = 2t, \qquad \mathbf{H}_3(t) = 4t^2 - 2$$

Eigenschaften:

- $\mathbb{L}_2(G)$ ist ein separabler Hilbertraum.

- Die Elemente aus $\mathbb{L}_2(G)$ sind wie im Fall des $\mathbb{L}_2(a,b)$ Funktionenklassen.
- Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, so gilt $\dim(\mathbb{L}_2(G)) = \infty$.
  Ist G offen, so existiert ein Kubus
  $$\mathbf{C} = \{\mathbf{x} = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid -\infty < a_k < \xi_k < b_k < \infty\}$$
  mit $C \subset G$. Wir definieren
  $$\mathbf{f}_m(\mathbf{x}) = \begin{cases} \xi_1^m & \text{für } \mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbf{C} \\ 0 & \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{G}. \end{cases} .$$
  Dann folgt $\mathbf{f}_m(\mathbf{x}) \in \mathbb{L}_2(G)$ und das System $\mathbf{f}_0(\mathbf{x}), ..., \mathbf{f}_m(\mathbf{x})$ ist für beliebige $m \in \mathbb{N}$ in $\mathbb{L}_2(G)$ linear unabhängig $\Rightarrow \dim(\mathbb{L}_2(G)) = \infty$.

Bemerkungen:

1. $\mathbf{C}(G)-$ Raum aller auf G definierten stetigen Funktionen.
   Es gilt: $\mathbf{C}(G) \subset \mathbb{L}_2(G)$.
2. $\mathbf{C}^m(G)-$ Raum aller auf G definierten Funktionen, die stetige partielle Ableitungen der Ordnung $k = 0, 1, ..., m$ besitzen.
3. $\mathbf{C}_0(G)-$ Raum aller im $\mathbb{R}^n$ definierten stetigen **Funktionen** φ **mit kompaktem Träger in** G:
   d.h.
   $$\mathbf{C}_0(G) = \{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}(G) \mid \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für } \forall\, \mathbf{x} \notin G\}.$$
4. $\mathbf{C}_0^m(G)-$ Raum aller der Funktionen aus $\mathbf{C}_0(G)$, die stetige partielle Ableitungen der Ordnung $k = 0, 1, ..., m$ besitzen.
   $$\mathbf{C}_0^m(G) = \left\{ \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}_0(G) \;\middle|\; \frac{\partial^{\alpha_1+...+\alpha_n}\varphi(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}} \in \mathbf{C}_0(G) \quad \begin{array}{c} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \le m \\ \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \end{array} \right\}$$
5. $\mathbf{C}_0^\infty(G)-$ Raum aller Funktionen $\varphi \in \mathbf{C}_0(G)$, die beliebig oft stetig differenzierbar sind, d.h. $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}_0^\infty(G)$, wenn $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}_0^m(G)$ für $m = 0, 1, ...$

3.3 Isometrie von Hilberträumen

Definition 3.8 *Die Hilberträume $\mathbb{H}_1$, $\mathbb{H}_2$ heißen isometrisch, wenn eine eindeutige Abbildung $f : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_2$ existiert, für die gilt:*

- $f(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v})$
- $(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v})) \quad \forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{H}_1, \forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}$

Folgerung 3.3 *Diese Abbildung ist sogar eineindeutig:*

Beweis. Annahme:

$$f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{x};\ f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{x} \quad \wedge \quad \mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$$

Darus folgt

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) &= f(\mathbf{u}_1) - f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{0} \\ \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|^2 &= \|f(\mathbf{u}_1) - f(\mathbf{u}_2)\|^2 = \|\mathbf{0}\| = 0 \\ \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_2 \quad \text{Widerspruch} \end{aligned}$$

■

Bemerkung 3.5 *Bei dieser Isometrie bleiben alle für einen normierten Raum typischen Eigenschaften erhalten. Deshalb sind solche Räume vom abstrakten Standpunkt als gleich anzusehen. Sie können miteinander identifiziert werden. (siehe z.B. reelle Zahlen - Punkte auf der Zahlengeraden oder $\mathbb{C}$ - Vektoren im $\mathbb{R}^2$).*

Satz 3.6 *Zwei beliebige separable unendlichdimensionale Hilberträume $\mathbb{H}_1$ und $\mathbb{H}_2$ sind isometrisch.*

Beweis. $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{H}_1$, $\mathbb{H}_1$ is separable
$\curvearrowright \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{\infty} u_i\mathbf{e}_i; \quad u_i = (\mathbf{u},\mathbf{e}_i); \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{\infty} v_i\mathbf{e}_i; \quad v_i = (\mathbf{u},\mathbf{e}_i);$
$\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ ist ein vollständiges ONS $\curvearrowright$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 < \infty \quad \text{(Besselsche Ungleichung}$$

Nach dem Satz von Riesz-Fischer existiert dann ein Element $\mathbf{x}\in\mathbb{H}_2$ mit den Fourierkoeffizienten u_i :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} u_i\mathbf{g}_i; \quad \{\mathbf{g}_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ ist ein vollständiges ONS von } \mathbb{H}_2$$

Nun definieren wir die Abbildung

$$f(\mathbf{u}) = \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} u_i\mathbf{g}_i \quad (*)$$

Weiter sei $f(\mathbf{v}) = \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \mathbf{g}_i$
Die Abbildung $(*)$ ist eine Isometrie:
Eigenschaft 1:

$$\begin{aligned}
f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) &= f\left(\alpha \sum_{i=1}^{\infty} u_i \mathbf{e}_i + \beta \sum_{i=1}^{\infty} v_i \mathbf{e}_i\right) \\
&= f\left(\alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} u_i \mathbf{e}_i + \beta \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{e}_i\right) \\
&= f\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\alpha u_i + \beta v_i) \mathbf{e}_i\right) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha u_i + \beta v_i) \mathbf{g}_i \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} u_i \mathbf{g}_i + \beta \sum_{i=1}^{\infty} v_i \mathbf{g}_i \\
&= \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

Eigenschaft 2:

$$\begin{aligned}
(f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v})) &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i \mathbf{g}_i, \sum_{j=1}^{\infty} v_j \mathbf{g}_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \overline{v}_i \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{\infty} v_j \mathbf{e}_j\right) \\
&= (\mathbf{u}, \mathbf{v})
\end{aligned}$$

■

Bemerkung 3.6 *Die Zuordnung hängt von der Wahl der Orthonormalsysteme ab. l_2 und L_2 sind also nur zwei unterschiedliche Realisierungen des separablen unendlichdimensionalen Hilbertraumes.*

3.4 Orthogonalität und Unterräume

Definition 3.9 *Die Teilmengen $M_1 \subset \mathbb{H}$ und $M_2 \subset \mathbb{H}$ eines Hilbertraumes $\mathbb{H}$ heißen genau dann* ***orthogonal****, wenn gilt* $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in M_1, \forall \mathbf{v} \in M_2$.

Definition 3.10 *Ist M eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{H}$, dann heißt* $M^{\perp} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{H} \mid \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in M\}$ *Orthogonalraum zu M.*

Satz 3.7 *Für jede Teilmenge $M \subset \mathbb{H}$ eines Hilbertraumes $\mathbb{H}$ ist $M^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathbb{H}$.*

Beweis. 1) Wir zeigen, dass $M^\perp$ ein linearer raum ist:
$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in M^\perp,\ \mathbf{v} \in M \quad \curvearrowright$

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) &= 0 = (\mathbf{u}_2, \mathbf{v})\\ (\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) &= \alpha(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + \beta(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = 0\end{aligned}$$

$$\curvearrowright \quad \alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 \in M^\perp$$

2) Wir zeigen: $M^\perp$ ist abgeschlossen:
Aus $\mathbf{u} \in (M^\perp)^+$ folgt

$$\begin{aligned}\exists\{\mathbf{u}_n\}_{n=1}^\infty \mid \mathbf{u}_n &\in M^\perp \wedge \lim_{n\to\infty} \mathbf{u}_n = \mathbf{u}\\ (\mathbf{u}_n, \mathbf{v}) &= 0 \quad \forall n, \quad \forall \mathbf{v} \in M\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes erhalten wir

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lim_{n\to\infty} (\mathbf{u}_n, \mathbf{v}) = 0 \quad \curvearrowright \quad \mathbf{u} \in M^\perp$$

■

Folgerung 3.4 *Ist M Unterraum $\Longrightarrow$ $M \cap M^\perp = \{\mathbf{0}\}$*

Folgerung 3.5 *Ist $M = \mathbb{H} \Longrightarrow$ $M^\perp = \{\mathbf{0}\}$*

Bemerkung 3.7 ***Folgerung 3.6*** *Es gelte $M \subset \mathbb{H}$; $\quad \mathbf{u} \in \mathbb{H} \quad \wedge \quad \{\mathbf{u}\} \perp M \quad \Longrightarrow$ $\{\mathbf{u}\} \perp \overline{spanM}$*

Satz 3.8 ***PYTHAGORAS***
Die Elemente $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n \in \mathbb{H}$ des Hilbertraumes H seien paarweise orthogonal, d.h. $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = 0$ für $i \neq j$. Dann gilt

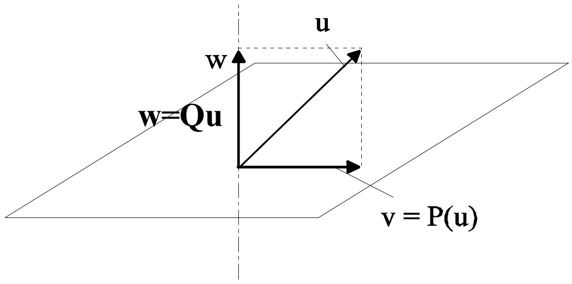
$$\|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + ... + \mathbf{u}_n\|^2 = \|\mathbf{u}_1\|^2 + \|\mathbf{u}_2\|^2 + ... + \|\mathbf{u}_n\|^2$$

Definition 3.11 *Es seien $\mathbb{V}$, $\mathbb{W} \subset \mathbb{H}$ abgeschlossene Unterräume des Hilbertraumes $\mathbb{H}$. Ist jedes $\mathbf{u} \in \mathbb{H}$ eindeutig als Summe $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ mit $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ und $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$ darstellbar, so heißt $\mathbb{H}$* ***direkte Summe*** *der Unterräume $\mathbb{V}$ und $\mathbb{W}$: $\mathbb{H} = \mathbb{V} \oplus \mathbb{W}$.*

Definition 3.12 $\mathbb{W} \subset \mathbb{H}$ *heißt* ***orthogonales Komplement*** *zum abgeschlossenen Unterraum $\mathbb{V} \subset \mathbb{H}$, wenn gilt $\mathbb{W} \perp \mathbb{V} \quad \wedge \quad \mathbb{H} = \mathbb{V} \oplus \mathbb{W}$.*

Satz 3.9 *Jeder abgeschlossenen Unterraum $\mathbb{V} \subset \mathbb{H}$ eines Hilbertraumes $\mathbb{H}$ besitzt ein eindeutig bestimmtes orthogonales Komplement $\mathbb{W}$.*

Satz 3.10 *Es gelte $\mathbb{W} \perp \mathbb{V} \quad \wedge \quad \mathbb{H} = \mathbb{V} \oplus \mathbb{W}$, $\mathbb{H}$ Hilbertraum. Dann gilt für ein beliebiges $\mathbf{u} \in \mathbb{H}$: $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ mit $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ und $\mathbf{w} \in \mathbb{W}$: $\quad (\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$.*
*$\mathbf{v}$ heißt **orthogonale Projektion** von $\mathbf{u}$ auf $\mathbb{V}$ bzw.$\mathbf{w}$ heißt **orthogonale Projektion** von $\mathbf{u}$ auf $\mathbb{W}$.*
*Die Abbildungen $\mathbf{P} : \mathbb{H} \to \mathbb{V}$ gemäß $\mathbf{Pu} = \mathbf{v}$ und $Q : \mathbb{H} \to \mathbb{W}$ gemäß $\mathbf{Qu} = \mathbf{w}$ heißen **orthogonaler Projektor** (Orthoprojektor) auf $\mathbb{V}$ bzw. $\mathbb{W}$.*



$\mathbb{H} = \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{V} = \mathbb{R}^2$

Bemerkung 3.8 *Der Orthoprojektor $\mathbf{P}$ ist ein **linearer beschränkter Operator** mit $\|\mathbf{P}\| = 1$.*
Beweis: Es sei $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i, \quad i = 1, 2$

$$\mathbf{P}(\alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2) = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 = \alpha \mathbf{P} \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{P} \mathbf{u}_2; \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{H}$$

$$\|\mathbf{Pu}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \quad \forall \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathbb{H}$$

Für beliebige $\mathbf{u} = \mathbf{v} \in \mathbb{U}$ gilt andererseits $\|\mathbf{Pu}\| = \|\mathbf{u}\|$, und damit ist $\|\mathbf{P}\| = 1$.

Bemerkung 3.9 *Es gilt $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$ ($\mathbf{I}-$ Einheitsoperator).*

BESTAPPROXIMATION IN HILBERT-RÄUMEN

Satz 3.11 *$\mathbb{U}$ sei ein abgeschlossener Unterraum des Hibertraumes $\mathbb{H}$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{H}$ beliebig. Dann gilt:*
a) Es existiert genau ein $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{U}$ mit

$$\begin{aligned} a)\ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| &= \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{U}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \ \textit{und} \\ b)\ (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \mathbf{v}) &= 0 \qquad \textit{für} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{U}, \quad \textit{d.h. } \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \in \mathbb{U}^{\perp}. \end{aligned}$$

*$\mathbf{u}_0$ heißt **bestapproximierendes Element** für $\mathbf{u} \in \mathbb{H}$ bezüglich des Unterraumes $\mathbb{U}$.*
Beweis: s. Literatur (Kantorowitsch/Akilow)

Bemerkung 3.10 *Die Minimumprobleme* $\min\limits_{\mathbf{v}\,\in\,\mathbf{U}} \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$ *und* $\min\limits_{\mathbf{v}\,\in\,\mathbf{U}} \mathbf{F}(\mathbf{v})$ *mit dem quadratischen Funktional*

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\mathbf{v},\mathbf{v}) - (\mathbf{u},\mathbf{v})$$

besitzen in Hilberträumen mit reellem Skalarprodukt ein und dieselbe Lösung $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{U}$. *Das folgt sofort aus dem Zusammenhang:*

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u},\mathbf{u}) - 2(\mathbf{u},\mathbf{v}) + (\mathbf{v},\mathbf{v}) = 2\left[\frac{1}{2}(\mathbf{v},\mathbf{v}) - (\mathbf{u},\mathbf{v})\right] + \|\mathbf{u}\|^2 = 2\mathbf{F}(\mathbf{v}) + \|\mathbf{u}\|^2.$$

Satz 3.12 *Es sei* $\mathbb{U}_n$ *ein* $n-$*dimensionaler Unterraum des HILBERT-Raumes* $\mathbb{H}$ *und* $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ *eine Basis in* $\mathbb{U}_n$. *Das bestapproximierende Element* $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{U}_n$ *für ein beliebiges* $\mathbf{u} \in \mathbb{H}$ *kann in der Form*

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{e}_k$$

dargestellt werden, wobei die Koeffizienten α_k *aus dem linearen Gleichungssystem*

$$(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0,\mathbf{e}_i) = (\mathbf{u},\mathbf{e}_i) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_i) = 0, \qquad i = 1,...,n$$

eindeutig berechenbar sind.

Beweis: Zusammen mit Satz 3.11 genügt zum Beweis die Bemerkung, dass die Bedingung $(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0,\mathbf{v}) = 0$ für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{U}_n$ genau dann gilt, wenn diese für die Basiselemente $\mathbf{e}_i$ $(i = 1,...,n)$ erfüllt ist, d.h. wenn $(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0,\mathbf{e}_i) = 0$ $(i = 1,...,n)$. Das lineare Gleichungssystem entsteht dann nach Substitution des Ansatzes für $\mathbf{u}_0$ in diesen Beziehungen.

Bemerkung 3.11 *Dieser Satz bildet die Grundlage zur numerischen Lösung von Extremalaufgaben (quadratische Variationsprobleme).*

Beispiel 3.13 *Es sei* $\mathbb{H}$=$\mathbb{L}_2(0,1)$ *und* $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{H}$ *der Unterraum, der von den Basisfunktionen* $\boldsymbol{\varphi}_k(t) = t^k$ $(k = 0,1,...,n)$ *aufgespannt wird.* $\mathbb{U}_n$ *hat damit die Dimension* $n+1$. *Sei* $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{L}_2(0,1)$.
Ansatz für das bestapproximierende Element:

$$\mathbf{f}_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \boldsymbol{\varphi}_k(t).$$

mit

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\varphi}_k,\boldsymbol{\varphi}_i) &= \int_0^1 \boldsymbol{\varphi}_k(t)\overline{\boldsymbol{\varphi}_i(t)}dt = \int_0^1 \mathbf{t}^{k+i}dt = \frac{1}{k+i+1} \\
(\mathbf{f},\boldsymbol{\varphi}_i) &= \int_0^1 \mathbf{f}(t)\overline{\boldsymbol{\varphi}_i(t)}dt = \int_0^1 f(t)\mathbf{t}^i dt.
\end{aligned}$$

(∗) ist das lineare Gleichungssystem für die stetige Approximation von $f(t)$ im quadratischen Mittel (Methode der kleinstenQuadrate, s. Numerik). Wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (\mathbf{f}_n(t)-\mathbf{f}(t))^2 dt = 0\text{: } \textit{Konvergenz in } \mathbb{L}_2(0,1)$$

Bemerkung 3.12 *Ist $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ eine orthogonale Basis in $\mathbb{U}_n$, d. h. gilt $(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_i)=\delta_{ki}E_i$, so erhält man $\alpha_i=(\mathbf{u},\mathbf{e}_i)/E_i$ und damit*

$$\mathbf{u}_0=\sum_{k=1}^{n}\frac{(\mathbf{u},\mathbf{e}_k)}{E_k}\mathbf{e}_k.$$

Das entspricht dem Anfang einer Fourierreihe, d.h. die Fourierreihe führt zum bestapproximierenden Element.

Beispiel 3.14 *Es sei $\mathbb{H}$=$\mathbb{L}_2(0,2\pi)$ und $\mathbf{f}\,(t)$ sei eine beliebige Funktion aus $\mathbb{L}_2(0,2\pi)$.*
$\mathbb{U}_n = span\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kt)\ ,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kt)\qquad k=1,2,...n\right\}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_n(t) &= \frac{\alpha_0}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{k=1}^{n}\left[\alpha_k\frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}+\beta_k\frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}\right]\\
\alpha_0 &= \left(\mathbf{f},\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)=\int_0^{2\pi}\mathbf{f}\,(t)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}dt\\
\alpha_k &= \left(\mathbf{f},\frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\mathbf{f}\,(t)\cos(kt)dt\\
\beta_k &= \left(\mathbf{f},\frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\mathbf{f}\,(t)\sin(kt)dt;\ \ k=1,2,...,n
\end{aligned}$$

Im Allgemeinen sind die Faktoren in Koeffizienten α_k, β_k enthalten und wir erhalten die übliche Form der Fourierreihe mit

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} (\mathbf{f}_n(t)-\mathbf{f}(t))^2 dt = 0\text{: } \textit{Konvergenz in } \mathbb{L}_2(0,2\pi)$$

3.5 Lineare Operatoren in Hilberträumen

3.5.1 Adjungierte, symmetrische und monotone Operatoren

Lineare zeitunabhängige Zusammenhänge führen auf lineare Operatorgleichungen der Form $Au=f$, z.B.

- bei der Berechnung statischer elektrischer Felder

- beim statischen Kräftegleichgewicht mechanischer Systeme
- bei Problemen, die auf lineare Gleichungssysteme führen.

Um Klassen linearer Operatoren mit gleichen Lösungseigenschaften bilden zu können, ist es erforderlich, die Eigenschaften linearer Operatoren genauer zu kennen. Hat der Operator Matrixgestalt, so bestimmen die Matrixeigenschaften , wie z.B. die

- Symmetrie und die
- positive Definitheit,

die Operator- und Lösungseigenschaften. Solche Eigenschaften müssen nun auf allgemeine lineare Operatoren im Hilbertraum übertragen werden.

Definition 3.13 *Im Hilbertraum* $\mathbb{H}$ *sei der lineare Operator* $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *definiert. Es gelte* $\overline{D(\mathbf{A})} = \mathbb{H}$.

$$D(\mathbf{A}^*) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{H} \mid \quad \exists \mathbf{y} \in \mathbb{H} \text{ mit } (\mathbf{Au}, \mathbf{x}) = (\mathbf{u}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{u} \in D(\mathbf{A})\}$$

Der Operator $\mathbf{A}^* : D(\mathbf{A}^*) \subseteq \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *mit* $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{y}$ *heißt* ***adjungierter Operator*** *zu* $\mathbf{A}$. *Es gilt*

$$(\mathbf{Au}, \mathbf{x}) = (\mathbf{u}, \mathbf{A}^*\mathbf{x}) \text{ für } \forall \mathbf{u} \in D(\mathbf{A}), \forall \mathbf{x} \in D(\mathbf{A}^*).$$

Definition 3.14 *Im Hilbertraum* $\mathbb{H}$ *sei der lineare Operator* $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *definiert. Es gelte* $\overline{D(\mathbf{A})} = \mathbb{H}$. $\mathbf{A}$ *heißt*

- **symmetrisch** $\iff (\mathbf{Au}, \mathbf{x}) = (\mathbf{u}, \mathbf{Ax}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{x} \in D(\mathbf{A})$,
  d.h. $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{Ax} \quad \forall \mathbf{x} \in D(\mathbf{A}) \quad \wedge \quad D(\mathbf{A}) \subseteq D(\mathbf{A}^*)$
- **selbstadjungiert** $\iff \mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, d.h. $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{Ax} \quad \forall \mathbf{x} \in D(\mathbf{A}) = D(\mathbf{A}^*)$
- **schiefsymmetrisch** $\iff (\mathbf{Au}, \mathbf{x}) = -(\mathbf{u}, \mathbf{Ax}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{x} \in D(\mathbf{A})$
- **schief-adjungiert** $\iff \mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$

Beispiel 3.15 $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$; $\quad \mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n$; $\quad \mathbf{Au} = (\sum_{=1}^n a_{ij}u_j)_{i=1}^n$; $\quad \overline{D(\mathbf{A})} = \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{Au}, \mathbf{x}) &= \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}u_j, \mathbf{x}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}u_j\right) \cdot x_i \\
&= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ji}u_i\right) \cdot x_j \qquad (i \longleftrightarrow j) \\
&= \sum_{i=1}^n u_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j\right) = (\mathbf{u}, \mathbf{A}^*\mathbf{x}) \\
\mathbf{A}^* &= (a_{ij}^*)_{i,j=1}^n = (a_{ji})_{i,j=1}^n
\end{aligned}$$

Im Fall von reellen Matrizen ist der Operator $\mathbf{A}^*$ *die Matrix* $\mathbf{A}^T$. *Im Fall von komplexen Matrizen ist der Operator* $\mathbf{A}^*$ *die konjugierte und transponierte Matrix* $\mathbf{A}^*$.

Beispiel 3.16 $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2(a,b)$; $\quad \mathbf{Au} = \int_a^b K(t,s)\mathbf{u}(s)ds$; $\quad D(\mathbf{A}) = \mathbb{H}$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{Au}, \mathbf{x}) &= \int_a^b \left[\int_a^b K(t,s)\mathbf{u}(s)ds\right] \cdot \mathbf{x}(t)dt \stackrel{!}{=} \int_a^b \mathbf{u}(s)\mathbf{y}(s)ds \\
&\Longleftrightarrow \\
\int_a^b \left[\int_a^b K(t,s)\mathbf{x}(t)dt\right] \cdot \mathbf{u}(s)ds &= \int_a^b \mathbf{u}(s)\mathbf{y}(s)ds \\
&\Longleftrightarrow \\
\mathbf{y}(s) &= \int_a^b K(t,s)\mathbf{x}(t)dt = \mathbf{A}^*x; \\
\mathbf{A}(\mathbf{u}(\mathbf{s})) &= \int_a^b K(t,s)\mathbf{u}(s)ds
\end{aligned}$$

$\curvearrowright$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^*(\mathbf{u}(\mathbf{s})) &= \int_a^b K(s,t)\mathbf{u}(s)ds \\
\mathbf{A} &= \mathbf{A}^* \Longleftrightarrow K(s,t) = K(t,s)
\end{aligned}$$

Im Fall von komplexen Funktionen und einem komplexen Körper erhalten wir $K(s,t) = \overline{K(t,s)}$

Eigenschaften des adjungierten Operators:

1. $\mathbf{A}^*$ ist linear.

2. $(\alpha\mathbf{A})^* = \overline{\alpha}\mathbf{A}^*$

3. Sei $\mathbf{T} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ ein linearer beschränkter Operator. $\Longrightarrow$ $\exists$ ein eindeutig bestimmter Operator $\mathbf{T}^*$, der ebenfalls linear und beschränkt ist.
   Es gilt: $\|\mathbf{T}\| = \|\mathbf{T}^*\|$.

4. $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$, denn es gilt:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}^*\mathbf{u}, \mathbf{x}) &= (\mathbf{u}, (\mathbf{A}^*)^*\mathbf{x}) \\ &= \overline{(\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{u})} = \overline{(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{u})} = (\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{x})\end{aligned}$$

Definition 3.15 *Der lineare Operator* $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *heißt* ***positiv definit,*** *wenn gilt:* $(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq C \|\mathbf{u}\|^2$ *für* $\forall \mathbf{u} \in D(\mathbf{A}), \quad C \in \mathbb{R}, \quad C > 0$

Bemerkung 3.13 *Vergleiche mit Linearer Algebra: Positive Definitheit von Matrizen*

3.5.2 Eigenwerte von Operatoren

Definition 3.16 $\lambda \in \mathbb{C}$ *heißt* ***Eigenwert*** *des Operators* $\mathbf{A} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *,wenn ein* $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$ *existiert,* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, *so dass gilt* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. *Jedes* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *für das* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ *gilt, heißt* ***Eigenelement*** *zum Eigenwert* λ.

Eigenschaften :

1. $\mathbf{A} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^*; \quad \curvearrowright \quad (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{x}$
   Beweis:
$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}) = \overline{(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x})}$$

2. $\mathbf{A} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^*; \quad \curvearrowright$ alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind reell.
   Beweis:$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \curvearrowright$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= (\boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}, \mathbf{x} \qquad) \\ \lambda &= \frac{(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} \overset{1.}{\in} \mathbb{R}\end{aligned}$$

3. $\mathbf{A} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^*; \quad \curvearrowright$ Eigenelemente, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind orthogonal.
   Beweis: $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1;\ \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2;\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R};\ \lambda_1 \neq \lambda_2$
   $\curvearrowright$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \lambda_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ (\mathbf{x}_1, \mathbf{A}\mathbf{x}_2) &= \lambda_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ &= (\mathbf{A}^*\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{A}\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \lambda_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \lambda_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= 0 \end{aligned}$$

Da $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt, folgt $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$.

4. $\mathbf{A} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}^*; \quad \curvearrowright \quad \|\mathbf{A}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} |(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x})| \quad (o.B.)$

Beispiel 3.17 $\mathbb{H} = \mathbb{C}^n; \quad T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}; \quad \mathbf{T} = (t_{ij})_{i,j=1}^n;$

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathbf{x} &= \mathbf{y} \; mit \; y_k = \sum_{j=1}^n t_{kj} x_j; \quad k = 1, 2, ..., n \\ \mathbf{T}\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x} \Longleftrightarrow (\mathbf{T} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{x} &\neq \mathbf{0} \Longleftrightarrow \det(\mathbf{T} - \boldsymbol{\lambda}\mathbf{I}) = 0, \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{I} = (\delta_{ij})_{i,j=1}^n$ *der Einheitsoperator ist. Die Eigenwerte der Matrix* $(t_{ij})_{i,j=1}^n$ *stellen die Eigenwerte des Operators* $\mathbf{T}$ *dar.*

Beispiel 3.18 *Differentialoperator:* $\mathbf{D} = \frac{d^2}{dt^2}; \quad \mathbf{x}(t)$ *sei mindestens zweimal stetig differenzierbar.*
$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(\pi) = 0; \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x}(t) \in \overset{o}{\mathbf{C}}{}^2[0, \pi]$: *kein Hilbertraum, aber Banachraum!!*

$$\mathbf{D}\mathbf{x} = \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{x}(\mathbf{t}) \overset{!}{=} \lambda\mathbf{x}(t) \quad \wedge \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(\pi) = 0$$

Das Eigenwertproblem entspricht dem Randwertproblem einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten,.Mit dem Ansatz $\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t}$ *erhalten wir die characterische Gleichung*

$$\alpha^2 - \lambda = 0 \quad \curvearrowright \quad \alpha_{1/2} = \pm\sqrt{\lambda}$$

und damit die folgenden allgemeinen Lösungen:
Fall 1: $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= C_1 e^{\sqrt{\lambda}t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}tx} \quad \wedge \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(\pi) = 0 \\ \mathbf{x}(0) &= C_1 + C_2 \overset{!}{=} 0 \quad \curvearrowright \quad C_2 = -C_1 \\ \mathbf{x}(\pi) &= C_1 e^{\sqrt{\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}l} \\ &= C_1 e^{\sqrt{\lambda}l} - C_1 e^{-\sqrt{\lambda}l} \overset{!}{=} 0 \Longleftrightarrow C_1 = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Fall 2: $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= C_1 + C_2 t \quad \wedge \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(\pi) = 0 \\
\mathbf{x}(0) &= C_1 \overset{!}{=} 0 \\
\mathbf{x}(\pi) &= C_2 \cdot \pi \overset{!}{=} 0 \Longleftrightarrow C_2 = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Fall 3: $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= C_1 \cos(\sqrt{-k}t) + C_2 \sin(\sqrt{-k}t) \quad \wedge \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(\pi) = 0 \\
\mathbf{x}(0) &= C_2 \cos 0 = C_2 \overset{!}{=} 0 \\
\mathbf{x}(\pi) &= C_1 \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) \overset{!}{=} 0 \Longleftrightarrow C_1 = 0 \quad \vee \quad \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0
\end{aligned}$$

$C_1 = 0$ *führt nur zur trivialen Lösung. Deshalb fordern wir*

$$\begin{aligned}
\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) &= 0 \Longleftrightarrow \sqrt{-\lambda}\pi = k\pi \\
&\Longleftrightarrow \lambda_k = -k^2 \\
&\Longleftrightarrow \mathbf{x}_k(t) = C_k \sin(kt) \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

D.h. nur für die Eigenwerte $\lambda_k = -k^2$ *erhalten wir nichttriviale Lösungen.*
Aber der Raum $\overset{o}{\mathbf{C}}{}^2[0,\pi]$ *ist kein Hilbertraum. Wir kennen dort kein Skalarprodukt und können deshalb die Fourierreihen nicht nutzen.*

Satz 3.13 *Der Operator* $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ *sei selbstadjungiert, positiv definit und besitze ein abzählbares System von Eigenlösungen* $\{\lambda_k, \mathbf{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$, *wobei die Eigenelemente* $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *in* $\mathbb{H}$ *ein vollständiges ONS bilden. Dann gilt:*

1. $\mathbf{Au}$ *hat die Darstellung*

$$\begin{aligned}
\mathbf{Au} &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\mathbf{u}, \mathbf{u}_k) \mathbf{u}_k \quad \textit{für} \\
\forall \mathbf{u} &\in D(A) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{H} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k (\mathbf{u}, \mathbf{u}_k)|^2 < \infty\}
\end{aligned}$$

2. $\exists\ \mathbf{A}^{-1} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$; $\mathbf{A}^{-1}$ *ist linear und beschränkt.*

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (\mathbf{f}, \mathbf{u}_k) \mathbf{u}_k \quad \forall \mathbf{f} \in H \\
\left\| \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} \right\| &\le \frac{1}{C} \|\mathbf{f}\| \quad \textit{mit} \quad 0 < C \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots
\end{aligned}$$

3. *Die Lösung der Operatorgleichung* $\mathbf{Au} = \mathbf{f},\ \mathbf{f} \in \mathbb{H}$ *hat die Form*

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}(\mathbf{f}, \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k.$$

o.B.

Bemerkung 3.14 *Um diesen Satz nutzen zu können, ist unbedingt ein Hilbertraum erforderlich! Ein Banachraum wie im Beispiel 3.18 reicht nicht aus, obwohl dort eine Fourierreihe existiert.* $\Longrightarrow$ *Einbettung in Hilbertraum suchen.*

Bemerkung 3.15 *Folgende Bedingungen sind äquivalent:*

1. $\mathbf{u} \in D(\mathbf{A})$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(\mathbf{u}, \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$ ist konvergente Reihe in $\mathbb{H}$.
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k(\mathbf{u}, \mathbf{u}_k)|^2$ ist konvergente Zahlenreihe.

3.5.3 Lineare Funktionale

Definition 3.17 *Im Hilbertraum* $\mathbb{H}$ *über dem Körper* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{R}$ *bzw.* $\mathbb{C}$*) heißen Operatoren* $\mathbf{f}$*, die von* $\mathbb{H}$ *nach* $\mathbb{K}$ *abbilden Funktionale oder Linearformen:* $\mathbf{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{K}$.

Definition 3.18 *Das Funktional* $\mathbf{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ *heißt:*

- ***linear****, wenn gilt:* $\mathbf{f}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{H};\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$
- ***beschränkt****, wenn gilt:* $\exists M \in \mathbb{R},\ M > 0 \quad | \quad |f(\mathbf{u})| \leq M \|\mathbf{u}\| \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{H}$
- ***stetig****, wenn gilt: Aus* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{u}_n = \mathbf{u}$ *folgt stets* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{u}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{u})$; $\mathbf{u}_n, \mathbf{u} \in \mathbb{H}$.

Definition 3.19 *Es sei* $\mathbf{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ *ein lineares beschränktes Funktional. Die Zahl*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}\| &= \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} |\mathbf{f}(\mathbf{u})|, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{H} \\ &= \inf\{M \in \mathbb{R} \mid |\mathbf{f}(\mathbf{u})| \leq M \|\mathbf{u}\| \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{H}\} \end{aligned}$$

heißt ***Norm des Funktionals****.*

Analog zu den Operatoren gilt:

Satz 3.14 *Ein lineares Funktional auf dem Hilbertraum $\mathbb{H}$ ist genau dann stetig, wenn es beschränkt ist.(Beweis Hausaufgabe)*

Satz 3.15 $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{H}$ *beliebig, fest;* $\mathbb{H}$ *sei ein Hilbertraum* $\mathbb{H}$ *über dem Körper* $\mathbb{K}$. *Dann definiert* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{u}_0)$ *ein lineares Funktional in* $\mathbb{H}$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{u}_0) \\ &= \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0) + \beta(\mathbf{y}, \mathbf{u}_0) \\ &= \alpha\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}\mathbf{f}(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

■

Bemerkung 3.16

$$\begin{aligned} 1)\ |\mathbf{f}(\mathbf{x})| = |\ &(\mathbf{x}, \mathbf{u}_0)| \leq \ \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{u}_0\| \quad \curvearrowright \quad \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{u}_0\| \\ 2)\ \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}\|} \quad &\leq \quad \inf M = \|\mathbf{f}\| \quad \curvearrowright \quad \|\mathbf{f}\| \leq \|\mathbf{u}_0\| \\ 3)\ |\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)| \quad &= \quad |(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0)| = \|\mathbf{u}_0\|^2 \ \textit{ergibt}\ \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)|}{\|\mathbf{u}_0\|} = \|\mathbf{u}_0\| \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $\|\mathbf{f}\| = \|\mathbf{u}_0\|$ *. d.h. wenn* $\mathbf{f}$ *beschränkt ist, ist* $\mathbf{f}$ *auch stetig.*

Satz 3.16 *Darstellungssatz von* ***RIESZ***
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *sei ein stetiges (bzw. beschränktes) lineares Funktional im Hilbertraum* $\mathbb{H}$ *mit dem Skalarprodukt* $(.,.)$. $\Longrightarrow$ $\exists \mathbf{u}_0 \in \mathbb{H} \ \mid\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{u}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{H}$, $\mathbf{u}_0$ *fest.* $\mathbf{u}_0$ *ist eindeutig bestimmt, es gilt:* $\|\mathbf{f}\| = \|\mathbf{u}_0\|$ *.(o.B.)*

Beispiel 3.19 *a)* $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$ *mit* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$; $\quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^\mathbf{n} \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{n} x_k a_k; \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n;\ \mathbf{a}\ \textit{fest}$$

b) $\mathbb{H} = \mathbf{l}_2$ *mit* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k$; $\quad \mathbf{f} : \mathbf{l_2} \to \mathbb{C}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{b}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{b}_k; \quad \mathbf{b} = \{b_1, b_2, ...\};\ \mathbf{b}\ \textit{fest}$$

c) $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2[a,b]$ *mit* $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int_a^b \mathbf{x}(t)\overline{\mathbf{y}(t)}dt$; $\quad \mathbf{f} : \mathbf{L_2[a,b]} \to \mathbb{C}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \int_a^b \mathbf{x}(t)\overline{\mathbf{g}_0(t)}dt; \quad \mathbf{g}_0(t) \in \mathbb{L}_2[a,b]; \ \mathbf{g}_0(t) \ \textit{fest}$$

Bemerkung 3.17 *In den Räumen* $\mathbb{L}_p$ *bzw.* $\mathbf{l}_p$ *mit* $p \neq 2$ *ist die allgemeine Gestalt stetiger linearer Funktionale ebenfalls durch* $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x},\mathbf{u})$ *gegeben, wobei* $\mathbf{u} \in \mathbb{L}_q$ *(bzw.* $\mathbf{l}_q$*) und* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $\quad 1 < p < \infty$ *gilt. Zum Beweis der Beschränktheit der Funktionale benötigt man die Höldersche Ungleichung:*

$$\mathbf{l}_p \quad : \quad \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

$$\mathbb{L}_p \quad : \quad \left|\int_a^b \mathbf{fg}dx\right| \leq \left(\int_a^b |\mathbf{f}|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |\mathbf{g}|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Definition 3.20 *Sei* $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *eine Folge von Elementen des Hilbertraumes* $\mathbb{H}$. $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *heißt schwach konvergent gegen* $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$*, wenn für jedes stetige lineare Funktional* $\mathbf{f}$ *auf* $\mathbb{H}$ *gilt:*
$\lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$; $\quad$ *Schreibweise:* $\mathbf{x}_n \rightharpoonup \mathbf{x}$

Bemerkung 3.18 *Normkonvergente Folgen* $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{H}$ *werden als stark konvergent bezeichnet (* $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \overset{n\to\infty}{\to} 0$*).*

Satz 3.17 *Aus der starken Konvergenz folgt die schwache.*

Beweis.

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\mathbf{x})| = |\mathbf{f}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x})| \leq \|\mathbf{f}\| \, \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

■

Bemerkung 3.19 *Die Umkehrung gilt nicht.*

Beispiel 3.20 $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2[0,\pi]$ *mit* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \int_0^{\pi} \mathbf{x}(t)\overline{\mathbf{y}(t)}dt$; $\quad \mathbf{y} \in \mathbf{L_2[a,b]}$; $\mathbf{y}$ *sei fest und reell..*
Wir betrachten dann die Folge $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n(t) = \sin(nt)$; $\quad n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \int_0^{\pi} \sin(nt)\overline{\mathbf{y}(t)}dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\mathbf{f}(\mathbf{x}_n)$ *sind die Fourierkoeffizienten von* $y(t)$ *ohne konstante Faktoren. Damit ergibt sich*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \int_0^{\pi} 0 \cdot \overline{\mathbf{y}(t)}dt = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{L}_2[0,\pi]$$

Andererseits erhalten wir

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{0}\|^2 = \int_0^{\pi} (\sin(nt) - \mathbf{0})^2 dt = \frac{\pi}{2} : \quad \textit{Widerspruch!}$$

$\Longrightarrow \{\mathbf{x}_n\}$ *konvergiert schwach gegen* $\mathbf{0}$*, aber nicht stark.*

3.5.4 Bilinearformen

Definition 3.21 *Im Hilbertraum* $\mathbb{H}$ *über dem Körper* $\mathbb{K}$ *heißt der Operator* $\mathbf{a}$ *mit* $\mathbf{a} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ *Bilinearform, wenn gilt:*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \alpha\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta\mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \\ \mathbf{a}(\mathbf{w}, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) &= \alpha\mathbf{a}(\mathbf{w}, \mathbf{u}) + \beta\mathbf{a}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad \forall\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{H},\ \forall\alpha, \beta \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Definition 3.22 *Die Bilinearform* $\mathbf{a} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ *heißt:*

- ***beschränkt****, wenn* $\exists\ C > 0;\ C \in \mathbb{R} \quad | \quad |\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \quad \forall\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{H}$
- ***symmetrisch****, wenn gilt* $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad \forall\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{H}$
- ***positiv****, wenn gilt:* $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 \quad \forall\mathbf{u} \in \mathbb{H}$
- ***streng positiv****, wenn gilt:* $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq C\,\|\mathbf{u}\|^2 \quad \forall\mathbf{u} \in \mathbb{H}\ \wedge\ C > 0,\ C = const.$

Beispiel 3.21 $\mathbb{H} = \mathbb{R}^n$ *mit* $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k; \quad \mathbf{a}(.,.) : \mathbb{R}^\mathbf{n} \times \mathbb{R}^\mathbf{n} \to \mathbb{R}$

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_j v_i; \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$$

A ist symmetrisch (positive definit) genau dann, wenn die Matrix A symmetrisch (positive definit) ist.

4 Variationsprinzipien

Aus der klassischen Analysis ist die Lösung von Extremwertaufgaben bekannt: Gegeben ist eine reellwertige Funktion $f(x)$, gesucht sind die reellen Zahlen x_0, für die $f(x)$ bezüglich einer Umgebung von x_0 extreme Werte (Minima, Maxima) annimmt.
Gelöst wird diese Aufgabe, indem zunächst die extremwertverdächtigen Punkte aus der **notwendigen Bedingung** $f'(x_0) = 0$ ermittelt werden. Aus den Werten $f''(x_0)$ ist dann zu entscheiden ob ein Extremum vorliegt - **hinreichende Bedingung**.
Diese Vorgehensweise läßt sich weitestgehend auf die Lösung von Extremwertaufgaben in allgemeinenFunktionenräumen $\mathbb{X}$ übertragen: Gegeben ist ein Funktional
$\mathbf{f}(\mathbf{u}) : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, gesucht sind Funktionen $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{X}$, für die $\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)$ bezüglich einer Umgebung von $\mathbf{u}_0$ extreme Werte annimmt.
Zur Lösung dieser Aufgabe wird der Begriff der Ableitung f', $f'', ...$ einer Funktion $f(x)$ durch Einführung der Variation $\delta\mathbf{f}$, $\delta^2\mathbf{f}, ...$ und der GÂTEAUX-Ableitung $\mathbf{f}'$ eines Funktionals $\mathbf{f}$ verallgemeinert. In Extrempunkten $\mathbf{u}_0$ von $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ muss die notwendige Bedingung $\mathbf{f}'(\mathbf{u}_0) = 0$ (EULER-Gleichung) erfüllt sein.
Hinreichende Bedingungen für ein Extremum sind im allgemeinen Fall weitaus komplizierter.

4.1 Variation und Ableitungen von Funktionalen

$\mathbf{f} : \mathbf{U}(\mathbf{u}_0) \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ sei ein Funktional, das in der Umgebung $U(\mathbf{u}_0)$ des Punktes $\mathbf{u}_0$ definiert ist. $\mathbb{X}$ sei ein normierter Raum zum Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Für jedes $\mathbf{h} \in \mathbb{X}$ ist dann $\varphi(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{h})$ eine reellwertige Funktion des Parameters $t \in \mathbb{R}$.

Definition 4.1 $\delta\mathbf{f}(\mathbf{u}_0, \mathbf{h}) \equiv \varphi'(0)$ *heißt* ***erste Variation*** *von* $\mathbf{f}$ *im Punkt* $\mathbf{u}_0$ *in Richtung* $\mathbf{h}$. *Die* ***n-te Variation*** $\delta^n\mathbf{f}(\mathbf{u}_0, \mathbf{h})$ *des Funktionals* $\mathbf{f}$ *im Punkt* $\mathbf{u}_0$ *und in Richtung* $\mathbf{h}$ *ist gleich der n-ten Ableitung von* $\varphi(t)$ *für* $t = 0$ *:*

$$\delta^n\mathbf{f}(\mathbf{u}_0, \mathbf{h}) \equiv \varphi^{(n)}(0) \qquad n = 1, 2, ...$$

Definition 4.2 $\mathbf{f}$ *besitzt im Punkt* $\mathbf{u}_0$ *eine* ***GÂTEAUX-Ableitung*** $\mathbf{f}'(\mathbf{u}_0)$, *wenn die erste Variation* $\delta\mathbf{f}(\mathbf{u}_0, \mathbf{h})$ *für alle* $\mathbf{h} \in \mathbb{X}$ *existiert und das Funktional*

$$\mathbf{f}'(\mathbf{u}_0)(\cdot) : \mathbb{X} \to \mathbb{R} \qquad \textit{gemäß} \quad \mathbf{f}'(\mathbf{u}_0)(\mathbf{h}) = \delta\mathbf{f}(\mathbf{u}_0, \mathbf{h}) \quad \textit{für} \ \ \forall\ \mathbf{h} \in \mathbb{X}$$

linear und stetig ist.

Definition 4.3 *Die GÂTEAUX-Ableitung* $\mathbf{f}'(\mathbf{u}_0)$ *heißt* ***FRÉCHET-Ableitung,*** *wenn gilt:*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{u}_0+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{u}_0) &= \mathbf{f}'(\mathbf{u}_0)(\mathbf{h})+\|\mathbf{h}\|\, e(\mathbf{h}) \\ \textit{mit} \quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} e(\mathbf{h}) &= 0 \quad \textit{für} \quad \forall\ \mathbf{h}\in\mathbb{X}. \end{aligned}$$

Beispiel 4.1 $\mathbb{X}=\mathbb{R}$, $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ *sei eine stetig differenzierbare Funktion;* $\mathbf{u}=\mathbf{x}\in(a,b)$

$$\mathbf{f}:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}.$$

1. ***Variation*** *von* $\mathbf{f}$*:*

$$\delta\mathbf{f}(\mathbf{u},\mathbf{h})=\frac{d}{dt}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}+t\mathbf{h})\big|_{t=0}=\frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}\mathbf{h}\equiv d\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

2. ***Variation*** *von* $\mathbf{f}$*:*

$$\delta^2\mathbf{f}(\mathbf{u},\mathbf{h})=\frac{d^2}{dt^2}\,\mathbf{f}(\mathbf{x}+t\mathbf{h})\big|_{t=0}=\frac{d^2\mathbf{f}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^2}\mathbf{h}^2$$

D.h. die ***GATEAUX-Ableitung*** *entspricht der gewöhnlichen Ableitung* $\dfrac{d}{d\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})$.
FRÉCHET-Ableitung *existiert, wenn* $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ *zweimal stetig differenzierbar ist. Aus der TAYLOR-Reihenentwicklung für* $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ *an der Stelle* $\mathbf{u}=\mathbf{x}$ *bis zum zweiten Glied folgt dann*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{u}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{u}) &= \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}\mathbf{h}+\frac{d^2\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi})}{d\mathbf{x}^2}\frac{\mathbf{h}^2}{2}=\frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}\mathbf{h}+e(\mathbf{h})\,\mathbf{h} \\ \textit{mit} \quad |e(\mathbf{h})| &\to 0 \quad \textit{bei} \quad \mathbf{h}\to 0. \end{aligned}$$

Beispiel 4.2 $\mathbb{X}=\mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}=\overrightarrow{\mathbf{x}}=(x_1,x_2,...,x_n)^T$, $\mathbf{f}(\mathbf{u})=\mathbf{f}(x_1,...,x_n)$ *sei eine stetig differenzierbare skalare Funktion*

$$\mathbf{f}:\mathbf{M}\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}.$$

1. ***Variation*** *von* $\mathbf{f}$ *entspricht der Richtungsableitung von* $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ *im Punkt* $\mathbf{u}=\overrightarrow{\mathbf{x}}\in\mathbf{M}$ *in Richtung* $\mathbf{h}=\overrightarrow{\mathbf{h}}=(h_1,...,h_n)^T$, *sofern* $\mathbf{h}$ *normiert ist:*

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{f}(\mathbf{u},\mathbf{h}) &= \frac{d}{dt}\,\mathbf{f}(x_1+th_1,...,u_n+th_n)\big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{x}})}{\partial x_i}h_i\equiv grad\left(\mathbf{f}(\overrightarrow{\mathbf{x}})\right)\cdot\overrightarrow{\mathbf{h}}. \end{aligned}$$

2. Variation *von* $\mathbf{f}$:

$$\begin{aligned}\delta^2\mathbf{f}(\mathbf{u},\mathbf{h}) &= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{f}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}+t\overrightarrow{\mathbf{h}}\right)}{\partial x_i}h_i\Bigg|_{t=0}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\mathbf{f}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)}{\partial x_i\partial x_j}h_ih_j = \left(\mathbf{G}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\overrightarrow{\mathbf{h}},\overrightarrow{\mathbf{h}}\right)\end{aligned}$$

mit der Funktionalmatrix $\mathbf{G}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \left\{\dfrac{\partial^2\mathbf{f}\left(\overrightarrow{\mathbf{u}}\right)}{\partial x_i\partial x_j}\right\}$.

GATEAUX-Ableitung: $\mathbf{f}'(\mathbf{u}) = \mathbf{f}'\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = grad\left(\mathbf{f}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right)$

$$\mathbf{f}'(\mathbf{u})(\mathbf{h}) = \left(\mathbf{f}'\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right),\overrightarrow{\mathbf{h}}\right) = grad\left(\mathbf{f}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right)\cdot\overrightarrow{\mathbf{h}}$$

Damit gilt die Abschätzung

$$|\mathbf{f}'(\mathbf{u})(\mathbf{h})| \le \left\|grad\left(\mathbf{f}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right)\right\|\left\|\overrightarrow{\mathbf{h}}\right\|.$$

Die GATEAUX-Ableitung im Punkt $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *existiert, wenn* $\mathbf{f}$ *in einer Umgebung von* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *stetig differenzierbar ist.*

FRÉCHET-Ableitung: *Aus der TAYLOR-Entwicklung von* $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ *folgt:*

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{u}+\mathbf{h})-\mathbf{f}(\mathbf{u}) &= grad\left(\mathbf{f}\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right)\right)\cdot\overrightarrow{\mathbf{h}}+\frac{1}{2}\left(\mathbf{G}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\xi}}\right)\overrightarrow{\mathbf{h}},\overrightarrow{\mathbf{h}}\right)\\ &= \mathbf{f}'(\mathbf{u})(\mathbf{h})+\|\mathbf{h}\|\,e(\mathbf{h})\end{aligned}$$

mit

$$|e(\mathbf{h})| = \frac{1}{2\left\|\overrightarrow{\mathbf{h}}\right\|}\left|\left(\mathbf{G}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\xi}}\right)\overrightarrow{\mathbf{h}},\overrightarrow{\mathbf{h}}\right)\right| \le \frac{1}{2}\left\|\mathbf{G}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{\xi}}\right)\right\|\left\|\overrightarrow{\mathbf{h}}\right\| \to 0 \;\; \textit{für} \;\; \left\|\overrightarrow{\mathbf{h}}\right\| \to 0$$

Die FRÉCHET-Ableitung im Punkt $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *existiert, wenn* $\mathbf{f}$ *in einer Umgebung von* $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ *zweimal stetig differenzierbar ist.*

Beispiel 4.3 $\mathbb{X}$=$\mathbb{H}$ *sei ein Hilbertraum und*

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{u}) - (\mathbf{b},\mathbf{u})$$

ein ***quadratisches Funktional*** $\mathbf{f}:\mathbb{H}\to\mathbb{R}$ *mit der* ***symmetrischen beschränkten Bilinearform*** $\mathbf{a}(\cdot,\cdot)$

$$|\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{v})| \le C\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \qquad \forall\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{H}$$

*und dem **linearen Funktional** $(\mathbf{b},\mathbf{u})$ mit $\mathbf{b}\in\mathbb{H}$ fest gewählt.*
Wir setzen nun

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{u}+t\mathbf{h}) = \frac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{u}+t\mathbf{h},\mathbf{u}+t\mathbf{h}) - (\mathbf{b},\mathbf{u}+t\mathbf{h}) \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{u},t\mathbf{h}) + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t\mathbf{h},\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t\mathbf{h},t\mathbf{h}) - (\mathbf{b},\mathbf{u}) - (\mathbf{b},t\mathbf{h}) \\
&= \frac{t^2}{2}\mathbf{a}(\mathbf{h},\mathbf{h}) + t\left[\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{h}) - (\mathbf{b},\mathbf{h})\right] + \mathbf{f}(\mathbf{u})
\end{aligned}$$

***1. Variation** von* $\mathbf{f}$:

$$\delta\mathbf{f}(\mathbf{u},\mathbf{h}) = \varphi'(0) = \mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{h}) - (\mathbf{b},\mathbf{h})$$

***2. Variation** von* $\mathbf{f}$:

$$\delta^2\mathbf{f}(\mathbf{u},\mathbf{h}) = \varphi''(0) = \mathbf{a}(\mathbf{h},\mathbf{h})$$

GATEAUX-Ableitung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}'(\mathbf{u})(\mathbf{h}) &= \mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{h}) - (\mathbf{b},\mathbf{h}) \qquad \textit{und} \\
|\mathbf{f}'(\mathbf{u})(\mathbf{h})| &\leq (C\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{b}\|)\|\mathbf{h}\|
\end{aligned}$$

Existiert ein linearer Operator $\mathbf{A}:\mathbb{H}\rightarrow\mathbb{H}$ *mit*

$$(\mathbf{A}\mathbf{u},\mathbf{h}) = \mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{h}) \quad \forall\ \mathbf{h}\in\mathbb{H},$$

*so ist die **GATEAUX-Ableitung*** $\mathbf{f}'(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{b}$.
*Die **FRÉCHET-Ableitung** existiert, denn es gilt*

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{u}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}) &= \mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{h}) - (\mathbf{b},\mathbf{h}) + \frac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{h},\mathbf{h}) \\
&= \mathbf{f}'(\mathbf{u})(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\, e(\mathbf{h})
\end{aligned}$$

mit

$$|e(\mathbf{h})| = \frac{1}{2\|\mathbf{h}\|}|\mathbf{a}(\mathbf{h},\mathbf{h})| \leq \frac{1}{2}C\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0 \quad \textit{für} \quad \|\mathbf{h}\| \rightarrow 0.$$

Beispiel 4.4 *Eindimensionale klassische Variationsprobleme gehen oft von einem Funktional der Form*

$$\mathbf{f}:\mathbb{X}\rightarrow\mathbb{R} \quad \textit{mit} \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \int_a^b F(x,\mathbf{u}(x),\mathbf{u}'(x))\ dx$$

*mit der sogenannten **LAGRANGE-Funktion***

$$F = F(x,\mathbf{u}(x),\mathbf{u}'(x)); \qquad F:[a,b]\times\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R} \quad \textit{für} \quad \forall\ \mathbf{u}(x)\in\mathbb{X} = \mathbf{C}^1(a,b).$$

aus. F sei bezüglich aller Argumente zweimal stetig differenzierbar. weiter gelte $\mathbf{u}(a) = u_a$ *und* $\mathbf{u}(b) = u_b$

Nun bilden wir die erste Variation von $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ *mit* $\mathbf{h} \in \overset{o}{\mathbf{C}}{}^1(a,b)$ *(Gleichmäßige Konvergenz!)*

$$\varphi(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{h}) = \int_a^b F(x, \mathbf{u}_0(x) + t\mathbf{h}(x), \mathbf{u}_0'(x) + t\mathbf{h}'(x))\ dx,$$

$\curvearrowright$

$$\left.\varphi'(t)\right|_{t=0} = \int_a^b \left[F_{u'}(x, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0')\, \mathbf{h}'(x) + F_u(x, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0')\, \mathbf{h}(x)\right]\ dx.$$

Wegen $\mathbf{h}(a) = \mathbf{h}(b) = 0$ *erhält man nach partieller Integration*

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{f}(\mathbf{u}_0, \mathbf{h}) &= \left.\varphi'(t)\right|_{t=0} \\ &= \int_a^b \left[-\frac{d}{dx} F_{u'}(x, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0') + F_u(x, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0')\right] \mathbf{h}(x)\ dx. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt, da F zweimal stetig differenzierbar ist

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{u}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_0) &= \int_a^b \left[F(x, \mathbf{u}_0(x) + \mathbf{h}(x), \mathbf{u}_0'(x) + \mathbf{h}'(x)) - F(x, \mathbf{u}_0(x), \mathbf{u}_0'(x))\right]\ dx \\ &= \int_a^b \left[F_u(x, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0')\, \mathbf{h}(x) + F_{u'}(x, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0')\, \mathbf{h}'(x) + \mathbf{h}e(\mathbf{h})\right]\ dx \\ \text{mit} \quad \|e(\mathbf{h})\| &\to 0 \quad \text{bei} \quad \mathbf{h} \to 0. \text{Partielle Integration ergibt wieder} \\ &= \int_a^b \left[F_u(x, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0') - \frac{d}{dx} F_{u'}(x, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0')\right] \mathbf{h}\ dx + \int_a^b \mathbf{h}e(\mathbf{h})\ dx, \end{aligned}$$

wobei das 2. Integral mit $\mathbf{h} \to 0$ *gegen Null strebt. Daraus folgt: Es existiert die FRÉCHET-Ableitung*

$$\mathbf{f}'(\mathbf{u}_0) = F_u(x, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0') - \frac{d}{dx} F_{u'}(x, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0')$$

4.2 Extrema und Variationsprobleme

Wir betrachten nun Funktionale $\mathbf{f}$ auf dem Banachraum $\mathbb{X} = \mathbb{B}$ (Hilbertraum $\mathbb{X} = \mathbb{H}$) und suchen deren Extrema.

Satz 4.1 ***Notwendige Bedingung für ein Extremum:***
Hat $\mathbf{f}:\mathbf{D}\subset\mathbb{X}\to\mathbb{R}$, $\mathbf{D}$ *offen, in* $\mathbf{u}_0\in\overset{o}{\mathbf{D}}$ *eine lokale Extremstelle, so gilt*

$$\delta\mathbf{f}\left(\mathbf{u}_0;\mathbf{h}\right)=0\qquad\forall\ \mathbf{h}\in\mathbb{X}.\qquad\qquad(*)$$

Definition 4.4 *Punkte* $\mathbf{u}_0\in\overset{o}{\mathbf{D}}$, *an denen die Bedingung* $(*)$ *erfüllt ist, heißen* ***stationäre Punkte von*** $\mathbf{f}$. *Stationäre Punkte, die keine Extremalpunkte sind, heißen Sattelpunkte.*

Definition 4.5 *Das Variationsproblem auf* $\mathbb{X}$ *lautet: Gesucht sind die stationären Punkte von* $\mathbf{f}$

Existiert die FRECHET-Ableitung $\mathbf{f}'(\mathbf{u}_0)$, so kann man folgenden Satz beweisen:

Satz 4.2 *Ist* $\mathbf{f}:\mathbf{D}\subset\mathbb{X}\to\mathbb{R}$, *ein FRECHET-differenzierbares Funktional und ist* $\mathbf{u}_0\in\overset{o}{\mathbf{D}}$ *eine lokale Extremstelle von* $\mathbf{f}$, *so gilt die* ***EULER-Gleichung:***

$$\mathbf{f}'\left(\mathbf{u}_0\right)=0.$$

Beweis: *o.B.d.A. sei ein* $\mathbf{u}_0\in\overset{o}{\mathbf{D}}$ *(lokales) Minimum von* $\mathbf{f}$

$$\curvearrowright\mathbf{f}\left(\mathbf{u}\right)\geq\mathbf{f}\left(\mathbf{u}_0\right)\quad\forall\mathbf{u}\in U(\mathbf{u}_0)$$

Es sei nun

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+t\mathbf{h};\quad t>0;\quad\mathbf{h}\in\mathbb{X};\quad\|\mathbf{h}\|=1$$

da die FRECHET-Ableitung existiert gilt

$$\mathbf{f}\left(\mathbf{u}_0+t\mathbf{h}\right)=\mathbf{f}\left(\mathbf{u}_0\right)+\mathbf{f}'\left(\mathbf{u}_0\right)\left(t\mathbf{h}\right)+\|t\mathbf{h}\|\,e\left(t\mathbf{h}\right)\qquad mit\qquad\lim_{\mathbf{t}\to\mathbf{0}}e\left(t\mathbf{h}\right)=0$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}0\ &\leq\ \frac{\mathbf{f}\left(\mathbf{u}_0+t\mathbf{h}\right)-\mathbf{f}\left(\mathbf{u}_0\right)}{t}=\mathbf{f}'\left(\mathbf{u}_0\right)\left(\mathbf{h}\right)+\|\mathbf{h}\|\,e\left(t\mathbf{h}\right)=\mathbf{f}'\left(\mathbf{u}_0\right)\left(\mathbf{h}\right)+e\left(t\mathbf{h}\right)\\0\ &\leq\ \mathbf{f}'\left(\mathbf{u}_0\right)\left(\mathbf{h}\right)\quad\forall\mathbf{h}\in\mathbb{X}\ mit\ \|\mathbf{h}\|=1,\ da\ \lim_{\mathbf{t}\to\mathbf{0}}e\left(t\mathbf{h}\right)=0\end{aligned}$$

Benutzen wir nun an Stelle von $\mathbf{h}$ *das Element* -$\mathbf{h}$ *, so gilt:*

$$0\leq\mathbf{f}'\left(\mathbf{u}_0\right)\left(-\mathbf{h}\right)=-\mathbf{f}'\left(\mathbf{u}_0\right)\left(\mathbf{h}\right),$$

woraus folgt

$$\mathbf{f}'\left(\mathbf{u}_0\right)\left(\mathbf{h}\right)=0\quad\forall\mathbf{h}\in\mathbb{X};\quad\|\mathbf{h}\|=1.$$

Beliebige Elemente aus $\mathbb{X}$ *können als* $\lambda\mathbf{h}$ *mit* $\lambda\in\mathbb{R}$ *dargestellt werden.*$\curvearrowright$

$$\mathbf{f}'\left(\mathbf{u}_0\right)\left(\mathbf{h}\right)=0\quad\forall\mathbf{h}\in\mathbb{X}$$

Beispiel 4.5 *In den oben besprochenen Beispielen lauten die entsprechenden Variationsprobleme:*
Beispiel 4.1: Die EULER-Gleichung: $\frac{d}{d\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$ *entspricht der notwendigen Bedingung für ein Extremum von* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.
Beispiel 4.2: $\mathbf{u}_0$ *ist ein stationärer Punkt von* $\mathbf{f}$, *wenn die EULER-Gleichung*

$$grad\,(\mathbf{f}(\mathbf{u}_0)) = 0$$

erfüllt ist (notwendige Bedingung für ein Extremum).
Beispiel 4.3: $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{H}$ *ist ein stationärer Punkt von* $\mathbf{f}$, *wenn die EULER-Gleichung*

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_0 - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

erfüllt ist.

Im Beispiel 4.4 liegt jedoch für das Extremalproblem kein Raum $\mathbb{X}$ oder Unterraum von $\mathbb{X}$ zu Grunde, sondern eine Mannigfaltigkeit aus einem Banachraum.

4.3 Variationsprobleme mit Nebenbedingungen

Es sei $\mathbb{X} = \mathbb{B}$ ein Banachraum (bzw. $\mathbb{X} = \mathbb{H}$ ein Hilbertraum), $\mathbb{V}$ ein Unterraum von $\mathbb{X}$, $\mathbf{f}\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ ein Funktional, $\mathbf{u}^* \in \mathbb{X}$. Dann bezeichnet

$$\mathbb{M} = \mathbf{u}^* + \mathbb{V} := \{\mathbf{u}^* + \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathbb{V}\}$$

eine lineare Mannigfaltigkeit. Wir betrachten nun die Einschränkung $\mathbf{f}|_{\mathbf{M}}$ und suchen deren Extremstellen, d.h. Extremstellen $\mathbf{u_0}$ von $\mathbf{f}$ unter der Nebenbedingung $\mathbf{u_0} \in \mathbb{M}$. Das Funktional $\mathbf{f}$ sei FRÉCHET-differenzierbar.

Satz 4.3 ***Definition 4.6*** *Punkte* $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{M}$ *mit* $\mathbf{f}'[\mathbf{u}_0] = 0 \qquad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{V}$ *heißen stationäre Punkte von* $\mathbf{f}$ *unter der Nebenbedingung* $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{M}$.

Definition 4.7 *Variationsproblem auf einer Mannigfaltigkeit:*
Gesucht sind die stationären Punkte $\mathbf{u}_0$ *von* $\mathbf{f}$ *mit der Nebenbedingung* $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{M}$.

Satz 4.4 *Es sei* $\mathbf{f} : \mathbf{D} \subset \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, *ein FRÉCHET-differenzierbares Funktional,* $\mathbb{V}$ *ein Unterraum von* $\mathbb{X}$, $\mathbf{u}^*$ *ein beliebiger fester Punkt aus* $\mathbb{X}$ *und* $\mathbb{M} = \mathbf{u}^* + \mathbb{V}$ *eine lineare Mannigfaltigkeit aus* $\mathbb{X}$. *Hat die Einschränkung* $\mathbf{f}|_{\mathbb{M}}$ *in* $\mathbf{u}_0$ *ein Extremum, so gilt dort die EULER-Gleichung*

$$\mathbf{f}'(\mathbf{u}_0) = 0.$$

Beweis. Wir definieren das Funktional

$$\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}^* + \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}.$$

das $\mathbb{V}$ in $\mathbb{R}$ abbildet. Für $\mathbf{v}, \mathbf{h} \in \mathbb{V}$ gilt wegen der Fréchet-Differenzierbarkeit von $\mathbf{f}$:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{v}+\mathbf{h}) &= \mathbf{f}(\mathbf{u}^* + \mathbf{v} + \mathbf{h}) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{u}^* + \mathbf{v}) + \mathbf{f}'(\mathbf{u}^* + \mathbf{v})(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\| \, e(\mathbf{u}^* + \mathbf{v}, \mathbf{h}) \qquad \text{mit} \qquad \lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} e(\mathbf{u}^* + \mathbf{v}, \mathbf{h}) = 0 \end{aligned}$$

Mit $\widehat{e}(\mathbf{v}, \mathbf{h}) = e(\mathbf{u}^* + \mathbf{v}, \mathbf{h})$ gilt also

$$\widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{v}+\mathbf{h}) = \widehat{\mathbf{f}}(\mathbf{v}) + \mathbf{f}'(\mathbf{u}^* + \mathbf{v})(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\| \, \widehat{e}(\mathbf{v}, \mathbf{h}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$$

und damit

$$\mathbf{f}'(\mathbf{u}^* + \mathbf{v})(\mathbf{h}) = \widehat{\mathbf{f}}'(\mathbf{v})(\mathbf{h})$$

Nach Satz von oben gilt aber für jede Extremale $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{V}$ von $\widehat{\mathbf{f}}$ die Gleichung $\widehat{\mathbf{f}}'(\mathbf{v}_0)(\mathbf{h}) = 0$, d.h. $\mathbf{f}'(\mathbf{u}^* + \mathbf{v}_0)(\mathbf{h}) = 0 \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{V}$
Mit

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}^* + \mathbf{v}_0$$

folgt die Behauptung $\mathbf{f}'(\mathbf{u}_0) = 0$. ■

Beispiel 4.6 *Aus der Bedingung im Beispiel 4.4*

$$\begin{aligned} \delta F(\mathbf{u}_0, \mathbf{h}) &= 0 \\ &= \int_a^b \left[-\frac{d}{dx} F_{u'}(x, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0') + F_u(x, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0') \right] \mathbf{h}(x) \; dx. \end{aligned}$$

für alle zulässigen $\mathbf{h} \in \overset{o}{\mathbf{C}}{}^1(a,b)$ *folgt für einen stationären Punkt von* $\mathbf{f}$ *die EULER-Gleichung*

$$\frac{d}{dx}\left(F_{\mathbf{u}'}(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}')\right) = F_{\mathbf{u}}(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}') \qquad (EG)_1$$

bzw. in der voll ausdifferenzierten Form:

$$F_{\mathbf{u}} - F_{\mathbf{u}'x} - F_{\mathbf{u}\mathbf{u}'}\mathbf{u}' - F_{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}\mathbf{u}'' = 0 \qquad (EG)_2 \, .$$

Die EULER-Gleichung ist in diesem Fall eine i.Allg. nichtlineare ***gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung*** *für die Funktion* $\mathbf{u}(x)$ *(mit Randwerten).*

Beispiel 4.7 *Gesucht ist der kürzeste Weg zwischen den Punkten $P_0\,(x_0, y_0)$ und $P_1\,(x_1, y_1)$ (mit $x_0 \neq x_1$) in der Ebene. Mit $u = u\,(x)$ wird die Funktion der Verbindungskurve zwischen den Punkten P_0 und P_1 bezeichnet. Für die Länge $\mathbf{f}\,(u)$ dieser Verbindungskurve erhält man:*

$$\mathbf{f}\,(\mathbf{u}) = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (\mathbf{u}'\,(x))^2}\,dx$$

mit der LAGRANGE-Funktion

$$F = F\,(\mathbf{u}') = \sqrt{1 + (\mathbf{u}'\,(x))^2}.$$

Mit

$$F_{\mathbf{u}} = 0 \qquad \textit{und} \qquad F_{\mathbf{u}'} = \frac{\mathbf{u}'}{\sqrt{1 + (\mathbf{u}'\,(x))^2}}$$

ergibt sich die EULER-Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathbf{u}'}{\sqrt{1 + (\mathbf{u}'\,(x))^2}}\right) = 0$$

$\curvearrowright$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{u}'}{\sqrt{1 + (\mathbf{u}'\,(x))^2}} &= C \\
(\mathbf{u}')^2 &= C\left(1 + (\mathbf{u}')^2\right) \\
(\mathbf{u}')^2\left(1 - C^2\right) &= C^2 \\
\mathbf{u}'\,(x) &= \pm\sqrt{\frac{C^2}{1 - C^2}} \equiv a = const.
\end{aligned}$$

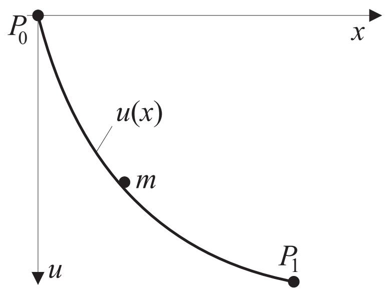
Damit erhält man, wie zu erwarten war, als kürzeste Verbindungskurve die Gerade

$$\mathbf{u}\,(x) = ax + b.$$

Die Gerade muss durch die zwei Punkte $P_0\,(x_0, y_0)$ und $P_1\,(x_1, y_1)$ mit $x_0 \neq x_1$ verlaufen.
Anpassung der Randbedingungen:

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{u}\,(x_0) = ax_0 + b = y_0 & \Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{u}\,(x_1) = ax_1 + b = y_1 & \\
 & \Rightarrow a = \dfrac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \qquad b = \dfrac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1}.
\end{array}$$

Beispiel 4.8 ***Brachistochronen - Problem***
In der Ebene ist die Bahnkurve von $P_0\,(0,0)$ nach $P_1\,(a,b)$ (mit $a \neq 0$, $b < 0$) gesucht, die ein Massenpunkt m reibungsfrei unter der Einwirkung der Schwerkraft g in minimaler Zeit durchläuft.



$\mathbf{u} = \mathbf{u}\,(x)$	*Funktion der Bahnkurve von P_0 nach P_1*
$s = s\,(x)$	*Parameter der Bogenlänge der Kurve von P_0 nach P_1 mit $s\,(0) = 0$ und* $ds = \sqrt{1 + (u')^2}dx$

Aus der Energieerhaltung $\frac{1}{2}mv^2 - mgu = 0$ folgt für die Geschwindigkeit v des Massepunktes

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g\mathbf{u}}$$

Daraus erhält man

$$\mathbf{f}\,(\mathbf{u}) = \int_0^T dt = \int_0^L \frac{1}{v} ds = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + (\mathbf{u}')^2}{2g\mathbf{u}}} dx$$

mit der Lagrangefunktion

$$F = F\,(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \sqrt{\frac{1 + (\mathbf{u}')^2}{2g\mathbf{u}}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1 + (\mathbf{u}')^2}{\mathbf{u}}}$$

Variationsproblem:
Gesucht ist $\mathbf{u}\,(x) \in \mathbf{C}^1\,(0,a)$ mit $\mathbf{f}\,(\mathbf{u}) \rightarrow \min$, $\quad \mathbf{u}\,(0) = 0$ und $\mathbf{u}\,(a) = b$.
Da die Lagrangefunktion nur von $\mathbf{u}$ und $\mathbf{u}'$ abhängt, gilt für die Eulergleichung (EG2) in der ausdifferenzierten Form:

$$\begin{aligned} 0 &= F_u - F_{\mathbf{u}\mathbf{u}'}\mathbf{u}' - F_{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}\mathbf{u}'' \\ &= \mathbf{u}'\left(F_u - F_{\mathbf{u}\mathbf{u}'}\mathbf{u}' - F_{\mathbf{u}'\mathbf{u}'}\mathbf{u}''\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(F - \mathbf{u}'F_{\mathbf{u}'}\right) \end{aligned}$$

Damit besitzt die Eulergleichung die Zwischenlösung

$$F - u'F_{u'} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\left[\sqrt{\frac{1 + (\mathbf{u}')^2}{\mathbf{u}}} - \frac{(\mathbf{u}')^2}{\sqrt{\mathbf{u}\left(1 + (\mathbf{u}')^2\right)}}\right] = \widetilde{C}$$

Multiplikation mit $\sqrt{2g}$ *und Erweitern ergibt*

$$\frac{1+(\mathbf{u}')^2-(\mathbf{u}')^2}{\sqrt{\mathbf{u}\left(1+(\mathbf{u}')^2\right)}}=C, \qquad \textit{mit } C=\sqrt{2g}\widetilde{C}$$

woraus die Differentialgleichung

$$\mathbf{u}\left(1+(\mathbf{u}')^2\right)=D \qquad \textit{mit } D=\frac{1}{C^2}\;.$$

entsteht.
Wir setzen nun $\mathbf{u}'=\cot t$. *Damit ergibt sich*

$$\mathbf{u}=\frac{D}{1+\cot^2 t}=D\sin^2 t=\frac{D}{2}\left(1-\cos 2t\right).$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} dx &= \frac{d\mathbf{u}}{\mathbf{u}'}=\frac{2D\sin t\cos t dt}{\cot t}=2D\sin^2 t dt \\ &= D\left(1-\cos 2t\right)dt \\ x &= D\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+E \\ &= \frac{D}{2}\left(2t-\sin 2t\right)+E. \end{aligned}$$

Anpassen der Randpunkte:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \qquad \curvearrowright \qquad E=0 \\ \mathbf{u}(0) &= 0=D\cdot 0 \end{aligned}$$

Somit muss D mit Hilfe des Endpunktes der Kurve bestimmt werden. Mit der Festlegung $\phi=2t$ *entsteht als Lösung dieses Problems eine Zykloidenschar, wobei gilt* $\frac{D}{2}=r$, *der Radius des abrollenden Kreises (*$\mathbf{u}$*-Achse zeigt nach unten!):*

$$\begin{aligned} x &= \frac{D}{2}\left(\phi-\sin\phi\right) \\ \mathbf{u} &= \frac{D}{2}\left(1-\cos\phi\right) \end{aligned}$$

4.4 Verallgemeinerungen

Gegeben sei die LAGRANGE-Funktion**:** $F : [a,b] \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} F &= F\left(x, \mathbf{u}(x), \mathbf{u}'(x), ..., \mathbf{u}^{(n)}(x)\right) \\ \text{für} \quad \forall\, \mathbf{u}(x) &\in \mathbf{X} = \mathbf{C}^n(a,b). \end{aligned}$$

F sei hinreichend oft **stetig differenzierbar** bezüglich aller Argumente.
Mit der LAGRANGE-Funktion wird folgendes Funktional gebildet:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \int_a^b F\left(x, \mathbf{u}(x), \mathbf{u}'(x), ..., \mathbf{u}^{(n)}(x)\right) dx$$

Definition 4.8 *Variationsproblem auf einer Mannigfaltigkeit*
Gesucht sind die stationären Punkte $\mathbf{u}(x) \in \mathbf{C}^n(a,b)$ *von* $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ *mit der Nebenbedingung* $\mathbf{u}^{(k)}(a) = \alpha_k$ *und* $\mathbf{u}^{(k)}(b) = \beta_k$; $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $\beta_k \in \mathbb{R}$ $\quad k = 0, 1, ..., n-1$

Satz 4.5 *Jede Lösung* $\mathbf{u}_0(x)$ *des obigen Variationsproblems ist auch eine Lösung der EULER-Gleichung*

$$F_u - \frac{d}{dx}F_{u'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{u''} \mp ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{u^{(n)}} = 0 \qquad (EG)_3$$

Beweis:
Bildet man die erste Variation von $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ mit $\mathbf{h} \in \overset{o}{\mathbf{C}^n}(a,b)$,
$\mathbf{h}^{(k)}(a) = \mathbf{h}^{(k)}(b) = 0 \quad k = 0, 1, ..., n-1$ und $t \in \mathbb{R}$, so ist:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{u}_0 + t\mathbf{h}) = \int_a^b F\left(x, \mathbf{u}_0 + t\mathbf{h}, \mathbf{u}_0' + t\mathbf{h}', ..., \mathbf{u}_0^{(n)} + t\mathbf{h}^{(n)}\right) dx \\ \varphi'(t)\big|_{t=0} &= \int_a^b \left[F_u \mathbf{h} + F_{u'}\mathbf{h}' + ... + F_{u^{(n)}}\mathbf{h}^{(n)}\right] dx \end{aligned}$$

Für $k = 1, ..., n$ und mit den jeweils k partiellen Integrationen

$$
\begin{aligned}
& \int_a^b \left(F_{u^{(k)}}\right) \mathbf{h}^{(k)} dx \\
= \; & \left[\left(F_{u^{(k)}}\right) \mathbf{h}^{(k-1)}\right]_a^b - \int_a^b \left(\frac{d}{dx} F_{u^{(k)}}\right) \mathbf{h}^{(k-1)} dx \\
= \; & \left[\left(F_{u^{(k)}}\right) \mathbf{h}^{(k-1)}\right]_a^b - \left[\left(\frac{d}{dx} F_{u^{(k)}}\right) \mathbf{h}^{(k-2)}\right]_a^b + \int_a^b \left(\frac{d^2}{dx^2} F_{u^{(k)}}\right) \mathbf{h}^{(k-2)} dx \\
= \; & ... \\
= \; & \left[\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \left(\frac{d^i}{dx^i} F_{u^{(k)}}\right) \mathbf{h}^{(k-1-i)}\right]_a^b + (-1)^k \int_a^b \left(\frac{d^k}{dx^k} F_{u^{(k)}}\right) \mathbf{h} \; dx
\end{aligned}
$$

erhält man unter Berücksichtigung von

$$
\left[\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \left(\frac{d^i}{dx^i} F_{u^{(k)}}\right) \mathbf{h}^{(k-1-i)}\right]_a^b = 0
$$

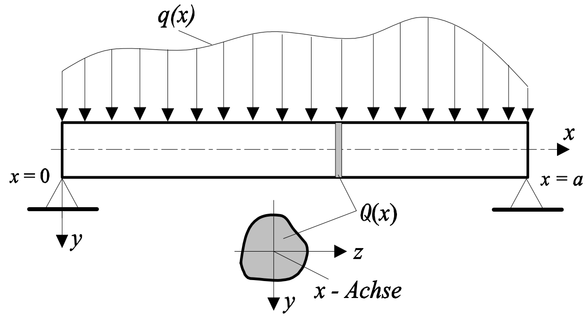
die EULER-Gleichung

$$
\begin{aligned}
\varphi'(t)\big|_{t=0} &= \int_a^b \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{d^k}{dx^k} F_{u^{(k)}}\right) \mathbf{h} \; dx \overset{!}{=} 0 \quad \forall \mathbf{h} \in \overset{o}{\mathbf{C}}{}^{n}(a,b), \; \mathbf{d.h.} \\
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\frac{d^k}{dx^k} F_{u^{(k)}}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

Beispiel 4.9 ***(Balkenbiegung):***

Gesucht:

Auslenkung $y(x)$ eines bei $x = 0$ und $x = a$ eingespannten Balkens mit der Streckenlast $q(x)$



Die Biegesteifigkeit des Balkens wird über das Produkt $E \cdot I(x)$ berechnet, wobei $I(x)$ das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche $Q(x)$ des Balkens und E der Elastizitätsmodul des verwendeten Materials ist.
Die Formänderungsarbeit $W(y)$, die durch die Steckenlast $q(x)$ verursacht wird, kann man wie folgt definieren:

$$W(y) = \int_0^a \left[\frac{1}{2} EI(x) \left(y''(x)\right)^2 + y(x)\, q(x) \right] dx$$

Durch die feste Einspannung am Rand, wobei der Balken mit dem Anstieg Null in diese hineinkommt, führt zu den Randbedingungen (Mannigfaltigkeit!):

$$y(0) = y'(0) = y(a) = y'(a) = 0$$

Die Auslenkung $y(x)$ erfüllt dann die Bedingung

$$W(y) \to \min .$$

Damit lautet die Lagrangefunktion

$$F = F(x, y, y'') = \frac{1}{2} EI(x) \left(y''(x)\right)^2 + y(x)\, q(x)$$

und folglich

$$\begin{aligned} F_y &= q(x)\,; \\ F_{y'} &= 0 \quad \textit{und folglich} \quad \frac{d}{dx} F_{y'} = 0 \\ F_{y''} &= EI(x)\ y''(x) \qquad \textit{und folglich} \quad \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = \left(EI(x)\ y''(x)\right)'' \end{aligned}$$

*Als EULER-Gleichung entsteht dann die **Differentialgleichung der Balkenbiegung***

$$\left(EI(x)\ y''(x)\right)'' + q(x) = 0.$$

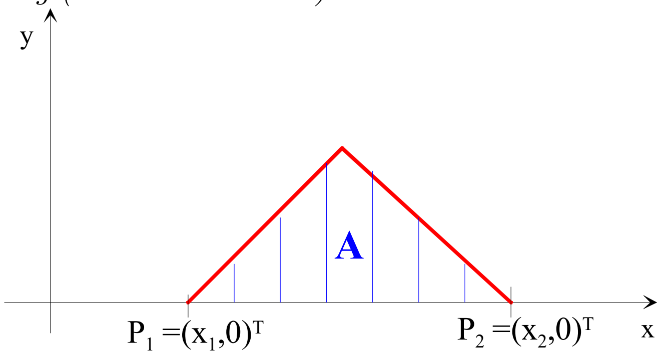
Eine zweite Möglichkeit der Verallgemeinerung besteht in der Hinzunahme anders gearteter Nebenbedingungen, wie z.B. beim Problem der Dido.

Beispiel 4.10 *Maximierung der Fläche zwischen einer gesuchten Funktion und der x-Achse bei vorgegebenem Umfang (Problem der Dido):*

$\int_{x_1}^{x_2} y(x)dx \to Maximum$

unter der Nebenbedingung

$\int_{x_1}^{x_2} ds = l \ (\geq x_2 - x_1)$



Die Lagrangefunktion hat in diesem Beispiel die Gestalt

$$F = F(x, y, y') = y.$$

Die Nebenbedingung kann als Funktional geschrieben werden, das eine zum zu minimierenden Funktional analoge Gestalt besitzt:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} ds &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} G(y')dx = l \\ \textit{mit } G &= G(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2} \end{aligned}$$

Zur Lösung dieses Problems wird die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren angewendet.
Wir definieren die Funktion

$$H(x, y, y') = F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y') \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nach dem Satz von EULER besteht eine Verbindung zwischen der Lösung des Ausgangsproblems und einer Variationsaufgabe mit $H(x, y, y')$ als Lagrangefunktion.

Satz 4.6 *Satz von EULER*
Ist $y_0(x)$ eine Extremale von $\int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx$ unter der Nebenbedingung

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y')dx = l, \quad y(x_1) = y_1 und y_2(x) = y_2$$

und ist $y_0(x)$ keine Extremale des Integrals der Nebenbedingung, so existiert eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, für die $y_0(x)$ Extremale von $\int_{x_1}^{x_2} H(x, y, y')dx$ ist.(Smirnow: Lehrgang der Höheren Mathematik IV, S. 183)

Damit lässt sich ein Dualitätsprinzip für diese Aufgabenklasse ableiten: Die Multiplikation von $\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$ mit einer Konstanten ändert die Extremale des Integrals nicht. Folglich kann der Term $H(x,y,y') = \lambda_1 F(x,y,y') + \lambda_2 G(x,y,y')$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ als symmetrisch in $F(x,y,y')$ und $G(x,y,y')$ betrachtet werden. Damit führen die beiden folgenden Probleme auf dieselben Extremalen:

1. Ermittlung der Extrema von $\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx$ unter der Nebenbedingung
$$\int_{x_1}^{x_2} G(x,y,y')dx = l = const$$
2. Ermittlung der Extrema von $\int_{x_1}^{x_2} G(x,y,y')dx$ unter der Nebenbedingung
$$\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx = c = const$$

Im Fall des Problems der Dido heißt das, dass die beiden Probleme

1. Gesucht ist die maximale Fläche, die von einem Rand der Länge l umgeben wird!
2. Gesucht ist der kürzeste Umfang, den eine gegebene Fläche der Größe c haben kann!

ein und dieselbe Lösung haben. Nun soll dieses Problem gelöst werden.

Beispiel 4.11 *Mit der Lagrangefunktion*
$$\begin{aligned} H(x,y,y') &= F(x,y,y') + \lambda G(x,y,y') \\ &= y + \lambda\sqrt{1+(y')^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
ergibt sich die Eulergleichung:
$$\begin{aligned} 0 &= H_y - \frac{d}{dx} H_{y'} \\ &= H_y - H_{y'y} y' - H_{y'y'} y''. \end{aligned}$$
Da $H = H(y,y')$ gilt, führt wie im Beispiel ? Multiplikation mit y' zu einer Zwischenlösung:
$$\begin{aligned} 0 &= y' H_y - H_{y'y} (y')^2 - H_{y'y'} y'' y' \\ &= \frac{d}{dx}(H - y' H_{y'}) \quad \curvearrowright \\ C &= H - y' H_{y'}; \quad C \in \mathbb{R} \\ &= y + \lambda\sqrt{1+(y')^2} - y'\lambda \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}. \end{aligned}$$

Umstellung dieser Gleichung nach y' ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{C-y}{\lambda} &= \sqrt{1+(y')^2} - \frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} \\
&= \frac{1+(y')^2-(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \qquad \curvearrowright \\
1+(y')^2 &= \left(\frac{\lambda}{C-y}\right)^2 \\
y' &= \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{\lambda^2-(C-y)^2}}{C-\lambda} \\
dx &= \pm\frac{C-\lambda}{\sqrt{\lambda^2-(C-y)^2}}dy
\end{aligned}$$

Integration mit der Substitution $t = \lambda^2 - (C-y)^2$ liefert die gesuchte Funktion $y(x)$:

$$\begin{aligned}
\pm\sqrt{\lambda^2-(C-y)^2} &= x-D; \quad D \in \mathbb{R} \\
(x-D)^2+(C-y)^2 &= \lambda^2
\end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt ein Kreissegment. Durch die Bedingungen $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2}dx = l, \quad y(x_1) = 0$ und $y_2(x) = 0$ können die Konstanten C, D und λ bestimmt werden. Das führt jedoch auf ein nichtlineares Gleichungssystem.

Beispiel 4.12 *Das HAMILTON-Prinzip*

Mit den gleichen mathematischen Mitteln kann man die Bewegungsgleichungen eines Massepunktsystems unter Bewegungseinschränkungen herleiten.
Gegeben sei ein System von n Punktmassen m_k mit den Koordinaten $x_k(t), y_k(t)$, und $z_k(t), \ k = 1, ..., n$. Die kinetische Energie des Systems beträgt dann

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\dot{x}_k^2(t) + \dot{y}_k^2(t) + \dot{z}_k^2(t)\right).$$

Die Koordinaten $x_k(t), y_k(t)$, und $z_k(t), \ k = 1, ..., n$ werden im Vektor $\overrightarrow{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^{3n}$ zusammengefasst.

Ist das vorliegende Kraftfeld ein Potentialfeld, so wird das vorliegende mechanische System konservativ genannt, und es kann die potentielle Energie $U = U\left(t, \overrightarrow{\mathbf{x}}(t)\right)$ des Systems bestimmt werden.
Die Differenz aus kinetischer Energie T und potentieller Energie U heißt
LAGRANGE-Funktion

$$\begin{aligned} F\left(t, \overrightarrow{\mathbf{x}}(t), \dot{\overrightarrow{\mathbf{x}}}(t)\right) &= T\left(t, \dot{\overrightarrow{\mathbf{x}}}(t)\right) - U\left(t, \overrightarrow{\mathbf{x}}(t)\right) \\ \text{mit} \qquad \dot{\overrightarrow{\mathbf{x}}}(t) &= \frac{d\overrightarrow{\mathbf{x}}}{dt}. \end{aligned}$$

Das Integral

$$W\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) = \int_{t_0}^{T_e} F\left(t, \overrightarrow{\mathbf{x}}(t), \dot{\overrightarrow{\mathbf{x}}}(t)\right) dt$$

wird **Wirkungsintegral** genannt, wobei t_0 die Anfangszeit und T_e die Endzeit des mechanischen Vorgangs ist.

HAMILTON-Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung):
In konservativen Systemen läuft der tatsächliche mechanische Vorgang mit extremaler Wirkung ab:

$$W\left(\overrightarrow{\mathbf{x}}\right) \text{ wird minimal.}$$

Aus der notwendigen Bedingung für ein Extremum von W folgen mit den EULER-Gleichungen die **Bewegungsgleichungen nach LAGRANGE im allgemeinen Fall:**

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = 0; \qquad i = 1, ..., 3n.$$

bzw. im Speziellen wegen $F = T - U = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(\dot{x}_k^2(t) + \dot{y}_k^2(t) + \dot{z}_k^2(t)\right) - U\left(t, \overrightarrow{\mathbf{x}}(t)\right)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_k} - m_k\ddot{x}_k &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y_k} - m_k\ddot{y}_k &= 0; \quad k = 1, .., n, \qquad\qquad (*) \\ \frac{\partial U}{\partial z_k} - m_k\ddot{z}_k &= 0. \end{aligned}$$

$(*)$ ist ein System von $3n$ Differentialgleichungen zur Berechnung der Bahnkurven $x_1(t), ..., z_n(t)$. Zur eindeutigen Lösbarkeit sind Anfangsbedingungen in Form von Anfangsorten $\overrightarrow{\mathbf{x}}(t_0) = \overrightarrow{\mathbf{x}}_0$ und Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{\overrightarrow{\mathbf{x}}}(t_0) = \overrightarrow{\mathbf{v}}_0$ erforderlich.

Liegen Bewegungseinschränkungen $\phi_s(x_k, y_k, z_k, t) = 0;\ s = 1, ..., m$ vor, so werden diese mit Lagrangeschen Multiplikatoren in die Lagrangefunktion eingearbeitet:

$$\widetilde{F}\left(t, \overrightarrow{\mathbf{x}}(t), \dot{\overrightarrow{\mathbf{x}}}(t)\right) = T\left(t, \dot{\overrightarrow{\mathbf{x}}}(t)\right) - U\left(t, \overrightarrow{\mathbf{x}}(t)\right) + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s(t)\phi_s\left(t, \overrightarrow{\mathbf{x}}(t)\right)$$

Daraus entsteht über die Eulergleichungen das System der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen:

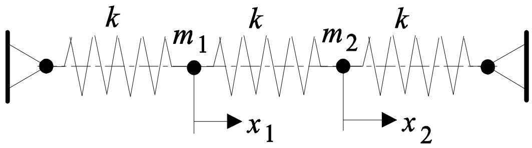
$$\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \dot{x}_i} = 0; \qquad i = 1, ..., 3n.$$

Im Speziellen erhält man analog zu oben

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x_k} + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s(t)\frac{\partial \phi_s}{\partial x_k} - m_k\ddot{x}_k &= 0 \\
\frac{\partial U}{\partial y_k} + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s(t)\frac{\partial \phi_s}{\partial y_k} - m_k\ddot{y}_k &= 0; \quad k = 1, .., n, \qquad (**) \\
\frac{\partial U}{\partial z_k} + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s(t)\frac{\partial \phi_s}{\partial z_k} - m_k\ddot{z}_k &= 0
\end{aligned}$$

Beispiel 4.13 ***Feder-Masse-System :***

$x_1(t), x_2(t)$ - Auslenkungen der Massen $m = m_1 = m_2$ aus der Ruhelage
k - Federsteifigkeit



$$\begin{aligned}
T &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) \qquad U = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k\left(x_1 - x_2\right)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \\
F &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - k\left(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2\right) \\
\frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} &= -k\left(2x_1 - x_2\right) - m\ddot{x}_1 = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} &= -k\left(2x_2 - x_1\right) - m\ddot{x}_2 = 0
\end{aligned}$$

Damit lauten die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x}_1 + k\left(2x_1 - x_2\right) = 0 \qquad m\ddot{x}_2 + k\left(2x_2 - x_1\right) = 0.$$

Beispiel 4.14 ***Pendel mit kleiner Auslenkung:***

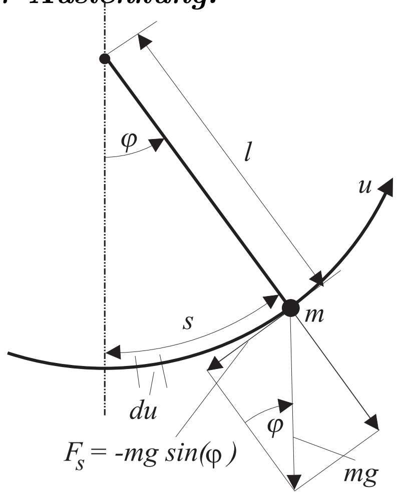
$T = \frac{m}{2}\dot{s}^2 = \frac{m}{2}(l\dot{\varphi})^2 \quad \textit{mit} \quad s = l\varphi$

$U = -\int\limits_0^s F_s du = mg \int\limits_0^\varphi \sin\psi l d\psi$

$\approx mgl \int\limits_0^\varphi \psi d\psi = \frac{1}{2} mgl\varphi^2$

mit $du = ld\psi$ *und* $\sin\psi \approx \psi$

bei kleinen Auslenkungen



Dann ist

$$F(t, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\varphi}^2 - gl\varphi^2\right)$$

und damit folgt die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{\varphi}} = -mgl\varphi - ml^2\ddot{\varphi} = 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\varphi(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) \qquad \textit{und der Kreisfrequenz} \;\; \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

4.5 Anwendung auf elliptische Randwertprobleme

Es sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand. Wir betrachten das Funktional

$$\mathbf{f}(u) = \iint\limits_G \left[\frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right) - \frac{1}{2}g(x,y)u^2 + w(x,y)u\right] dxdy + \int\limits_{\partial G} \left[\frac{1}{2}\alpha(s)u^2 - \beta(s)u)\right] ds$$

mit $u \in C^2\left(\overline{G}\right)$, s : Bogenlänge. w, g seien stetige Funktionen auf G. Weiter seien auf dem Randstück $R_1 \subseteq \partial G$ Randwerte 1. Art vorgegeben:

$$u|_{R_1} = \phi.$$

Damit bilden die Funktionen u im $C^2\left(\overline{G}\right)$ eine lineare Mannigfaltigkeit:

$$u = u^* + h$$

mit u^* fest gewählt aus $C^2\left(\overline{G}\right)$ und $h \in C^2\left(\overline{G}\right)$ mit $h|_{R_1} = 0$. Mit der Norm

$$\|u\| = \|u\|_\infty + \|u_x\|_\infty + \|u_y\|_\infty + \|u_{xx}\|_\infty + 2\,\|u_{xy}\|_\infty + \|u_{yy}\|_\infty$$

wird $C^2\left(\overline{G}\right)$ zum Banachraum. Wir suchen nun die stationären Punkte des Funktionals $\mathbf{f}(u)$ und benötigen dazu die FRÉCHET-Ableitung von $\mathbf{f}'(u)$, die wir über die Darstellung der Funktionaldifferenz $\mathbf{f}(u+h) - \mathbf{f}(u)$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(u+h) - \mathbf{f}(u) \quad &= \quad \iint\limits_G \left[\frac{1}{2}\left((u+h)_x^2 + (u+h)_y^2\right) - \frac{1}{2}g(u+h)^2 + w(u+h)\right] dxdy \\
&\quad + \int\limits_{\partial G} \left[\frac{1}{2}\alpha(u+h)^2 - \beta(u+h)\right)\right] ds \\
&\quad - \iint\limits_G \left[\frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right) - \frac{1}{2}gu^2 + wu\right] dxdy - \int\limits_{\partial G} \left[\frac{1}{2}\alpha u^2 - \beta u)\right] ds
\end{aligned}$$

Ausmultiplizieren, Zusammenfassen und Sortieren nach Potenzen von h liefert:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(u+h) - \mathbf{f}(u) \quad &= \quad \iint\limits_G \left[(u_x h_x + u_y h_y) - guh + wh\right] dxdy + \int\limits_{\partial G} \left[\alpha uh - \beta h)\right] ds \\
&\quad + \iint\limits_G \left[\frac{1}{2}\left(h_x^2 + h_y^2\right) - \frac{1}{2}gh^2\right] dxdy + \int\limits_{\partial G} \frac{1}{2}\alpha h^2 ds.
\end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\|h\|\, e(h) = \iint\limits_G \left[\frac{1}{2}\left(h_x^2 + h_y^2\right) - \frac{1}{2}gh^2\right] dxdy + \int\limits_{\partial G} \frac{1}{2}\alpha h^2 ds$$

und untersuchen diesen Term:

$$\begin{aligned}
|e\,(h)| \quad &\leq \quad \frac{1}{\|h\|}\left(\iint\limits_G \left[\frac{1}{2}\left(\|h\|^2 + \|h\|^2\right) - \frac{1}{2}g\,\|h\|^2\right] dxdy + \int\limits_{\partial G} \frac{1}{2}\alpha\,\|h\|^2\, ds\right) \\
&= \quad \frac{\|h\|^2}{\|h\|}\left(\iint\limits_G \left[1 - \frac{1}{2}g\right] dxdy + \int\limits_{\partial G} \frac{1}{2}\alpha ds\right) \\
&= \quad \|h\| \cdot C \to 0 \quad \text{für } \|h\| \to 0,\ \text{da } C = const.
\end{aligned}$$

Die Terme

$$\iint\limits_G \left[(u_x h_x + u_y h_y) - guh + wh\right] dxdy + \int\limits_{\partial G} \left[\alpha uh - \beta h)\right] ds$$

aus der Funktionaldifferenz sind linear und stetig in h. Sie stellen damit $\mathbf{f}'(u)h$ dar, und die Eulergleichung lautet dann:

$$0 = \mathbf{f}'(u)h = \iint\limits_G [(u_x h_x + u_y h_y) - guh + wh]\, dxdy + \int\limits_{\partial G} [\alpha uh - \beta h)]\, ds.$$

Falls $g(x,y) \le 0$ in G und $\alpha(s) \ge 0$ auf ∂G gilt $e(h) \ge 0$, für ein $h \ne 0$ sogar $e(h) > 0$. Folglich ist in einem stationären Punkt, d.h. bei $\mathbf{f}'(u_0)h = 0$ die Funktionswertedifferenz immer positiv. Der stationäre Punkt ist ein Minimum, falls es eine Lösung der Eulergleichung gibt.
Wir formen nun die Eulergleichung mit der 1. GREENschen Formel weiter um:

$$\begin{aligned}\iint\limits_G [(u_x h_x + u_y h_y)]\, dxdy &= \iint\limits_G [\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} h]\, dxdy \\ &= -\iint\limits_G [(u_{xx} + u_{yy})\, h]\, dxdy + \int\limits_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n} h ds\end{aligned}$$

$\curvearrowright$

$$0 = \mathbf{f}'(u)h = -\iint\limits_G [(u_{xx} + u_{yy}) + gu - w]\, hdxdy + \int\limits_{\partial G} \left[\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u - \beta)h\right] ds.$$

Für Funktionen $h \in C^2\left(\overline{G}\right)$ muss wenigstens $u|_{R_1} = 0$ gelten. Wählt man $h \in C^2\left(\overline{G}\right)$ so, dass sogar $u|_{\partial G} = 0$ gilt, wird das 2. Integral Null und der Integrand vom 1. Integral muss auch verschwinden, um die Gleichung zu erfüllen, d.h. es muss i.Allg. gelten

$$(u_{xx} + u_{yy}) + gu - w = 0 \quad in\ G.$$

Weiter muss dann das 2. Integral Null sein. Weil nun aber i. Allg. nur gilt $u|_{R_1} = 0$ folgt

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial G \setminus R_1} \left[\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u - \beta)h\right] ds &= \ , \quad d.h. \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u &= \beta \quad auf\ R_2 = \partial G \setminus R_1.\end{aligned}$$

Das entspricht Randbedingungen 3. Art (natürlichen Randbedingungen auf R_2). Zusammen mit den Randbedingungen 1. Art aus der ursprünglichen Aufgabenstellung erhalten wir ein elliptisches Randwertproblem

$$\begin{aligned}(u_{xx} + u_{yy}) + gu - w &= 0 \quad in\ G \\ u|_{R_1} &= \phi \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u &= \beta \quad auf\ R_2 = \partial G \setminus R_1,\end{aligned}$$

das zu der Variationsaufgabe

$$\begin{aligned} \text{Suche Funktionen } u &\in C^2\left(\overline{G}\right), \text{ die das Funktional } \mathbf{f}(u) \text{ unter der} \\ \text{Nebenbedingung } u(x,y)|_{R_1} &= \phi(x,y) \text{ minimieren, } R_1 \subseteq \partial G! \end{aligned}$$

äquivalent ist. Es kann gezeigt werden, dass ein Infimum von $\mathbf{f}(u)$ bestimt werden kann, dieses jedoch im Allg. über den betrachteten Mengen nicht angenommen weden muss. Deshalb bettet man diese Probleme in besser geeignete Räume, die SOBOLEW-Räume, ein. Für dieses Problem ist der Raum

$$H_2^1 = \{u \in \mathbb{L}_2(G) \mid u_x, u_y \in \mathbb{L}_2(G), u|_{R_1} = \phi\},$$

geeignet, wobei u_x, u_y die verallgemeinerten Ableitungen 1. Ordnung darstellen. Die Funktionen $h(x)$ werden dann aus

$$\overset{o}{H}{}_2^1 = \{u \in \mathbb{L}_2(G) \mid u_x, u_y \in \mathbb{L}_2(G), u|_{R_1} = 0\}$$

genommen. Nach dieser Verallgemeinerung ist die Variationsaufgabe äquivalent zur verallgemeinerten (schwachen) Formulierung des Randwertproblems.

5 Anhang

5.1 Messbare Mengen und messbare Funktionen

Definition 5.1 *Es sei* $\mathfrak{A}$ *eine Familie von Mengen aus dem* $\mathbb{R}^n$ *mit folgenden Eigenschaften (* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{A}$ *;* $\mathbf{A}_k \in \mathfrak{A}$ $k = 1, 2, \ldots$ *) :*
a) Jede offene oder abgeschlossene Menge aus dem $\mathbb{R}^n$ *gehört zu* $\mathfrak{A}$.
b) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \in \mathfrak{A} \quad \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \in \mathfrak{A} \quad \mathbf{A} \setminus \mathbf{B} \in \mathfrak{A}$ *und*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k \in \mathfrak{A} \qquad\qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k \in \mathfrak{A}$$

c) Für jedes $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}$ *existiert eine Zahl* $\mu(\mathbf{A})$ *mit* $0 \leq \mu(\mathbf{A}) \leq \infty$*, wobei gilt*

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) &= \mu(\mathbf{A}) + \mu(\mathbf{B}) \qquad , \text{ wenn } \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing \\ \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\mathbf{A}_k) \qquad , \text{ wenn } \mathbf{A}_k \cap \mathbf{A}_m = \varnothing \text{ für } k \neq m. \end{aligned}$$

Eine beliebige Menge $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}$ *heißt dann* ***messbar*** *im* $\mathbb{R}^n$ *und* $\mu(\mathbf{A})$ *heißt das* $n-$ ***dimensionale Maß*** *der Menge* $\mathbf{A}$.

Definition 5.2 *Das* $n-$ *dimensionale Maß* $\mu(\cdot)$ *auf der Mengenfamile* $\mathfrak{A}$ *besitze folgende Eigenschaften:*
a) Für jeden $n-$ *dimensionalen Kubus*

$$\mathbf{C} = \left\{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_j \leq \xi_j \leq b_j \quad j = 1, \ldots, n\right\}$$

gilt

$$\mu(\mathbf{C}) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

b) $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}$ *mit* $\mu(\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow$ *für beliebige* $\varepsilon > 0$ *existiert eine Folge von* $n-$ *dimensionalen Kuben* $\{\mathbf{C}_k\}$ *mit* $\mathbf{A} \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{C}_k$ *und* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(\mathbf{C}_k) < \varepsilon$.
c) Sind $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathfrak{A}$ *und gilt* $\mu(\mathbf{A}) = 0$ *so folgt aus* $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$ *auch* $\mu(\mathbf{B}) = 0$.
Dann heißt $\mu(\cdot)$ *(* $n-$ *dim.)* ***LEBESGUEsches Maß.***

Bemerkung 5.1 *Ist die Mengenfamilie $\mathfrak{A}$ in dem Sinne "minimal", dass jede andere Mengenfamile $\overline{\mathfrak{A}}$, die auch die Bedingungen der Definitionen A.2 und A.3 erfüllt, die Famile $\mathfrak{A}$ enthält $\left(\mathfrak{A} \subset \overline{\mathfrak{A}}\right)$, so ist das LEBESGUEsche Maß $\mu(\cdot)$ eindeutig bestimmt.*

Folgerung 5.1 *Jede endliche oder abzählbare Menge von Punkten aus dem $\mathbb{R}^n$ hat das LEBESGUEsche Maß Null. Insbesondere hat die Menge aller "rationalen Punkte" $\mathbb{Q}^n = \left\{(\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \xi_j \in \mathbb{Q}\right\}$ das LEBESGUEsche Maß Null ($\mu(\mathbb{Q}^n) = 0$).*

Beweis:
Es sei $\mathbf{A} = \left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}$ mit $\mathbf{x}^{(k)} = (x_{1k}, ..., x_{nk}) \in \mathbb{R}^n$ $k = 1, 2, ...$ und für beliebiges $\varepsilon > 0$ sei

$$\mathbf{C}_k = \left\{(\eta_1, ..., \eta_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_{jk} - \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{2^k}} \leq \eta_j \leq x_{jk} + \frac{1}{2}\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{2^k}};\quad j = 1, ..., n\right\}.$$

Dann gilt $\mathbf{A} \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{C}_k$ und $\mu(\mathbf{C}_k) = \dfrac{\varepsilon}{2^k}$. Folglich ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\mathbf{C}_k) = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \varepsilon.$$

Vereinbarung zum Begriff "fast überall" (f.ü.a.)
Eine Eigenschaft P heißt **fast überall wahr** auf einer Menge $\mathbf{M}$, wenn sie für alle Punkte aus $\mathbf{M}$ mit möglicher Ausnahme der Punkte einer Menge $\mathbf{Z} \subset \mathbf{M}$ mit dem Maße Null ($\mu(\mathbf{Z}) = 0$) wahr ist.
Z.B. ist die Sprechweise: $\mathbf{f}_n(\mathbf{x})$ konvergiert fast überall auf $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^n$ gegen $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ (oder $\mathbf{f}_n(\mathbf{x})$ konvergiert für fast alle $\mathbf{x} \in \mathbf{M} \subset \mathbb{R}^n$ gegen $\mathbf{f}(\mathbf{x})$) äquivalent zu $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{f}_n(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbf{M} \setminus \mathbf{Z}$, wobei $\mathbf{Z}$ ein beliebige Menge vom Maße Null ($\mu(\mathbf{Z}) = 0$) ist.

Definition 5.3 *(**Sprungfunktion**)*
$\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^n$ sei eine messbare Menge und

$$\mathbf{M} = \bigcup_{j=1}^{n} \mathbf{M}_j \quad \textit{mit} \quad \mathbf{M}_j \cap \mathbf{M}_i = \varnothing \quad \textit{für}\;\; i \neq j \quad \textit{und}\;\; \mu(\mathbf{M}_j) < \infty.$$

*Die Funktion $\mathbf{f} : \mathbf{M} \to \mathbb{K}$ $(= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = a_j$ für $\mathbf{x} \in \mathbf{M}_j$ heißt **Sprungfunktion** (D.h. eine Sprungfunktion ist stückweise konstant). Das Integral über eine Sprungfunktion ist durch*

$$\int\limits_{\mathbf{M}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\; d\mathbf{x} \equiv \sum_{j=1}^{n} \mu(\mathbf{M}_j)\, a_j$$

definiert.

Definition 5.4 *(**messbare Funktion**)*
Eine Funktion $\mathbf{f}: \mathbf{M} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ *heißt messbar, wenn gilt:*
a) Das Definitionsgebiet $\mathbf{D}_f = \mathbf{M}$ *ist eine messbare Menge.*
b) Es existiert eine Folge $\{\mathbf{f}_k\}$ *von Sprungfunktionen* $\mathbf{f}_k: \mathbf{M} \to \mathbb{K}$, *so dass*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{f}_k(\mathbf{x}) \quad \text{für fast alle } \mathbf{x} \in \mathbf{M}.$$

Bemerkung 5.2 *Die Funktion* $\mathbf{f}: \mathbf{M} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ *ist messbar, wenn sie auf der messbaren Menge* $\mathbf{M}$ *fast überall stetig ist.*

Bemerkung 5.3 *Die Funktionen* $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{f}, \mathbf{g}: \mathbf{M} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ *und* $\mathbf{f}_k$: $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ $(k = 1, 2, ...)$ *seien messbar. Dann sind auch die Funktionen*

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})\,\mathbf{g}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{b}(\mathbf{x}) = |\mathbf{f}(\mathbf{x})| \quad \text{und} \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \lim_{k\to\infty} \mathbf{f}_k(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

messbare Funktionen.

Bemerkung 5.4 *Ändert man eine messbare Funktion auf einer Menge vom Maße Null, so ist die modifizierte Funktion ebenfalls messbar.*

5.2 LEBESGUEsches Integral

Definition 5.5 *(LEBESGUEsches Integral)*
$\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^n$ *sei eine nichtleere messbare Menge. Die Funktion* $\mathbf{f}: \mathbf{M} \to \mathbb{K}$ *heißt über* $\mathbf{M}$ *integrierbar, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*
a) Es existiert eine Folge von Sprungfunktionen $\mathbf{f}_k$: $\mathbf{M} \to \mathbb{K}$ *mit*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{f}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \qquad \text{für fast alle } \mathbf{x} \in \mathbf{M}.$$

b) Für beliebige $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $n_0(\varepsilon)$, *so dass*

$$\int_{\mathbf{M}} |\mathbf{f}_k(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_m(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} < \varepsilon \qquad \forall\ k, m \geqq n_0(\varepsilon).$$

Ist $\mathbf{f}$ *integrierbar, so gilt*

$$\int_{\mathbf{M}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbf{M}} \mathbf{f}_k(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Bemerkung 5.5 *1. Ist* $\mathbf{M} = \varnothing$, *so ist* $\int\limits_{\varnothing} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$.

2. Folgende Aussagen sind äquivalent:

a) $\mathbf{f}$ *ist über* $\mathbf{M}$ *integrabel,*

b) $\int\limits_{\mathbf{M}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ *existiert,*

c) $\left| \int\limits_{\mathbf{M}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right| < \infty$.

Beispiel 5.1 $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^n$ *sei offen und beschränkt oder kompakt und* $\mathbf{f} : \mathbf{M} \to \mathbb{K}$ *sei beschränkt und fast überall stetig. Dann ist* $\mathbf{f}$ *über* $\mathbf{M}$ *integrierbar.*

Beispiel 5.2 $\mathbf{f} : \mathbf{M} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ *sei fast überall stetig auf der messbaren Menge* $\mathbf{M}$ *(eingeschlossen* $\mathbf{M} = \mathbb{R}^n$*), und es gelte*

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq \frac{const}{(1 + \|\mathbf{x}\|)^{\alpha}} \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{M} \textit{ und festes } \alpha > n.$$

Dann ist $\mathbf{f}$ *über* $\mathbf{M}$ *integrierbar.*

Beispiel 5.3 $\mathbf{f} : \mathbf{M} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ *sei fast überall stetig auf der beschränkten messbaren Menge* $\mathbf{M}$, *und es existiere ein* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$ *mit*

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq \frac{const}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^{\beta}} \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{M} \ \ (\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0) \quad \begin{array}{c} \textit{und festes } \beta \in \mathbb{N} \\ \textit{mit } 0 \leq \beta < n \end{array}.$$

Dann ist $\mathbf{f}$ *über* $\mathbf{M}$ *integrierbar.*

Eigenschaften des LEBESGUE-Integrals

1. $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^n$ sei eine messbare Menge mit $\mu(\mathbf{M}) < \infty$. Dann gilt

$$\int\limits_{\mathbf{M}} d\mathbf{x} = \mu(\mathbf{M}).$$

2. **Linearität:**
Die Funktionen $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbf{M} \to \mathbb{K}$ seien über $\mathbf{M}$ integrierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann ist auch $\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g}$ über $\mathbf{M}$ integrierbar, und es gilt

$$\int\limits_{\mathbf{M}} (\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g})\, d\mathbf{x} = \alpha \int\limits_{\mathbf{M}} \mathbf{f}\ d\mathbf{x} \ + \beta \int\limits_{\mathbf{M}} \mathbf{g}\ d\mathbf{x}.$$

3. **Absolute Integrierbarkeit:**
   $\mathbf{f} : \mathbf{M} \to \mathbb{K}$ seien über $\mathbf{M}$ integrierbar. Dann gilt $\int\limits_{\mathbf{M}} \mathbf{f}\ d\mathbf{x}$ existiert $\Leftrightarrow \int\limits_{\mathbf{M}} |\mathbf{f}|\ d\mathbf{x}$ existiert. Außerdem gilt:
$$\left|\int\limits_{\mathbf{M}} \mathbf{f}\ d\mathbf{x}\right| \leq \int\limits_{\mathbf{M}} |\mathbf{f}|\ d\mathbf{x}.$$

4. **Transformationsregel:**
   $\mathbf{f} : \mathbf{M} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ sei integrierbar über der nichtleeren offenen Menge $\mathbf{M}$ und $\mathbf{g} : \mathbf{N} \to \mathbf{M}$ sei ein $\mathbf{C}^1-$ Diffeomorphismus (d.h. $\mathbf{g}$ ist bijektiv und $\mathbf{g} \in \mathbf{C}^1$ und $\mathbf{g}^{-1} \in \mathbf{C}^1$) der offenen Menge $\mathbf{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ auf $\mathbf{M}$. Dann gilt
$$\int\limits_{\mathbf{M}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} = \int\limits_{\mathbf{N}} \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y}))\ \det\left\{\frac{\partial g_i(\mathbf{y})}{\partial y_j}\right\} d\mathbf{y}.$$

5. **Majoranten Kriterium:**
   $\mathbf{f} : \mathbf{M} \to \mathbb{K}$ sei messbar, und es existiere eine über $\mathbf{M}$ integrierbare Funktion $\mathbf{g} : \mathbf{M} \to \mathbb{K}$ mit $|\mathbf{f}(\mathbf{x})| \leq \mathbf{g}(\mathbf{x})$ für fast alle $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$. Dann sind die Funktionen $\mathbf{f}$ und $|\mathbf{f}|$ auch über $\mathbf{M}$ integrierbar, und es gilt
$$\left|\int\limits_{\mathbf{M}} \mathbf{f}\ d\mathbf{x}\right| \leq \int\limits_{\mathbf{M}} |\mathbf{f}|\ d\mathbf{x} \leq \int\limits_{\mathbf{M}} \mathbf{g}\ d\mathbf{x}.$$

6. $\mathbf{f} : \mathbf{M} \to \mathbb{K}$ sei eine messbare Funktion mit $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \geqq 0$ für beliebige $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$. Dann gilt
$$\int\limits_{\mathbf{M}} \mathbf{f}\ d\mathbf{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \text{ fast überall auf } \mathbf{M}.$$

7. **Additivität des Integrationsgebietes:**
   $\mathbf{M}, \mathbf{N} \subseteq \mathbb{R}^n$ seien disjunkte messbare Mengen und $\mathbf{f} : \mathbf{M} \cup \mathbf{N} \to \mathbb{K}$ sei integrierbar über $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$. Dann ist $\mathbf{f}$ integrabel über $\mathbf{M} \cup \mathbf{N}$ und es gilt
$$\int\limits_{\mathbf{M}\cup\mathbf{N}} \mathbf{f}\ d\mathbf{x} = \int\limits_{\mathbf{M}} \mathbf{f}\ d\mathbf{x} + \int\limits_{\mathbf{N}} \mathbf{f}\ d\mathbf{x}.$$

8. **Konvergenz bzgl. des Integrationsgebietes:**
   Es sei $\mathbf{M}_1 \subseteq \mathbf{M}_2 \subseteq ...$ und $\mathbf{M} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}_k$. $\mathbf{f} : \mathbf{M} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ ist genau dann über $\mathbf{M}$

integrierbar, wenn $\mathbf{f}$ integrierbar über $\mathbf{M}_k \quad (k = 1, 2, ...)$ und $\sup\limits_n \left| \int\limits_{\mathbf{M}_n} \mathbf{f}\ d\mathbf{x} \right| < \infty$.
in diesem Fall gilt

$$\int\limits_{\mathbf{M}} \mathbf{f}\ d\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbf{M}_k} \mathbf{f}\ d\mathbf{x}.$$

9. **Absolute Stetigkeit:**
   $\mathbf{f} : \mathbf{M} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ sei integrierbar, dann gilt:
   $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass $\left| \int\limits_{\mathbf{A}} \mathbf{f}\ d\mathbf{x} \right| < \varepsilon\ \forall\ \mathbf{A} \subset \mathbf{M}$ mit $\mu(\mathbf{A}) < \delta$.

10. **Satz von FUBINI:**
    $\mathbf{f} : \mathbf{M} \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{K}$ sei integrierbar, dann gilt die Formel (außerhalb von $\mathbf{M}$ wird hier $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ gesetzt und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$):

$$\int\limits_{\mathbf{M}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\ d\mathbf{x}d\mathbf{y} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x} \right] d\mathbf{y}$$

11. Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:
    a) Die Funktionen $\mathbf{f}_k$: $\mathbf{M} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ seien messbar und der Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{f}_k(\mathbf{x})$ existiere für fast alle $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$.
    b) Es existiere eine integrierbare Funktion $\mathbf{g} : \mathbf{M} \to \mathbb{R}$, so dass $|\mathbf{f}_k(\mathbf{x})| \leq \mathbf{g}(\mathbf{x})$ für fast alle $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$.
    Dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbf{M}} \mathbf{f}_k(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int\limits_{\mathbf{M}} \lim_{k\to\infty} \mathbf{f}_k(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

12. **Lemma von FATOU:**
    $\{\mathbf{f}_k\}$ sei eine Folge integrierbarer Funktionen $\mathbf{f}_k : \mathbf{M} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, und es gelte
    a) $\mathbf{f}_k(\mathbf{x}) \geqq 0$ für beliebige $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ und $k = 1, 2, ...$
    b) $\int\limits_{\mathbf{M}} \mathbf{f}_k(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leq C \quad k = 1, 2, ...$
    Dann ist:

$$\int\limits_{\mathbf{M}} \underline{\lim}_{k\to\infty} \mathbf{f}_k(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbf{M}} \mathbf{f}_k(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

13. **Parameterintegrale:**
    Es sei $\mathbf{f} : \mathbf{M} \times \mathbf{P} \to \mathbb{K}$, wobei $\mathbf{M} \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge und $\mathbf{P} \subset \mathbb{K}^m$. Dann heißt das Integral $F(\mathbf{p}) = \int\limits_{\mathbf{M}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})\ d\mathbf{x}$ Parameterintegral bezüglich des Parameters $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$.

Stetigkeit von Parameterintegralen:
Die Funktion $F : \mathbf{P} \to \mathbb{K}$ ist stetig, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
a) Die Funktion $\mathbf{x} \to \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ sei über $\mathbf{M}$ messbar für jedes $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$.
b) Es existiere eine integrierbare Funktion $\mathbf{g} : \mathbf{M} \to \mathbb{R}$, so dass

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})| \leq \mathbf{g}(\mathbf{x}) \qquad \text{für jedes } \mathbf{p} \in \mathbf{P} \text{ und fast alle } \mathbf{x} \in \mathbf{M}.$$

c) Die Funktion $\mathbf{p} \to \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ sei stetig auf $\mathbf{P}$ für fast alle $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$.

14. **Differenzierbarkeit von Parameterintegralen:**
Die Funktion $F : \mathbf{P} \to \mathbb{K}$ auf der nicht leeren offenen Menge $\mathbf{P} \subset \mathbb{K}$ ist differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{d\mathbf{p}} F(\mathbf{p}) = \int\limits_{\mathbf{M}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})\, d\mathbf{x} \quad \text{für jedes } \mathbf{p} \in \mathbf{P},$$

wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
a) Es existiere $F(\mathbf{p}) = \int\limits_{\mathbf{M}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p})\, d\mathbf{x}$ für jedes $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$.
b) Es existiere eine integrierbare Funktion $\mathbf{g} : \mathbf{M} \to \mathbb{R}$, so dass

$$\left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \right| \leq \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad \text{für jedes } \mathbf{p} \in \mathbf{P} \text{ und fast alle } \mathbf{x} \in \mathbf{M}.$$

LEBESGUE-STILTJES-Integral

a) Die Funktionen $\mathbf{f}, \mathbf{h} : (a, b) \to \mathbb{C}$ (mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$) seien messbar und die Funktionen $\mathbf{h}$ und $\mathbf{f} \cdot \mathbf{h}$ seien über (a, b) im LEBESGUEschen Sinne integrierbar.
b) Für bel. $x \in (a, b)$ sei $\mathbf{g}(x) = \int\limits_a^x \mathbf{h}(y)\, dy$.
Dann gilt:

$$\int\limits_a^b \mathbf{f}(x)\, d\mathbf{g}(x) = \int\limits_a^b \mathbf{f}(x)\, \mathbf{g}'(x)\, dx$$

$\int\limits_a^b \mathbf{f}(x)\, d\mathbf{g}(x)$ – LEBESGUE-STILTJES-Integral

und

$\int\limits_a^b \mathbf{f}(x)\, \mathbf{g}'(x)\, dx$ – LEBESGUE-Integral

Funktionen von beschränkter Variation

Die Funktion $\mathbf{g} : [a, b] \to \mathbb{C}$ $(-\infty < a < b < \infty)$ heißt von beschränkter Variation, wenn

$$V(\mathbf{g}) = \inf_D \sum_{k=1}^{m} \left| \mathbf{g}\left(x_k^{(m)}\right) - \mathbf{g}\left(x_{k-1}^{(m)}\right) \right| < \infty,$$

wobei das Infimum über alle möglichen endlichen Zerlegungen D des Intervalles $[a, b]$, d.h.

$$a = x_0^{(m)} < x_1^{(m)} < ... < x_m^{(m)} = b \qquad \text{mit} \quad m = 1, 2, ...$$

zu nehmen ist.