1. Übung / Metrische Räume

1. Stellen die Ausdrücke
   a) $d(x,y) = \sin^2(x-y) \qquad im\ \mathbb{R}^1$
   b) $d(x,y) = \sqrt{|x-y|} \qquad im\ \mathbb{R}^1$
   c) $d(x,y) = |\arctan(x-y)| \qquad im\ \mathbb{R}^1$
   d) $d(x,y) = |x_1 - y_1| \qquad im\ \mathbb{R}^2,\ mit\ x = (x_1, x_2)^T,\ y = (y_1, y_2)^T$
   Metriken dar?

2. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^1$$

   Hinweis: Benutzen Sie die Monotonie der Funktion $f(x) = \frac{x}{1+x}$.

3. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2, dass die Menge der rellen Zahlenfolgen mit

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k - y_k|} \qquad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}; \quad y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$$

   ein metrischer Raum ist.

4. Zeigen Sie, dass aus den folgenden Beziehungen die Axiome des metrischen Raumes ableitbar sind:
   a) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
   b) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{X}$

5. Zeigen Sie, dass die Metrik eine stetige Funktion ist,
   d.h., aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ folgt $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y)$.

6. Es sei M die Menge aller n-stelligen Binärwörter der Form $x = x_1 x_2 .... x_n$.
   Die HEMMING - Distanz zweier Binärwörter x, y ist durch
   $d_H =$ Anzahl der Stellen, in denen sich x und y unterscheiden, gegeben.
   Zeigen Sie
   a) $d_H(x,y) = \sum_{k=1}^{n} [(x_k + y_k) \bmod 2]$
   b) M ist ein metrischer Raum.

7. Es sei B die Menge aller Folgen natürlicher Zahlen. Der Abstand zwischen zwei verschiedenen Elementen $x = (x_1, x_2, ...)$ und $y = (y_1, y_2, ...)$ wird als $1/\lambda$ definiert, wobei λ die kleinste natürliche Zahl ist, bei der gilt $x_\lambda \neq y_\lambda$. Außerdem wird $d(x,x) = 0$ definiert.
   Zeigen Sie, dass B mit dieser Abstandsfunktion ein metrischer Raum ist.
   (BAIREscher Raum)

8. Es seien $(\mathbb{X}_1, d_1)$ und $(\mathbb{X}_2, d_2)$ metrische Räume. Für $x, y \in \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ mit
   $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ sei die Abstandsfunktion d durch
   $d(x,y) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$ definiert.
   Zeigen Sie, dass $(\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2, d)$ ein metrischer Raum ist.

2. Übung / Offene und abgeschlossene Mengen

1. Es sei $\mathbb{X}$ ein metrischer Raum, und es gelte $A \subset \mathbb{X}, B \subset \mathbb{X}$.
   Zeigen Sie: Aus $A \subset B$ folgt $A^+ \subseteq B^+$ und $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

2. Es sei X ein metrischer Raum, und es gelte $A \subset \mathbb{X}, B \subset \mathbb{X}$.
   Zeigen Sie: $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ und $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Geben Sie ein Beispiel für $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$ an.

3. Zeigen Sie jeweils an einem Beispiel, dass der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen nicht notwendig eine offene Menge ist und die Vereinigung beliebig vieler abgeschlossener Mengen nicht notwendig eine abgeschlossene Menge ist.

4. Es sei $\mathbb{X}$ ein metrischer Raum, $A \subset \mathbb{X}$ sei eine offene Menge und $B \subset \mathbb{X}$ eine abgeschlossene Menge. Zeigen Sie: $A \setminus B$ ist eine offene Menge und $B \setminus A$ ist eine abgeschlossene Menge.

5. Geben Sie zu den folgenden Mengen $A \subset \mathbb{R}$ die derivierte Menge A^+, die Menge der inneren Punkte A^0 und die Abschließung $\overline{A}$ an:
   $a)\quad A = \left\{ \frac{(-1)^n n^2}{1+n} | n \in N \right\}$ $\quad c)\quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[n - \frac{1}{n}; n + \frac{1}{2n} \right]$
   $b)\quad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}; 1 + \frac{1}{n} \right]$ $\quad d)\quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n - 1}{2^n}; \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} \right)$

6. Es sei $E \subset \mathbb{R}$ die Menge aller Zahlen der Form $0; \frac{1}{n}; \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$, wobei $n, m \in N$. Geben Sie die derivierte Menge E^+ an.

7. Es sei $\mathbb{X}$ ein metrischer Raum, $F_1 \subset \mathbb{X},\ F_2 \subset \mathbb{X}$ abgeschlossene Mengen mit $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.
   Zeigen Sie, dass dann offene Mengen G_1 und G_2 mit $F_1 \subset G_1$,
   $F_2 \subset G_2$ und $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ existieren.

8. Es sei $\mathbb{X}$ ein metrischer Raum, $A \subset \mathbb{X}$, $\overline{A}$ die abgeschlossene Hülle von A.
   x sei ein innerer Punkt von $\overline{A}$. Folgt hieraus, dass x auch innerer Punkt von A ist?

9. ** Finden Sie ein Beispiel eines metrischen Raumes $\mathbb{X}$, in dem es außer $\mathbb{X}$ und der leeren Menge weitere sowohl offene als auch abgeschlossene Mengen gibt.

3. **Übung / Vollständigkeit metrischer Räume**

1. Zeigen Sie, dass folgende Räume vollständig sind:

   1. $\mathbb{X} = m$: Menge der rellen beschränkten Zahlenfolgen mit $d(x,y) = \sup_i |x_i - y_i|,\ \sup_i |x_i| < \infty,\ \sup_i |y_i| < \infty$.
   2. $\mathbb{X} = c$: Menge der konvergenten Zahlenfolgen mit $d(x,y) = \sup_i |x_i - y_i|$.
   3. $\mathbb{X} = c_0$: Menge der Nullfolgen mit $d(x,y) = \sup_i |x_i - y_i|$.

2. Ist die Menge der natürlichen Zahlen mit der Metrik

   1. $d_1(m,n) = \frac{|m-n|}{m \cdot n}$
   2. $d_2(m,n) = \begin{cases} 0 & \text{für } m = n \\ 1 + \frac{1}{m+n} & \text{für } m \neq n \end{cases}$

   ein vollständiger Raum?

3. In $\mathbb{R}^n$ sei ein Abstand $d(x,y) = \max_i |x_i - y_i|$ definiert. Zeigen Sie:

   1. $\mathbb{R}^n$ ist mit $d(x,y)$ ein metrischer Raum.
   2. Dieser metrische Raum ist vollständig.

4. Gegeben seien ein metrischer Raum $(\mathbb{X}, d)$ und eine Menge $M \subset \mathbb{X}$. d_0 sei die Einschränkung der Abstandsfunktion d auf M. Zeigen Sie:

   1. (M, d_0) ist ein metrischer Raum.
   2. Ist (M, d_0) vollständig, so ist M in $\mathbb{X}$ abgeschlossen.
   3. Ist $(\mathbb{X}, d)$ vollständig, dann gilt :
      (M, d_0) ist vollständig $\Leftrightarrow$ M ist abgeschlossen.

5. Gegeben seien ein metrischer Raum $\mathbb{X}$, eine kompakte Menge $A \subset \mathbb{X}$ und eine stetige Abbildung $f : A \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

   1. $f(A)$ ist eine kompakte Menge.
   2. Die Funktion f besitzt auf A ein absolutes Minimum und Maximum.

6. Es sei $C^1[a,b]$ die Menge aller auf $[a,b]$ stetig differenzierbaren Funktionen
   Für $x(t),\ y(t) \in C^1[a,b]$ sei

$$d(x,y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| + \max_{a \le t \le b} |x'(t) - y'(t)|.$$

   1. Zeigen Sie, dass $C^1[a,b]$ ein vollständiger metrischer Raum ist.
   2. Wie lässt sich in $C^m[a,b]$ (Menge aller auf $[a,b]$ m-mal stetig differenzierbaren Funktionen) eine entsprechende Metrik einführen?

4. **Übung /Fixpunktsatz**

1. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ gemäß $f(x) = x^3$ auf dem metrischen Raum $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ mit $d(x, y) = |x - y|$ eine kontrahierende Abbildung ist.
2. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$ mit $[c, d] \subseteq [a, b]$ und $|f'(x)| \leq \alpha < 1$ in $[a, b]$ im metrischen Raum $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ mit $d(x, y) = |x - y|$ eine kontrahierende Abbildung ist.
3. Für welche $\lambda \in [0; 4]$ ist die Abbildung $f(x) = \lambda x(1 - x)$ für $0 \leq x \leq 1$ im metrischen Raum $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ mit $d(x, y) = |x - y|$ kontrahierend?
4. Für die Koeffizienten $a_{ik} \in \mathbb{C},\ i, k = 1, 2, ..., n$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k &= b_i \qquad i = 1, 2, ..., n \qquad \text{gelte} \\ \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| &\leq q < 1. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem für beliebige $b_1, ...b_n \in \mathbb{C}$ eine eineindeutige Lösung besitzt.

5. Übung / Normierte Räume

1. Es sei $\mathbb{U}$ ein normierter Raum und S ein echter Unterraum von $\mathbb{U}$. Zeigen Sie: Die Abschließung $\overline{\mathbb{S}}$ von $\mathbb{S}$ ist ebenfalls ein Unterraum von $\mathbb{U}$.

2. Es seien $(\mathbb{U}_1, \|.\|_1)$ und $(\mathbb{U}_2, \|.\|_2)$ normierte Räume über dem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie:
   a) Mit $\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2$ für $(x_1, x_2) \in \mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2$ ist $\mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2$ ein normierter Raum.
   b) Sind $\mathbb{U}_1$ und $\mathbb{U}_2$ Banachräume, dann ist auch $\mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2$ ein Banachraum.

3. Es sei $C_b(I)$ der lineare Raum aller auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ beschränkten Funktionen. Für $x(t) \in C_b(I)$ sei $\|x\| = \sup_{t \in I} |x(t)|$. Zeigen Sie: $(C_b(I), \|.\|)$ ist ein Banachraum.

4. Eine Teilmenge A eines linearen normierten Raumes $\mathbb{U}$ mit $\|.\|$ heißt konvex, wenn mit $x, y \in A$ auch die "Verbindungsstrecke" $\alpha x + (1 - \alpha)y$; $\alpha \in (0, 1)$ zu $\mathbb{U}$ gehört. Zeigen Sie:
   a) In einem linearen normierten Raum ist die Einheitskugel $E = \{x \in \mathbb{U} |\, \|x\| \leq 1\}$ stets eine konvexe Menge.
   b) Die Abschließung $\overline{A}$ einer konvexen Menge A ist ebenfalls konvex.

5. Es sei $\mathbb{U} = C[a, b]$; $-\infty < a < b < \infty$ mit $\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$.
   Zeigen Sie:
   a) $M = \{x \in \mathbb{U} |\, \int_a^b x(t)dt = 0\}$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathbb{U}$. Diese Menge ist in $\mathbb{U}$ nicht dicht.
   b) $M = \{x \in \mathbb{U} | x(a) = 1\}$ ist abgeschlossen und konvex, aber kein Unterraum von $\mathbb{U}$.
   c) Setzt man $\varphi(x) = |x(a)|$, so ist φ keine Norm auf $\mathbb{U}$.
   d) Setzt man $\|.\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt$, dann ist $\|.\|_1$ eine Norm auf $\mathbb{U}$, aber $\mathbb{U}$ ist kein Banachraum bezüglich dieser Norm. (Hinweis: Konstruieren Sie eine Folge stetiger Funktionen, die gegen eine Sprungfunktion konvergiert.)
   e) Die Operatoren $A : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ und $B : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ sind durch

   $$(Ax)(t) = x(a) \qquad \textit{und} \qquad (Bx)(t) = \int_a^t x(s)ds$$

   definiert. Zeigen Sie: A und B sind lineare stetige Operatoren mit $\|A\| = 1$ und $\|B\| = b - a$.
   f) Zeigen Sie, dass der Operator $Fx = \int_0^1 sx(s)ds$ stetig ist.
   g) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist der Operator $(Ax)(t) = \alpha \int_a^t \sin x(s)ds + 1$; $A : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ kontrahierend?