

# Höhere Mathematik / Teil 2

Cordula Bernert



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Unendliche Reihen</b>	<b>3</b>
1.1	Zahlenreihen . . . . .	3
1.1.1	Konvergenzkriterien für Zahlenreihen . . . . .	5
1.1.2	Eigenschaften konvergenter Reihen . . . . .	9
1.2	Funktionenreihen . . . . .	9
1.2.1	Grundbegriffe . . . . .	9
1.2.2	Potenzreihen . . . . .	10
1.2.3	Eigenschaften von Potenzreihen . . . . .	12
1.2.4	Anwendungen der Potenzreihen . . . . .	14
1.3	FOURIER-Reihen (J.B. Fourier 1768-1830) . . . . .	15
1.3.1	Die komplexe Form der FOURIER-Reihe . . . . .	16
1.3.2	Berechnung der Fourierkoeffizienten $c_k$ . . . . .	17
1.3.3	Anwendungen der Fourierreihen . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b>	<b>29</b>
2.1	Einleitung und Grundbegriffe . . . . .	29
2.2	Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	35
2.2.1	Richtungsfeld* . . . . .	35
2.2.2	Leicht integrierbare Spezialfälle von Differentialgleichungen 1. Ordnung* . . . . .	37
2.3	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	41
2.3.1	Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung . . . . .	42
2.3.2	Ermittlung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung . . . . .	43
2.4	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	49
2.4.1	Die homogene Gleichung* . . . . .	50
2.4.2	Die inhomogene Gleichung . . . . .	51
2.5	Die Schwingungsdifferentialgleichung* . . . . .	56
2.6	Dynamische Systeme . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Skalare Funktionen mehrerer unabhängiger Variabler</b>	<b>65</b>
3.1	Definition . . . . .	65
3.2	Geometrische Veranschaulichung skalarer Funktionen . . . . .	65
3.3	Grenzwerte und Stetigkeit skalarer Funktionen mit 2 Veränderlichen . . . . .	70

<b>4</b>	<b>Differentialrechnung von skalaren Funktionen</b>	<b>71</b>
4.1	Partielle Ableitungen 1. Ordnung . . . . .	71
4.2	Partielle Ableitungen höherer Ordnung . . . . .	73
4.3	Das totale Differential . . . . .	73
4.4	Gradient . . . . .	77
4.5	Extremwertaufgaben . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Integrale über ebene Bereiche (Flächenintegrale)</b>	<b>85</b>
5.1	Berechnung von Flächenintegralen . . . . .	86
5.2	Anwendungen der Flächenintegrale . . . . .	92
<b>6</b>	<b>Ergänzungen zur Linearen Algebra</b>	<b>95</b>
6.1	Matrizen als lineare Abbildungen . . . . .	95
6.2	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	97
6.3	Hauptachsentransformation . . . . .	100

# Literaturverzeichnis

- [1] MINÖL: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, BG Teubner Verlagsgesellschaft Band 3, 7/1, 7/2 und 10, Ü1, Ü2
- [2] Stingl: Mathematik für Fachhochschulen, Carl-Hanser-Verlag
- [3] Papula: Mathematik für Ingenieure Band 2, Vieweg-Verlag
- [4] Preuß: Lehr- und Übungsbuch Mathematik Teile 2 und 5, Fachbuchverlag Leipzig
- [5] Preuß: Lehr- und Übungsbuch Mathematik für Elektro- und Automatisierungstechniker, Fachbuchverlag Leipzig
- [6] Unbehauen: Systemtheorie (Akademieverlag), Lehr- und Übungsbuch Mathematik V für ET (Fachbuchverlag Leipzig)
- [7] Greuel, Mathematische Ergänzungen und Aufgaben für Elektrotechniker
- [8] Bronstein: Taschenbuch der Mathematik, BG Teubner



# 1 Unendliche Reihen

## 1.1 Zahlenreihen

### Beispiel 1.1

Bei einer jährlichen Verzinsung mit 6,2% werden 10 Jahre lang vorschüssig jeweils 2500 Euro auf ein Konto eingezahlt. Wie hoch ist der Kontostand nach 10 Jahren?

Anfang 1. Jahr: 2500

Anfang 2. Jahr:  $2500 * 1.062 + 2500$

Anfang 3. Jahr:  $2500 * 1.062^2 + 2500 * 1.062 + 2500$

.....

Anfang 10. Jahr:  $2500 * 1.062^9 + 2500 * 1.062^8 + \dots + 2500$

Ende 10. Jahr:  $2500 * 1.062^{10} + 2500 * 1.062^9 + \dots + 2500 * 1.062$   
 $= 2500 * q * (1 + q + q^2 + \dots + q^9) = 35325,44(\text{Euro})$   
mit  $q = 1.062$  als Aufzinsungsfaktor

### Beispiel 1.2

Gauß sollte als Schüler die Summe der Zahlen von 1 bis 60 bilden. Er rechnete wie folgt:

$$\begin{aligned} s &= 1 + 2 + 3 + \dots + 59 + 60 \\ &= (1 + 60) + (2 + 59) + \dots + (30 + 31) \\ &= 30 * 61 = 1830 \end{aligned}$$

**Beispiel 1.3**  $R_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

wegen geometrischer Reihe mit  $a = 1$  und  $q = \frac{1}{2}$

**Beispiel 1.4**  $R_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = ?$

Diese Reihe heißt harmonische Reihe.

### Beispiel 1.5 Paradoxon von Achilles und der Schildkröte:

Die Schildkröte bekommt beim Wettlauf 1 Wegeinheit Vorsprung und hat eine Geschwindigkeit von  $\frac{1}{100}$  der Geschwindigkeit von Achilles. Angeblich kann Achilles die Schildkröte niemals einholen, denn der zurückgelegte Weg wird wie folgt betrachtet:

Schildkröte:  $s_1 = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \dots$

Achilles:  $s_2 = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \dots,$

so dass die Schildkröte stets ein winziges Stück voraus ist.

**Definition 1.1** Eine unendliche Reihe ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots,$$

wobei für die Glieder der Reihe  $a_k$  ein Bildungsgesetz existiert.

Problem: Haben diese unendlichen Summen einen Wert?

**Definition 1.2** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

<i>konvergent</i>		<i>konvergent ist.</i>
<i>heißt divergent</i>	<i>wenn die Folge <math>\{s_n = \sum_{k=1}^n a_k\}_{n=1}^{\infty}</math></i>	<i>divergent ist.</i>
<i>bestimmt divergent</i>		<i>bestimmt divergent ist.</i>

Die Summe  $s$  der Reihe ist  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , falls der Grenzwert existiert. Die Summe  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  wird *Partialsomme* genannt.

**Beispiel 1.6**

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

$\Rightarrow s_1 = -1; \quad s_2 = 0; \quad s_3 = -1; \quad \dots \Rightarrow$  *Divergenz*

**Beispiel 1.7**

*Arithmetische Reihe:*  $\sum_{k=1}^{\infty} (a + (k-1)b); \quad s_n = na + \frac{n}{2}(n-1)b$   
 Unter den Bedingungen  $a \neq 0$  und  $b \neq 0$  gilt dann  $|\lim_{n \rightarrow \infty} s_n| = \infty$

**Beispiel 1.8**

*Geometrische Reihe:*  $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}; \quad s_n = a \frac{1-q^n}{1-q}$   
 Unter den Bedingungen  $a \neq 0$  und  $q \neq 1$  gilt dann:

$$|q| < 1: \quad s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-q} \quad \text{Konvergenz}$$

$$|q| > 1: \quad s = \lim_{n \rightarrow \infty} |s_n| = \infty \quad \text{Divergenz}$$

**Beispiel 1.9**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a \cdot q^{k-1} = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-0.5} = 2$$

oder mit der Folge der Partialsommen folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{3}{4} \quad \dots$$

$$s_n = 1 + \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}$$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2$$

**Beispiel 1.10**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{5}{6} \quad \dots$$

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = ? (= \infty)$$

**Beispiel 1.11**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$  (Berechnung über Fourierreihen)

Probleme:

1. Der Weg über die Partialsummen ist sehr umständlich.
2. Oft interessiert nur, ob die Reihe konvergiert, nicht welcher Grenzwert sich ergibt.

**1.1.1 Konvergenzkriterien für Zahlenreihen**

Konvergenzkriterien sind einfach nachzuprüfende Bedingungen, bei deren Erfüllung die Konvergenz der Zahlenreihe gesichert ist. Es gibt verschiedene Konvergenzkriterien, die entsprechend ihrem Einsatzbereich angewendet werden können. Eine Aussage über die Summe der Reihe ist damit aber nicht möglich.

**Definition 1.3** Eine Reihe heißt *alternierend*, wenn ihre Glieder abwechselnd positiv oder negativ sind. (s. Folgen)

**Satz 1.1** LEIBNIZ'sches Konvergenzkriterium

Eine alternierende Reihe konvergiert  $\iff$

1.  $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| = 0$  und
2.  $|a_k| \geq |a_{k+1}| \quad \forall k \geq k_0.$

**Beispiel 1.12**  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$  ist konvergent nach Leibniz, denn es gilt:

$$1. \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0 \text{ und } 2. |a_k| = \frac{1}{k} \geq \frac{1}{k+1} = |a_{k+1}| \quad \forall k \geq 1$$

**Definition 1.4** Wir betrachten Reihen mit positiven Gliedern:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k; \quad a_k \leq b_k \quad \forall k. \quad \curvearrowright$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt *Minorante* zu  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  und

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  heißt *Majorante* zu  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

**Satz 1.2** Vergleichskriterium für Reihen mit positiven Gliedern.

	konvergiert	konvergente Majorante
Eine Reihe mit positiven Gliedern	wenn sie eine	besitzt.
	divergiert	divergente Minorante

**Beispiel 1.13**  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k + k}$

ist konvergent, denn sie besitzt die konvergente Majorante  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$  (s. Beispiel 1.9)

**Satz 1.3** Quotienten- und Wurzelkriterium

Wir betrachten für die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  die Folgen  $\rho_k = \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$  oder  $\rho_k = \sqrt[k]{|a_k|}$  und den Grenzwert  $\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k$ .

	konvergiert	$\rho_k \leq q < 1$	$\rho < 1$
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$	wenn	$\forall k > k_0$ bzw. wenn	.
	divergiert	$\rho_k \geq 1$	$\rho > 1$

**Bemerkung 1.1** Es ist keine Aussage möglich bei  $\rho = 1$ , wenn nicht  $\rho_k \geq 1 \quad \forall k > k_0$ . In diesem Fall ist ein anderes Kriterium zu Rate zu ziehen.

**Beispiel 1.14**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \dots$  ist konvergent, denn es gilt:

Quotientenkriterium:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^2 k!}{(k+1)! k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)(k+1)k!}{k!(k+1)k^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \right) = 0 < 1$

**Beispiel 1.15**  $\sum_{k=1}^{\infty} a^k \sin^2 k\alpha$

Quotientenkriterium:  $\rho_k = a \left( \frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin k\alpha} \right)^2 \Rightarrow \nexists \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k$ ,

außerdem gilt weder  $\rho_k \leq q < 1$  noch  $\rho_k \geq 1 \quad \forall k > k_0 \Rightarrow$  keine Aussage möglich

Wurzelkriterium:  $\rho_k = \sqrt[k]{|a^k \sin^2 k\alpha|} = |a| \sqrt[k]{|\sin^2 k\alpha|} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = |a|$   
 $\Rightarrow$  Konvergenz für  $|a| < 1$

**Beispiel 1.16**  $\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{3^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{3^3}{3 \cdot 2^3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{3^k}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^k$

ist divergent, denn es gilt:

Quotientenkriterium:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)} \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} \cdot k \left(\frac{2}{3}\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{(k+1)} \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} > 1$

**Beispiel 1.17**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

Quotientenkriterium:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k}{k+1} \right| = 1$

Wurzelkriterium:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1$

$\Rightarrow$  keine Aussage möglich (Reihe divergiert s. Bsp. 1.10 und Bemerkung 1.1, Integralkriterium)

**Beispiel 1.18**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Quotientenkriterium:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k^2}{(k+1)^2} \right| = 1$

Wurzelkriterium:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = 1$

$\Rightarrow$  keine Aussage (Reihe konvergiert s. Integralkriterium)

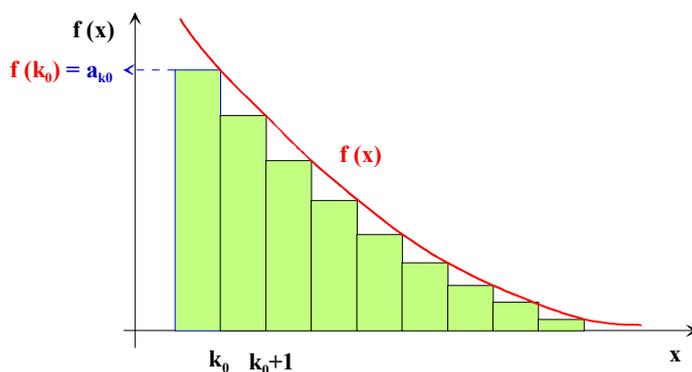
**Satz 1.4** Integralkriterium

Wir betrachten  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  mit  $a_k \geq 0$ .

Gilt für  $k \geq k_0$  :  $a_k = f(k)$  |  $f = f(x)$ ,  $f$  stetig, monoton fallend, so folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent} \iff \int_{k_0}^{\infty} f(x) dx \text{ existiert.}$$

**Bemerkung 1.2** Die Reihe wird als uneigentliches Integral über eine Treppenfunktion gedeutet. Das Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale liefert dann die Aussage des obigen Satzes:



Die grüne Fläche repräsentiert die Reihe  $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ . Sie kann offensichtlich durch die Fläche unter der Kurve  $\int_{k_0}^{\infty} f(x) dx$  nach oben abgeschätzt werden. Existiert das Integral muss folglich auch die Summe der Reihe einen endlichen Wert liefern.

**Beispiel 1.19**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$   $\alpha > 0$ ;

1. Fall:  $\alpha \neq 1$  :

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_1^A$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \alpha > 1 : \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} \left( \frac{1}{A^{\alpha-1}} - 1 \right) = \frac{1}{\alpha-1} \curvearrowright \text{Konvergenz} \\ \alpha < 1 : \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\alpha} (A^{1-\alpha} - 1) = \infty \curvearrowright \text{Divergenz} \end{array} \right\}$$

2. Fall:  $\alpha = 1$  :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} [\ln |x|]_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} (\ln A - \ln 1) = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A = \infty \quad \curvearrowright \quad \text{Divergenz.}$$

Die Reihe  $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}$   $\alpha > 0$ ; kann damit im Vergleichskriterium als Vergleichsreihe benutzt werden.

Die Folgerung aus dem nächsten Satz bietet die Möglichkeit, manchmal die vermutete Divergenz einer Reihe nachzuweisen:

**Satz 1.5**  $\sum_{k=1}^\infty a_k$  ist konvergent  $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

**Bemerkung 1.3** Die Umkehrung gilt nicht!!!!

Denn es gilt z.B. für die harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$

einerseits :  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$

aber andererseits wissen wir, dass die harmonische Reihe nach dem Integralkriterium divergent ist.

**Bemerkung 1.4** Die logische Verneinung der Satzaussage liefert jedoch:

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^\infty a_k$  ist divergent.

**Beispiel 1.20**  $\sum_{k=1}^\infty \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$  ist divergent, da  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = 1 \neq 0$

**Satz 1.6**  $\sum_{k=1}^\infty |a_k|$  ist konvergent  $\Rightarrow \sum_{k=1}^\infty a_k$  ist konvergent.

**Definition 1.5** Konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^\infty |a_k|$ , so heißt  $\sum_{k=1}^\infty a_k$  absolut konvergent.

**Beispiel 1.21**  $\sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{1}{2^k}$  ist konvergent da sie absolut konvergent ist.

Denn  $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^\infty \left| (-1)^k \frac{1}{2^k} \right|$  ist eine geometrische Reihe mit  $q = \frac{1}{2}$ .

**Definition 1.6** Konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihen heißen bedingt konvergent.

**Beispiel 1.22**  $\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k}$  ist konvergent, aber die harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^\infty \left| \frac{(-1)^k}{k} \right|$  nicht. Somit ist  $\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k}$  bedingt konvergent.

### 1.1.2 Eigenschaften konvergenter Reihen

Es sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$ . Weiter gelte  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

1.  $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha A + \beta B$
2. Absolut konvergente Reihen können multipliziert werden:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_n = \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right) = AB$$

3. In konvergenten Reihen können benachbarte Glieder zusammengefasst werden, aber nicht in divergenten.
4. Nur in absolut konvergenten Reihen kann man beliebig gruppieren.
5. Konvergenz oder Divergenz einer Reihe bleiben erhalten, wenn endlich viele Glieder verändert, gestrichen oder hinzugenommen werden.

## 1.2 Funktionenreihen

### 1.2.1 Grundbegriffe

**Definition 1.7** Eine Funktionenreihe ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

Die Glieder der Reihe sind Funktionen einer reellen Variablen, die alle das gleiche Definitionsgebiet haben.

Für jedes feste  $x = x_0 \in \mathbb{R}$  ergibt die Funktionenreihe eine Zahlenreihe, die mit den aus 1.1 bekannten Kriterien untersucht werden kann.

**Beispiel 1.23**  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k : \quad \curvearrowright \quad f_k(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^k :$

geometrische Reihe mit  $q = \frac{x}{3} \implies$  Konvergenz für  $|\frac{x}{3}| < 1$ , d.h. für  $-3 < x < 3$

**Definition 1.8**

Konvergenzbereich von  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \text{ ist konvergent}\}$

**Definition 1.9**

Summe der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) = s(x)$ .  
 $s(x)$  ist eine im Konvergenzbereich definierte Funktion.

Anwendungen der Funktionenreihen:

1. Funktionswertberechnungen
2. Ersatz von komplizierten Funktionen
3. Untersuchung technischer Objekte
4. Lösung von Differentialgleichungen.....

## 1.2.2 Potenzreihen

**Definition 1.10** Eine Potenzreihe ist eine Funktionenreihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

$a_k$  heißt Koeffizient,  $x_0$  Mittelpunkt der Reihe. Die Entfernung  $r$  von  $x_0$  bis zum Rand des Konvergenzbereiches heißt Konvergenzradius.

**Bemerkung 1.5** Der Konvergenzbereich der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  ist das offene Intervall  $(x_0 - r, x_0 + r)$ , wobei die Randpunkte  $x = x_0 \pm r$  gesondert untersucht werden müssen.

**Bemerkung 1.6** Jede Potenzreihe konvergiert für  $x = x_0$  mit der Summe  $a_0$ .

**Bemerkung 1.7** Eine Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ , die nur für  $x = x_0$  konvergiert ( $r = 0$ ), heißt nirgends konvergent. Sie hat die Summe

$$\begin{aligned} s &= \left[ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \right]_{x=x_0} \\ &= [a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots]_{x=x_0} \\ &= a_0 \end{aligned}$$

Eine Potenzreihe, die für alle  $x$  aus  $\mathbb{R}$  konvergiert, heißt beständig konvergent ( $r = \infty$ ).

**Beispiel 1.24** Wegen dem Satz von Taylor gilt:  $\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_n$ ;

$$|R_n| = \left| \frac{(\cos(\theta x))^{(n+1)} x^{2n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \left| \frac{x^{2n+1}}{(n+1)!} \right| \rightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

$\curvearrowright \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}; \quad r = \infty : \quad \text{Die Reihe ist beständig konvergent.}$

**Beispiel 1.25**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$  : Divergenz für  $x = 1$ , weil harmonische Reihe  
 Konvergenz für  $x = -1$ , wegen Leibnizkriterium  
 $\curvearrowright x_0 = 0; \quad r = 1, \quad KB = [-1; 1)$

**Beispiel 1.26**  $\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k$  :  
 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(k+1)!x^{k+1}}{k!x^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1)|x| = \infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$   
 $\rightarrow$  Die Reihe ist nirgends konvergent.

### Bestimmung des Konvergenzradius:

Wir betrachten die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ .  
 $b_k = a_k(x-x_0)^k$  ist eine Zahl für jedes konkrete  $x$ . Unter Beachtung der Konvergenzkriterien für Zahlenreihen gilt dann: Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  ist konvergent, wenn gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| < 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_k|} < 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{a_k(x-x_0)^k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \cdot |x-x_0| < 1$$

$$\Rightarrow |x-x_0| < \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = r \quad \text{bzw.} \quad |x-x_0| < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = r$$

$$\Rightarrow -r < x-x_0 < r$$

$$\Rightarrow x_0 - r < x < x_0 + r$$

**Beispiel 1.27**  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}$ ;  $b_k = \frac{x^k}{2^k}$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{k+1}2^k}{2^{k+1}x^k} \right| = \left| \frac{x}{2} \right| < 1$$

$$\Rightarrow |x| < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < x < 2 \quad \Rightarrow r = 2; \quad x_0 = 0$$

Untersuchung der Randpunkte:

$$x = -2: \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k: \quad \text{unbestimmt divergent}$$

$$x = 2: \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k: \quad \text{bestimmt divergent}$$

$$\Rightarrow \text{Konvergenzbereich: } I = (-2; 2)$$

### Bemerkung 1.8

Diese Methode kann auch bei Potenzreihen angewendet werden, bei denen nur jedes  $n$ -te Glied von null verschieden ist.

**Beispiel 1.28**  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2k}}{2^k}$ ;  $b_k = \frac{(x-1)^{2k}}{2^k}$ ;  $x_0 = 1$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-1)^{2k+2}2^k}{2^{k+1}(x-1)^{2k}} \right| = \frac{|x-1|^2}{2} < 1$$

$$\Rightarrow |x - 1|^2 < 2 \iff |x - 1| < \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} < x - 1 < \sqrt{2} \Rightarrow 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{2}; x_0 = 1$$

Untersuchung der Randpunkte:

$$x = 1 - \sqrt{2}: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\sqrt{2})^{2k}}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k: \text{ bestimmt divergent}$$

$$x = 1 + \sqrt{2}: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^{2k}}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k: \text{ bestimmt divergent}$$

$$\Rightarrow \text{Konvergenzbereich: } I = (1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2})$$

### 1.2.3 Eigenschaften von Potenzreihen

#### Satz 1.7

Konvergieren die Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$  für  $|x - x_0| < R$  und stimmen ihre Summen in diesem Intervall überein, so gilt  $a_k = b_k \quad \forall k$ .

D.h. die Potenzreihendarstellung ist eindeutig.

**Bemerkung 1.9**  $f = f(x)$  sei in einer Umgebung  $U(x_0)$  von  $x_0$  beliebig oft differenzierbar. Nach dem Satz von TAYLOR gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x).$$

$$\text{Gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x \in U(x_0), \text{ so folgt}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Diese Reihenentwicklung wird TAYLOR-Reihenentwicklung genannt. Sie ist in  $U(x_0)$  konvergent und eindeutig.

**Beispiel 1.29**  $f(x) = e^x \Rightarrow f^{(k)}(x) = e^x \quad \forall k;$

$$\text{Sei } x_0 = 0. \Rightarrow f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k$$

$$\curvearrowright f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{ist konvergent } \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{s. obige Folgerung})$$

#### Weitere Eigenschaften von Potenzreihen:

1. Potenzreihen können im Konvergenzbereich gliedweise differenziert und integriert werden; Der Konvergenzbereich bleibt dabei erhalten.

**Beispiel 1.30**  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

ist eine konvergente geometrische Reihe für  $|x| < 1$ .

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots \quad \text{für } |x| < 1$$

$$\curvearrowright \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

2. Das Produkt von Potenzreihen bildet im Durchschnitt der Konvergenzbereiche der beiden Reihen, die als Faktor auftreten, wieder eine konvergente Potenzreihe.

**Beispiel 1.31**  $y = \sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$

$$\begin{aligned} y &= \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots\right) \\ &= x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + \frac{1}{5!}x^6 - \dots \\ &\quad - \frac{1}{3!}x^4 + \left(\frac{1}{3!}\right)^2 x^6 - \dots \\ &\quad + \frac{1}{5!}x^6 - \dots \end{aligned}$$

$$y = x^2 - \frac{2}{3!}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \dots$$

$$\text{da } \frac{2}{5!} + \left(\frac{1}{3!}\right)^2 = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{36+60}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{2}{5 \cdot 3 \cdot 3}$$

3. Division von Potenzreihen

**Satz 1.8** Es seien  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ,  $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  gegeben;  $g(0) = b_0 \neq 0$ . Dann lässt sich  $\frac{f(x)}{g(x)}$  in einer gewissen Umgebung von  $x = 0$  in eine Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  entwickeln.

**Beispiel 1.32**  $y = \tan x = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \dots$

(ungerade Exponenten, da  $\tan x$  eine ungerade Funktion ist)

$$\tan x \cdot \cos x = \sin x$$

$$(c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \dots) \cdot \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 - \dots\right) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$

$$c_1 x + \left(-\frac{c_1}{2!} + c_3\right)x^3 + \left(\frac{c_1}{4!} - \frac{c_3}{2!} + c_5\right)x^5 + \dots = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$

$$\curvearrowright c_1 = 1$$

$$c_3 - \frac{c_1}{2!} = -\frac{1}{3!} \quad \Rightarrow \quad c_3 = \frac{1}{3}$$

$$c_5 + \frac{c_1}{4!} - \frac{c_3}{2!} = \frac{1}{5!} \quad \Rightarrow \quad c_5 = \frac{2}{15} \dots$$

$$\curvearrowright \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

### 1.2.4 Anwendungen der Potenzreihen

1. Beweis der Eulerschen Formel  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\begin{aligned}
 e^{ix} &= 1 + \frac{(ix)}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots \\
 &= 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \dots \\
 &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots\right) \\
 &= \cos x + i \sin x
 \end{aligned}$$

2. Gliedweise Integration

- Das Integral  $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ , der sogenannte Integralsinus, ist geschlossen nicht lösbar.

$$\begin{aligned}
 \text{Si}(x) &= \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - + \dots\right) dt \\
 &= x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - + \dots
 \end{aligned}$$

- $\int_0^{0.5} \sqrt{1+x^3} dx = \int_0^{0.5} \left(1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{16}x^9 - + \dots\right) dx$   
 $= \left[x + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{56}x^7 + \frac{1}{160}x^{10} - + \dots\right]_0^{0.5}$   
 $\approx \frac{1}{2} + \frac{1}{128} - \frac{1}{7168} + - \dots \approx 0.50768$

3. Grenzwerte unbestimmter Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - x\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots\right)}{x - x\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \dots\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + - \dots}{\frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{8} + \dots} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

4. Näherungsweise Berechnung von Funktionswerten

$$\cos 0.5 = 1 - \frac{1}{2!2^2} + \frac{1}{4!2^4} - \frac{1}{6!2^6} + - \dots \approx 0.87758$$

## 1.3 FOURIER-Reihen (J.B. Fourier 1768-1830)

### Probleme:

- einheitliche Darstellung von periodischen Vorgängen, speziell Schwingungen (Akustik, ET,...)
- Potenzfunktionen sind Schwingungen aber nicht gut angepasst.
- Besser eignen sich harmonisch verwandte Sinus- und Cosinusfunktionen.
- Jede Schwingung ist eine Linearkombination der Grundschiwingung und harmonischer Oberschwingungen. (s. Saiteninstrumente)

⇒ Wir betrachten trigonometrische Funktionenreihen der Form:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega kt + \varphi_k) \quad 1. \text{ Art}$$

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \quad 2. \text{ Art}$$

**Definition 1.11** Solche Funktionenreihen der 1. bzw. 2. Art heißen *Fourierreihen*.

Beide Formen sind äquivalent:

$$\begin{aligned} A_k \sin(\omega kt + \varphi_k) &= A_k (\sin k\omega t \cos \varphi_k + \cos k\omega t \sin \varphi_k) \\ &= A_k \cos \varphi_k \sin k\omega t + A_k \sin \varphi_k \cos k\omega t \\ &= a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t \end{aligned}$$

⇒

$$\begin{aligned} a_k &= A_k \sin \varphi_k, & b_k &= A_k \cos \varphi_k \\ A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, & \varphi_k &= \arctan \frac{a_k}{b_k}. \end{aligned}$$

### Bezeichnungen:

$A_k$  : Amplitude;                       $\varphi_k$  : Phasenkonstante  
 $\omega$  : Kreisfrequenz;                     $T = \frac{2\pi}{\omega}$  : Periode

### Anwendungen:

- Untersuchung von Schwingungsverläufen bei nichtsinusförmiger Erregung, insbesondere Spannungen und Ströme, da viele Vorgänge erst mit nichtsinusförmigen Schwingungen realisierbar sind, z.B. sägezahnförmige Spannungen bei der Ablenkung in Bildröhren, Rechteckimpulse als Takt- und Synchronsignale, ...

- Dimensionierung von Filtern, z.B. von Bandpass-, Hochpass-, Tiefpassfiltern, Mehrwegboxen, ...
- Hilfsmittel in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, z.B. zur Lösung von Wärmeleitproblemen oder der Lösung der Gleichung der schwingenden Saite,...

### 1.3.1 Die komplexe Form der FOURIER-Reihe

Aus dem Kapitel Komplexe Zahlen ist die Eulersche Formel bekannt:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \cos y + i \sin y & (*) \Rightarrow & e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y), \text{ d.h.} \\ e^{-iy} &= \cos y - i \sin y & (**) \end{aligned}$$

Aus (\*) und (\*\*) kann die komplexe Darstellung der Funktionen  $\sin y$  und  $\cos y$  gewonnen werden:

(\*) + (\*\*) ergibt:

$$\begin{aligned} 2 \cos y &= e^{iy} + e^{-iy} \\ \cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \end{aligned}$$

(\*) - (\*\*) ergibt:

$$\begin{aligned} 2i \sin y &= e^{iy} - e^{-iy} \\ \sin y &= \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{aligned}$$

Die 2. Art der Fourierreihe geht damit über in

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k \frac{1}{2} (e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}) + b_k \frac{1}{2i} (e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{a_k}{2} (e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}) - \frac{b_k}{2} i (e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ik\omega t} \right]. \end{aligned}$$

Wir setzen nun:  $c_0 = \frac{a_0}{2}$ ,  $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ ;  $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = \overline{c_k}$ .

Damit erhalten wir die 3. Art der Fourierreihe:

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}.$$

Zu beachten ist dabei die Beziehung  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Die Koeffizienten  $c_k$  heißen komplexe Amplituden.

Es gilt:  $|c_k| = \frac{1}{2}|a_k \pm ib_k| = \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{1}{2}A_k$ .

Die Folge der  $c_k$  nennt man auch Spektralfolge zu  $f(t)$ .  
Umrechnungsformeln für die 2. Form der Fourierreihe:

$$a_k = c_k + c_{-k} \quad \text{für } k \geq 1; \quad a_0 = 2c_0$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) \quad \text{für } k \geq 1; \quad (b_0 = 0)$$

Die weitere Arbeit erfolgt mit der komplexen Form, weil sie die geschlossenste Darstellung ist und hauptsächlich in der ET eingesetzt wird.

### Probleme:

1. Für welche Funktionen existiert eine Fourierreihendarstellung?
2. Wie ist die Konvergenz der Fourierreihe gegen  $f(t)$  beschaffen?
3. Wie werden die Koeffizienten  $c_k$  berechnet?

### 1.3.2 Berechnung der Fourierkoeffizienten $c_k$

Hilfsrechnung:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ;  $k, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{ik\omega t} \cdot e^{-ik\omega t} dt &= \int_0^T 1 dt = T \\ \int_0^T e^{ik\omega t} \cdot e^{-in\omega t} dt &= \int_0^T e^{i(k-n)\omega t} dt \\ &= \frac{1}{i\omega(k-n)} [e^{i(k-n)\omega t}]_0^T \\ &= \frac{1}{i\omega(k-n)} [e^{i(k-n)\frac{2\pi}{T}T} - e^0] \\ &= \frac{1}{i\omega(k-n)} [\cos(k-n)2\pi + i \sin(k-n)2\pi - 1] \\ &= 0, \text{ da } \cos(k-n)2\pi = 1 \text{ und } \sin(k-n)2\pi = 0 \end{aligned}$$

Man sagt: das Funktionensystem  $\{e^{ik\omega t}\}_{k=-\infty}^{\infty}$  ist orthogonal.

**Annahme:**

$f(t)$  ist durch eine auf  $[0, T]$  konvergente Fourierreihe darstellbar:  $f(t) \sim \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{i\omega l t}$ .  
Dann gilt:

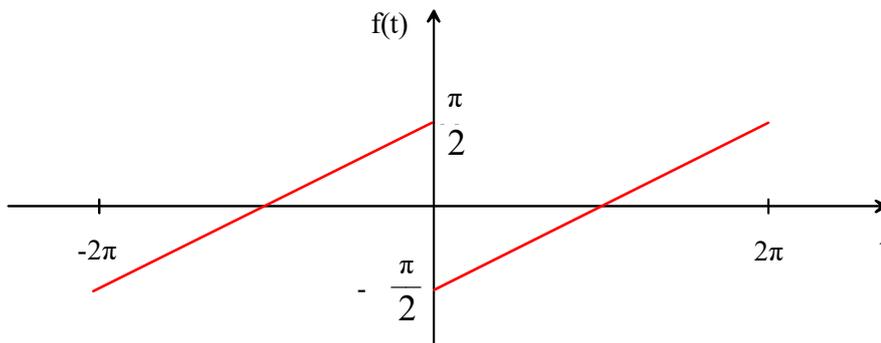
$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt &= \int_0^T \left( \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{i\omega l t} \right) \cdot e^{-ik\omega t} dt \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \int_0^T e^{i\omega l t} \cdot e^{-ik\omega t} dt \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \begin{cases} T & \text{für } l = k \\ 0 & \text{für } l \neq k \end{cases} = c_k T \quad (\text{s. Hilfsrechnung!}) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt \quad (+)$$

**Satz 1.9** Ist  $f(t)$  im Intervall  $[0, T]$  stückweise stetig differenzierbar, so kann  $f(t)$  mit (+) als Fourierreihe dargestellt werden. Hat  $f(t)$  bei  $t = t_0$  eine Sprungstelle, so konvergiert die Reihe im Punkt  $t_0$  gegen den Wert  $\frac{1}{2}(\lim_{t \rightarrow t_0-0} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0+0} f(t))$ . Man schreibt deshalb:  $f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$ .

**Beispiel 1.33**  $f(t) = \frac{1}{2}t - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}(t - \pi)$  für  $0 < t < 2\pi$ ;  $T = 2\pi$ ;  $\omega = 1$



$$\begin{aligned}
f(t) &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \\
c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{i0t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (t - \pi) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} t^2 - \pi t \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{2} 4\pi^2 - 2\pi^2 \right] = 0 \\
c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (t - \pi) e^{-ikt} dt \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{(t - \pi)}{ik} e^{-ikt} + \frac{1}{ik} \int e^{-ikt} dt \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{(t - \pi)}{ik} e^{-ikt} - \frac{1}{i^2 k^2} e^{-ikt} \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[ e^{-ikt} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{(t - \pi)}{ik} \right) \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[ (\cos 2k\pi - i \sin 2k\pi) \left( \frac{1}{k^2} - \frac{\pi}{ik} \right) - e^0 \left( \frac{1}{k^2} + \frac{\pi}{ik} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[ \left( \frac{1}{k^2} - \frac{\pi}{ik} \right) - \left( \frac{1}{k^2} + \frac{\pi}{ik} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[ -2 \frac{\pi}{ik} \right] = -\frac{1}{2ik} = \frac{i}{2k}
\end{aligned}$$

Zusammenfassung:

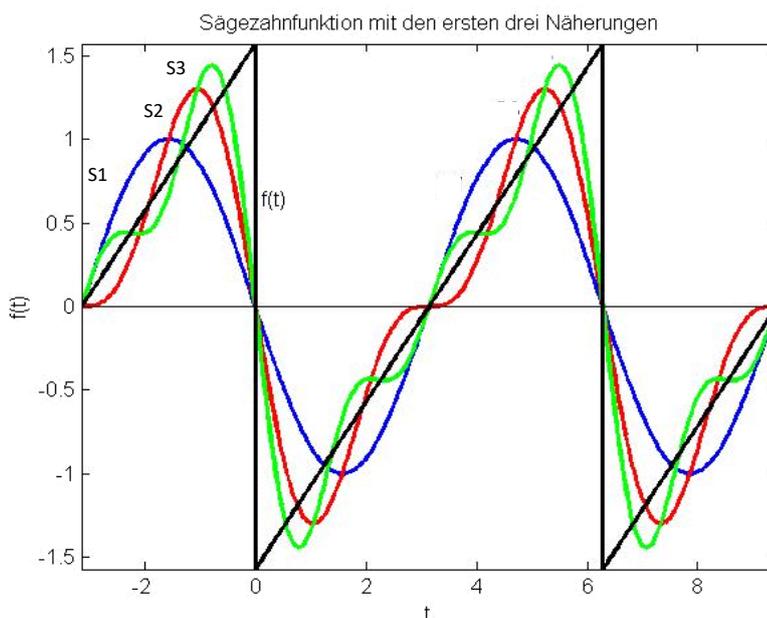
$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} = 0 + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{i}{2k} e^{ikt} = \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{i}{2k} e^{ikt}$$

Unter Beachtung von

$$a_0 = 2c_0 = 0; \quad a_k = c_k + c_{-k} = \frac{i}{2k} + \frac{i}{2(-k)} = 0$$

$b_k = i(c_k - c_{-k}) = i\left(\frac{i}{2k} - \frac{i}{2(-k)}\right) = i\frac{2i}{2k} = -\frac{1}{k}$  gilt weiterhin:

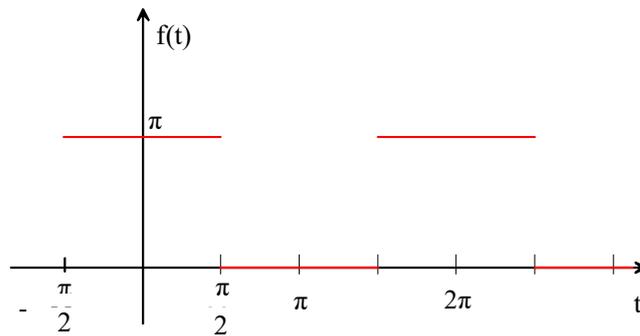
$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{k} \sin kt = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kt \end{aligned}$$



**Bemerkung 1.10**  $e^{i\omega kt} = \cos(\omega kt) + i \sin(\omega kt) = \cos\left(\frac{2\pi}{T} kt\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{T} kt\right)$  ist eine periodische Funktion mit der Periode  $p = \frac{T}{k}$ .

**Bemerkung 1.11** Ist  $f(t)$   $p$ -periodisch, so gilt für alle  $a \in \mathbb{R}$ :  $\int_a^{a+p} f(t) dt = \int_0^p f(t) dt$ .  
 $\Rightarrow$  In der Formel für  $c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega kt} dt$  ist der Integrand  $T$ -periodisch. Das Integral muss nur über eine Periode erstreckt werden, egal wo sie liegt. Im Allgemeinen verwendet man ein Intervall der Länge  $T$  in der Umgebung des Nullpunktes.

$$f(t) = \begin{cases} \pi & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \quad T = 2\pi; \quad \omega = 1$$



$$\begin{aligned}
 f(t) &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \\
 c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(t) e^{0t} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi dt = \frac{1}{2\pi} [\pi t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{\pi}{2} \\
 c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(t) e^{-ikt} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{\pi}{ik} e^{-ikt} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{\pi}{ik} (e^{-ik\frac{\pi}{2}} - e^{-ik(-\frac{\pi}{2})}) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{ik} [e^{ik\frac{\pi}{2}} - e^{-ik\frac{\pi}{2}}] \\
 &= \frac{1}{k} \frac{1}{2i} [e^{ik\frac{\pi}{2}} - e^{-ik\frac{\pi}{2}}] = \frac{1}{k} \sin k \frac{\pi}{2} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{für } k = -3, 1, 5, 9, \dots \\ 0 & \text{für } k = 2, 4, 6, 8, \dots \\ -\frac{1}{k} & \text{für } k = -1, 3, 7, 11, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

Zusammenfassung:

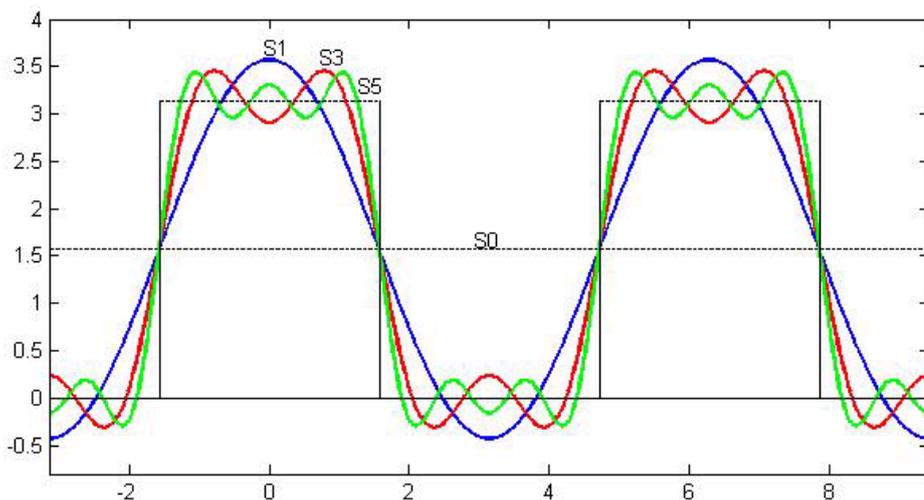
$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{1}{k} \sin k \frac{\pi}{2} e^{ikt}$$

Unter Beachtung von  $a_0 = 2c_0 = \pi$ ; gilt weiterhin:

$$a_k = c_k + c_{-k} = \begin{cases} \frac{1}{k} \cdot 1 + \frac{1}{-k}(-1) = \frac{2}{k} & \text{für } k = 1, 5, 9, \dots \\ 0 & \text{für } k = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{1}{k}(-1) + \frac{1}{-k} \cdot 1 = -\frac{2}{k} & \text{für } k = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

$$b_k = i(c_k - c_{-k}) = \begin{cases} i\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\right) = 0 & \text{für } k = 1, 5, 9, \dots \\ 0 & \text{für } k = 2, 4, 6, \dots \\ i\left(-\frac{1}{k} - \left(-\frac{1}{k}\right)\right) = 0 & \text{für } k = 3, 7, 11, \dots \end{cases} = 0 \quad \forall k$$

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1,5,9,\dots}^{\infty} \frac{2}{k} \cos kt - \sum_{k=3,7,\dots}^{\infty} \frac{2}{k} \cos kt \end{aligned}$$



**Bemerkung 1.12** Sei  $f(t)$  gerade  $\Rightarrow f(-t) = f(t)$

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) e^{-ik\omega t} dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt \right] \\
 &= \frac{1}{T} \left[ \int_0^{\frac{T}{2}} f(-t_{neu}) e^{ik\omega t_{neu}} dt_{neu} + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt \right] \quad \text{mit } t = -t_{neu} \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) (e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}) dt \quad \text{wegen gerader Funktion} \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) (\cos k\omega t + i \sin k\omega t + \cos k\omega t - i \sin k\omega t) dt \\
 &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt \quad \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.13**

Wegen  $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$  folgt  $b_k = 0$ . Die Reihe ist eine Cosinusreihe:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t.$$

**Bemerkung 1.14**

Wegen  $\cos k\omega t = \cos(-k\omega t)$  folgt  $c_k = c_{-k}$  und damit  $a_k = c_k + c_{-k} = 2c_k$ .

**Bemerkung 1.15** Sei  $f(t)$  ungerade  $\Rightarrow f(-t) = -f(t)$ .

Eine analoge Rechnung zu Bemerkung 1.12 führt zu

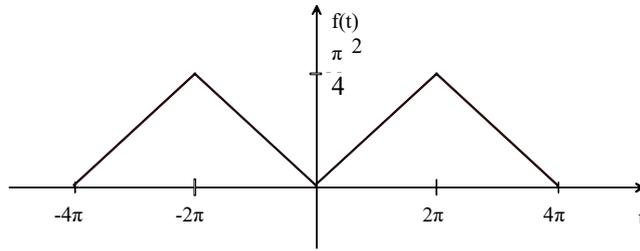
$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) (-e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) (-\cos k\omega t - i \sin k\omega t + \cos k\omega t - i \sin k\omega t) dt \\
 &= \frac{-2i}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t dt \quad (\text{rein imaginär})
 \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.16**

Wegen  $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$  folgt  $a_k = 0$  und  $b_k = -\frac{2}{i}c_k$ . Die Reihe ist eine Sinusreihe:

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t.$$

**Beispiel 1.34**  $f(t) = \frac{\pi}{8}t$  : gerade Funktion,  $T = 4\pi$ ,  $\omega = \frac{1}{2}$



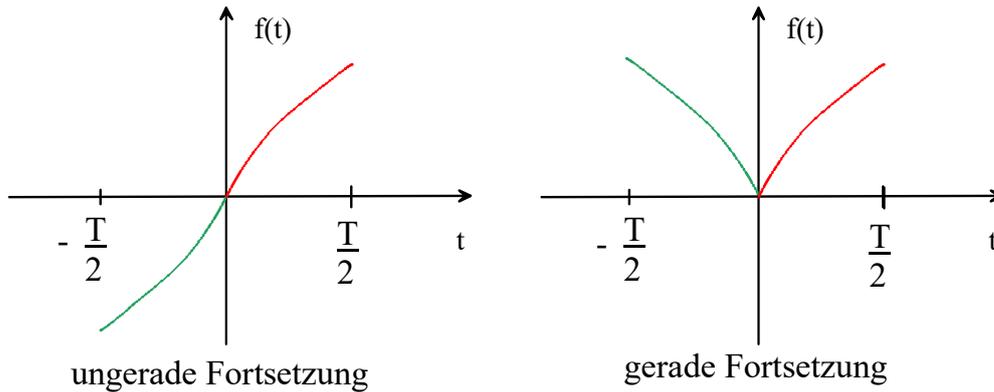
$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{2}{T} \int_0^{2\pi} f(t) dt \\ &= \frac{2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{8} t dt \\ &= \frac{1}{16} \frac{1}{2} [t^2]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{32} 4\pi^2 = \frac{1}{8} \pi^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt \\ &= \frac{2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi}{8} t \cos\left(k \frac{2\pi}{4\pi} t\right) dt \\ &= \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} t \cos\left(k \frac{t}{2}\right) dt \\ &= \frac{1}{16} \left[ \frac{2t}{k} \sin \frac{kt}{2} - \frac{2}{k} \int \sin \frac{kt}{2} dt \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{16} \left[ \frac{2t}{k} \sin \frac{kt}{2} + \frac{2}{k} \cdot \frac{2}{k} \cos \frac{kt}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{16} \left[ \frac{2 \cdot 2\pi}{k} \sin \frac{k2\pi}{2} + \frac{2}{k} \cdot \frac{2}{k} \cos \frac{k2\pi}{2} - 0 - \frac{4}{k^2} \cos 0 \right] \\ &= \frac{1}{16} \left[ \frac{4}{k^2} (-1)^k - \frac{4}{k^2} \right] \\ &= \frac{1}{16} \frac{4}{k^2} [(-1)^k - 1] = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ -\frac{1}{2k^2} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

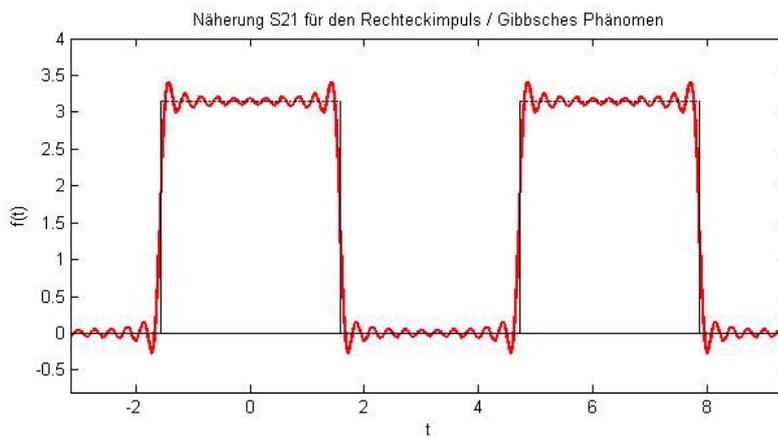
$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{\pi^2}{8} + \sum_{\substack{k=-\infty, k \neq 0 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} -\frac{1}{2k^2} e^{ikt/2}$$

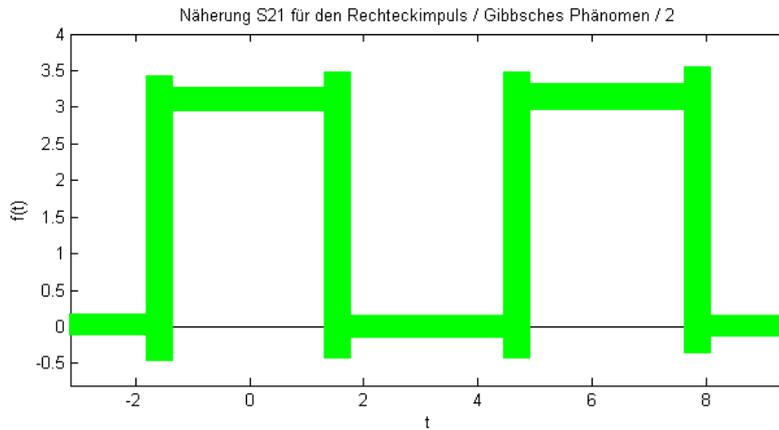
**Bemerkung 1.17** Ist die Funktion nur auf einem endlichen Intervall  $[a, a + \frac{T}{2}]$  vorgegeben, kann sie auf  $\mathbb{R}$  periodisch fortgesetzt werden. Danach ist dann eine Fourierreihenentwicklung möglich. Die Fortsetzung sollte an den technischen Hintergrund angepasst werden.

**Beispiel 1.35** Sei  $a = 0$ .



**Bemerkung 1.18** Das Gibbsche Phänomen:





Die Approximation der Funktion erfolgt nach dem Prinzip

$$\int_0^T |f - s_N|^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Daraus ergibt sich einerseits die Mittelwertseigenschaft der Fourierreihe an der Sprungstelle und andererseits ein Überschwingen der Partialsummen  $s_N(t)$  einer Fourierreihe in der Umgebung der Sprungstelle von  $f(t)$  für hinreichend großes  $N$  um  $\approx 17.89\%$ . Dieses Überschwingen wurde von J. W. Gibbs (1839-1903) beschrieben und heißt deshalb Gibbsches Phänomen.

### 1.3.3 Anwendungen der Fourierreihen

In der Elektrotechnik wird oft auch mit der 1. Art der Fourierreihe gearbeitet:

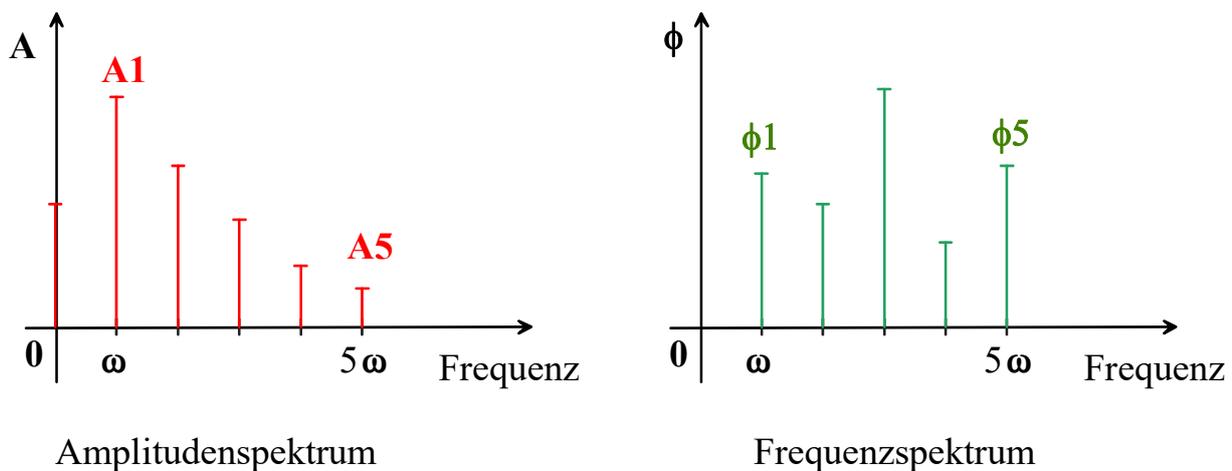
$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega k t + \varphi_k).$$

Es werden die Amplituden  $A_k$  und die Phasenverschiebung  $\varphi_k$  in Abhängigkeit von der Frequenz  $\omega$  untersucht. Es gilt:

$$A_k = 2|c_k| \quad \text{für } k \geq 1; \quad a_0 = 2c_0$$

$$\varphi_k = \arctan \frac{c_k + c_{-k}}{i(c_k - c_{-k})} \quad \text{für } k \geq 1; \quad \nabla \varphi_0$$

$A_k$  und  $\varphi_k$  werden im Amplituden- bzw. Phasen- oder Frequenzspektrum dargestellt. Amplituden- bzw. Frequenzspektren sind diskrete Spektren:

**Beispiel 1.36** *Klirrfaktor*

Der Klirrfaktor dient zur Beurteilung der Abweichung einer nichtsinusförmigen Wechselstromgröße  $f(t)$  vom Verlauf einer rein sinusförmigen Wechselstromgröße, die durch die Grundwelle ( $k=1$ ) dargestellt wird. Z.B. betrachtet man Ein- und Ausgang eines elektrischen Bauteils (Verstärker, Filter,...), an das eine rein sinusförmige Größe angelegt wird und untersucht die Abweichung der Ausgangsgröße von der Eingangsgröße. Der Klirrfaktor ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 k &= \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} A_k^2}{\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} 4|c_k|^2}{\sum_{k=1}^{\infty} 4|c_k|^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} |c_k|^2}{\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)}{\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)}}
 \end{aligned}$$

Bei einem Dreieckstrom  $f(t) = \frac{\pi}{4}|t|$   $t \in [-\pi, \pi]$  gilt z.B.:

$$\begin{aligned}
 f(t) &\sim \frac{\pi^2}{8} - \frac{\cos t}{1^2} - \frac{\cos 3t}{3^2} - \frac{\cos 5t}{5^2} - \dots \\
 k &= \sqrt{\frac{\frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots}{\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots}} \\
 &= \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} - 1}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}}} \\
 &= \sqrt{\frac{\frac{\pi^4}{96} - 1}{\frac{\pi^4}{96}}} \approx 0.12
 \end{aligned}$$

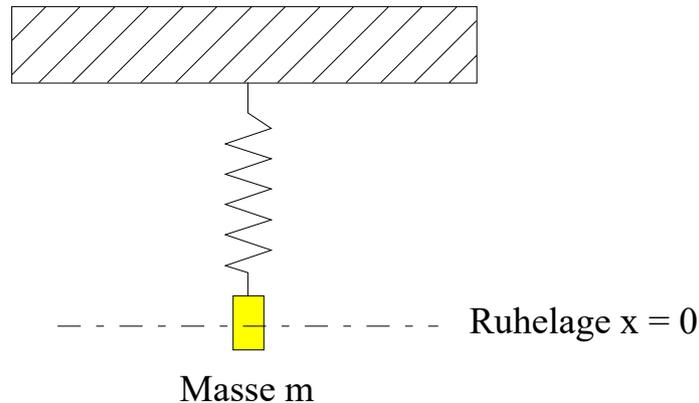
**Weitere Anwendungen:**

1. Analyse und Synthese von Signalen, Dimensionierung von Filtern
2. Berechnung linearer Stromkreise bei nicht sinusförmiger Anregung
3. Lösung von Differentialgleichungen, die Schwingungsprozesse beschreiben

# 2 Gewöhnliche Differentialgleichungen

## 2.1 Einleitung und Grundbegriffe

**Beispiel 2.1** Betrachten Federschwinger mit der Federkonstanten  $k > 0$  :



Gesucht:

Gleichung zur Berechnung der Auslenkung  $x = x(t)$  der Masse  $m$  aus der Ruhelage:

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  gilt:

Anfangsauslenkung  $x(0) = x_0$

Anfangsgeschwindigkeit  $\dot{x}(0) = v_0$

Beschleunigung der Masse:  $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

Rücktreibende Federkraft :  $F = m \cdot a$  (NEWTON)

$$-kx = m \cdot \ddot{x}$$

$$\implies A) \quad m\ddot{x} + kx = 0$$

Wenn die Schwingung nicht im Vakuum stattfindet, kommt die Reibungskraft hinzu:

$F = r\dot{x}$ . Sie wirkt der Schwingung entgegen:  $-kx - r\dot{x} = m \cdot \ddot{x}$

$$\implies B) \quad m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

Die Schwingung kann von außen durch eine aufgeprägte Kraft  $F(t)$  beeinflusst werden:

$$\implies C) \quad m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$$

**Definition 2.1** Eine Gleichung, die als gesuchte Größe eine Funktion einer Veränderlichen und Ableitungen dieser enthält, heißt gewöhnliche Differentialgleichung.

**Bemerkung 2.1** Es ist wichtig, dass die gesuchte Funktion und deren Ableitungen in einer Differentialgleichung nur an einer Argumentstelle auftreten.

**Definition 2.2** Die Ordnung der Differentialgleichung wird durch die höchste auftretende Ableitung der gesuchten Funktion bestimmt.

Im Beispiel von oben ist damit die Ordnung der Differentialgleichung 2.

**Definition 2.3** Enthält die Differentialgleichung additive Terme ohne die gesuchte Funktion und deren Ableitungen, so heißt die Differentialgleichung inhomogen, anderenfalls homogen.

Im Beispiel von oben ist folglich die Differentialgleichung C) inhomogen, die Differentialgleichungen A) und B) sind homogen.

**Definition 2.4** Sind in einer Differentialgleichung die gesuchte Funktion und ihre Ableitungen nur linear miteinander verknüpft, so heißt die Differentialgleichung linear, anderenfalls nichtlinear.

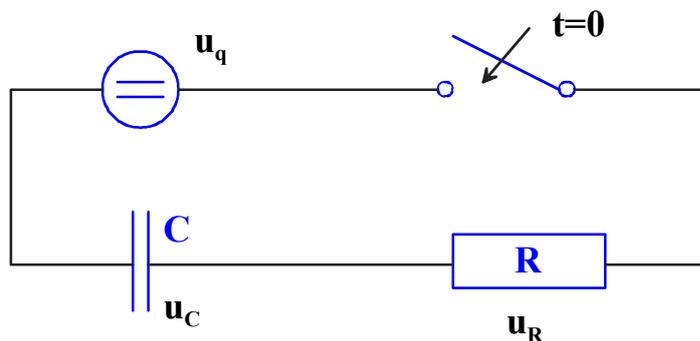
Im Beispiel von oben sind alle 3 Differentialgleichungen linear, da  $x$ ,  $\dot{x}$  und  $\ddot{x}$  durch eine Linearkombination miteinander verbunden sind.

**Definition 2.5** Treten in einer Differentialgleichung die gesuchte Funktion und ihre Ableitungen ausschließlich als Argumente in Potenzfunktionen auf, so bestimmt der höchste Exponent dieser Potenzfunktionen den Grad der Differentialgleichung.

Im Beispiel von oben ist der Grad aller 3 Differentialgleichungen 1.

Gewöhnliche Differentialgleichungen sind häufig in Naturwissenschaft und Technik anzutreffen:

**Beispiel 2.2** Beschreibung von elektrischen Stromkreisen:



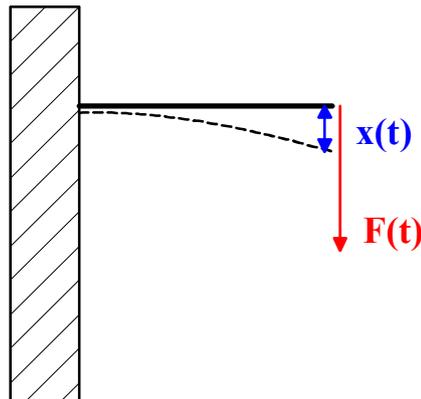
$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_q$$

**Beispiel 2.3** Beschreibung von organischem Wachstum und Zerfall:

$$-\frac{dx}{dt} = kx$$

mit  $x$  : Masse des zerfallenden (radioaktiven) Stoffes und  $k$  : Zerfallskonstante,  $k > 0$

**Beispiel 2.4** Beschreibung eines einseitig eingespannten Stabes:



$$x^{(4)} + \sqrt{\frac{F}{\alpha}} \ddot{x} = 0,$$

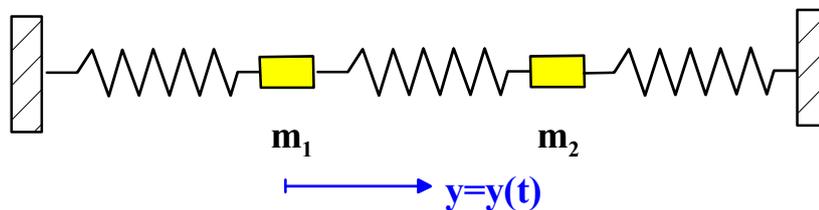
wobei  $\alpha$  ein Materialparameter ist.

**Beispiel 2.5** Beschreibung eines mathematischen Pendels:

$$mg \sin \phi(t) = ml\ddot{\phi}(t)$$

mit  $\phi$  : Ausschlagswinkel,  $g$  : Erdbeschleunigung,  $m$  : Masse

**Beispiel 2.6** Beschreibung von gekoppelten Federschwingern:



$$ay^{(4)} + b\ddot{y} = cy, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Im Folgenden wird Beispiel 2.2 zur Lösung ausgewählt. Reicht die oben angegebene Gleichung aus, um  $u_c$  eindeutig zu bestimmen?

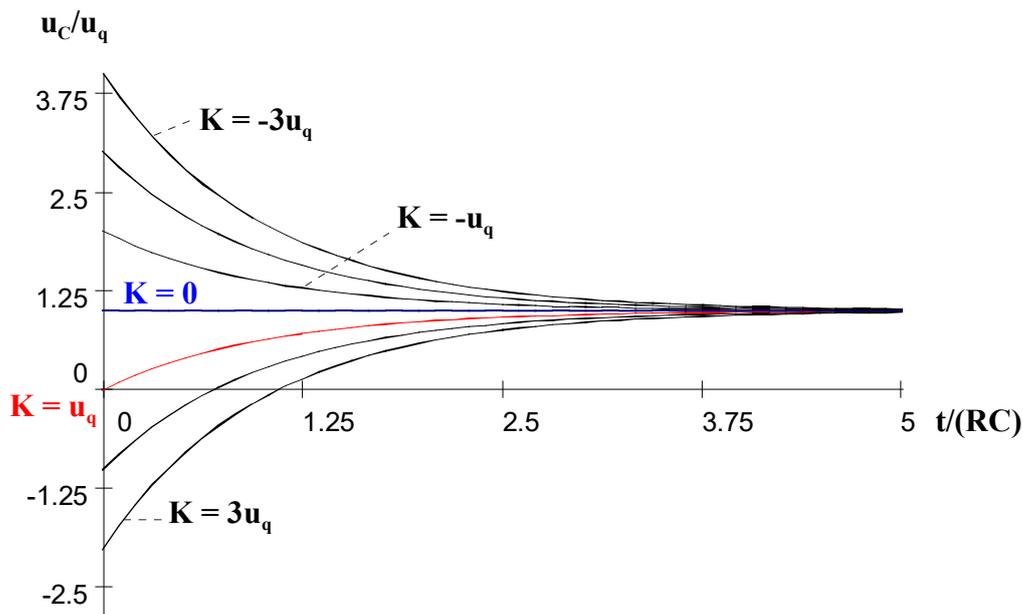
$$\begin{aligned}
 RC \frac{du_c}{dt} &= u_q - u_c && \text{Voraussetzung: } u_q - u_c \neq 0 \\
 &&& \curvearrowright u_c = u_q = \text{const. ist Lösung} \\
 \frac{du_c}{u_q - u_c} &= \frac{dt}{RC} && \text{Substitution: } z = u_q - u_c \\
 &&& dz = -du_c \\
 \int \frac{dz}{z} &= - \int \frac{1}{RC} dt \\
 \ln |z| &= -\frac{1}{RC}t + \tilde{K} \\
 |u_q - u_c| &= e^{-\frac{t}{RC}} \cdot e^{\tilde{K}} && K = \begin{cases} e^{\tilde{K}} & \text{für } u_q - u_c > 0 \\ -e^{\tilde{K}} & \text{für } u_q - u_c < 0 \end{cases} \\
 u_q - u_c &= Ke^{-\frac{t}{RC}}; \quad K \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
 u_c &= u_q - Ke^{-\frac{t}{RC}}
 \end{aligned}$$

Mit  $K = 0$  wird die Lösung  $u_c = u_q$  erreicht. Damit ergibt sich

$$u_c = u_q - Ke^{-\frac{t}{RC}}; \quad K \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung ist durch die Differentialgleichung nicht eindeutig bestimmt. Durch die frei wählbare Konstante  $K$  gibt es unendlich viele Funktionen, die die Ausgangsgleichung erfüllen. Zur Auswahl einer einzigen sind Zusatzinformationen nötig, z.B. über den Ausgangszustand bei  $t = 0$ :

$$\begin{aligned}
 u_c(0) &= u_c(t < 0) = 0 && \curvearrowright \\
 0 &= u_q - Ke^0 && \implies K = u_q \\
 u_c &= u_q(1 - e^{-\frac{t}{RC}})
 \end{aligned}$$



Geometrische Interpretation: Durch die Anfangsbedingung erfolgt die Auswahl der Kurve mit  $K = u_q$  aus der Kurvenschar.

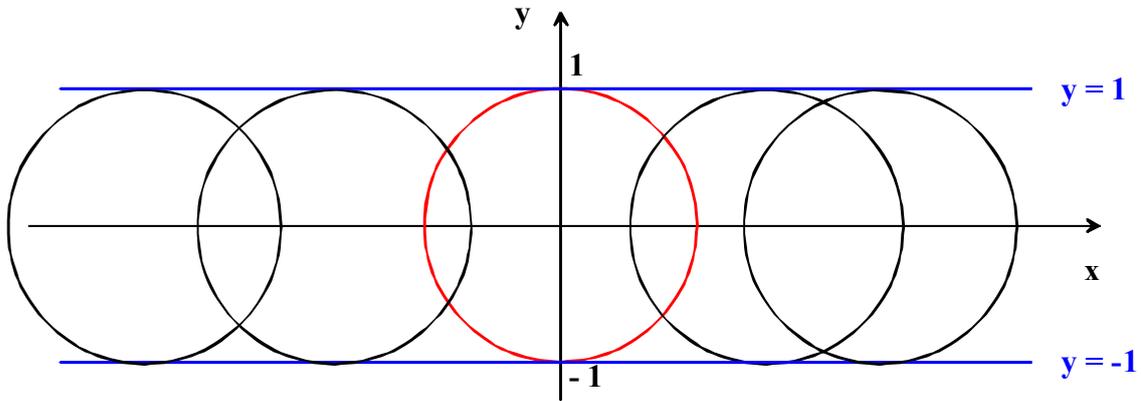
**Definition 2.6** Die Lösung (Das Integral) einer gewöhnlichen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung ist jede, in ihrem Definitionsgebiet  $n$ -mal stetig differenzierbare Funktion, die mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung erfüllt.

Es werden drei Lösungstypen unterschieden:

1. Die allgemeine Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung enthält  $n$  unabhängig wählbare Konstanten  $C_1, C_2, \dots, C_n$  (Parameter):  
 $x = x(t, C_1, C_2, \dots, C_n)$  bzw.  $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ .  
 Die grafische Interpretation ist eine  $n$ -parametrische Kurvenschar.
2. Eine spezielle (partikuläre) Lösung erhält man aus der allgemeinen Lösung durch spezielle Wahl der Konstanten  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , z.B. um Zusatzbedingungen zu erfüllen. Zusatzbedingungen an einer einzigen Stelle  $t_0 \in D_f$ :  $x(t_0), \dot{x}(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)$  bzw.  $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$  heißen Anfangsbedingungen oder Anfangswerte, die Aufgabe Anfangswertaufgabe (AWA). Zusatzbedingungen an mehreren Stellen von  $D_f$  nennt man Randbedingungen oder Randwerte, die Aufgabe Randwertaufgabe (RWA).

3. Als singular bezeichnet man Lösungen, die man nicht durch eine spezielle Konstantenwahl aus der allgemeinen Lösung erhalten kann.

**Beispiel 2.7** Betrachte die Differentialgleichung  $y^2((y')^2 + 1) - 1 = 0$ .  
Deren allgemeine Lösung lautet:  $(x - C)^2 + y^2 = 1$ .



*Nachweis: Ableitung der allgemeinen Lösung:*

$$\begin{aligned} 2(x - C) + 2yy' &= 0 \quad \curvearrowright \\ y' &= -\frac{x - C}{y} \end{aligned}$$

Zusammen mit der nach  $y^2$  umgestellten allgemeinen Lösung  $y^2 = 1 - (x - C)^2$  ergibt sich nach dem Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} y^2((y')^2 + 1) - 1 &= [1 - (x - C)^2] \left( \left( -\frac{x - C}{y} \right)^2 + 1 \right) - 1 \\ &= [1 - (x - C)^2] \left( \frac{(x - C)^2}{y^2} + 1 \right) - 1 \\ &= [1 - (x - C)^2] \left( \frac{(x - C)^2}{1 - (x - C)^2} + 1 \right) - 1 \\ &= (x - C)^2 + 1 - (x - C)^2 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist eine Schar von Kreisen mit dem Radius  $r = 1$  und den Mittelpunkten  $M = (C; 0)^T$ :

Z.B. ist die spezielle Lösung mit  $C = 0$  der Einheitskreis. Die Einhüllenden der Kurvenschar  $y = \pm 1$  sind ebenfalls Lösungen der Differentialgleichung:

$$y^2((y')^2 + 1) - 1 = 1(0^2 + 1) - 1 = 0$$

*Diese können aber nicht durch spezielle Konstantenwahl aus der allgemeinen Lösung erhalten werden und sind deshalb singuläre Lösungen.*

## 2.2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

### 2.2.1 Richtungsfeld\*

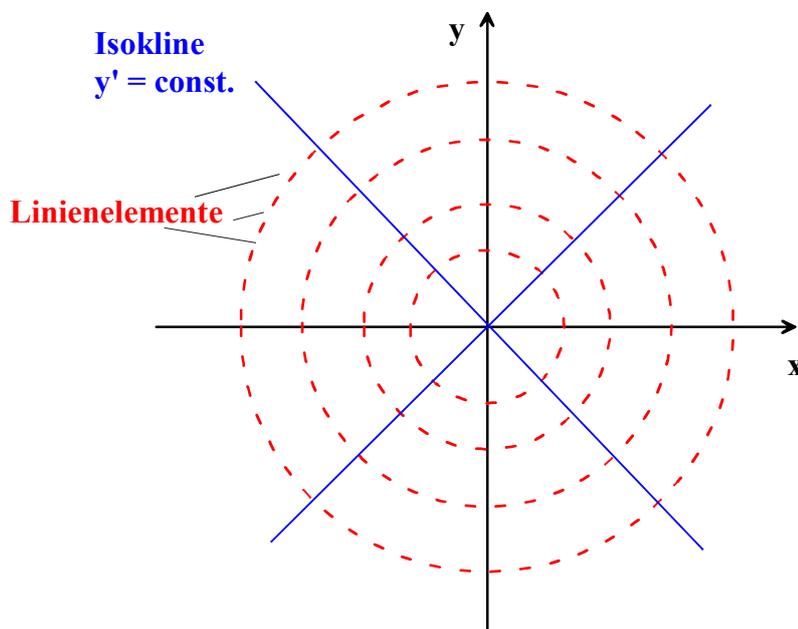
Die allgemeine Form einer Differentialgleichung 1. Ordnung lautet:

$$\begin{aligned} \text{explizite Form: } & y' = f(x, y) \\ \text{implizite Form: } & F(x, y, y') = 0. \end{aligned}$$

#### Geometrische Veranschaulichung:

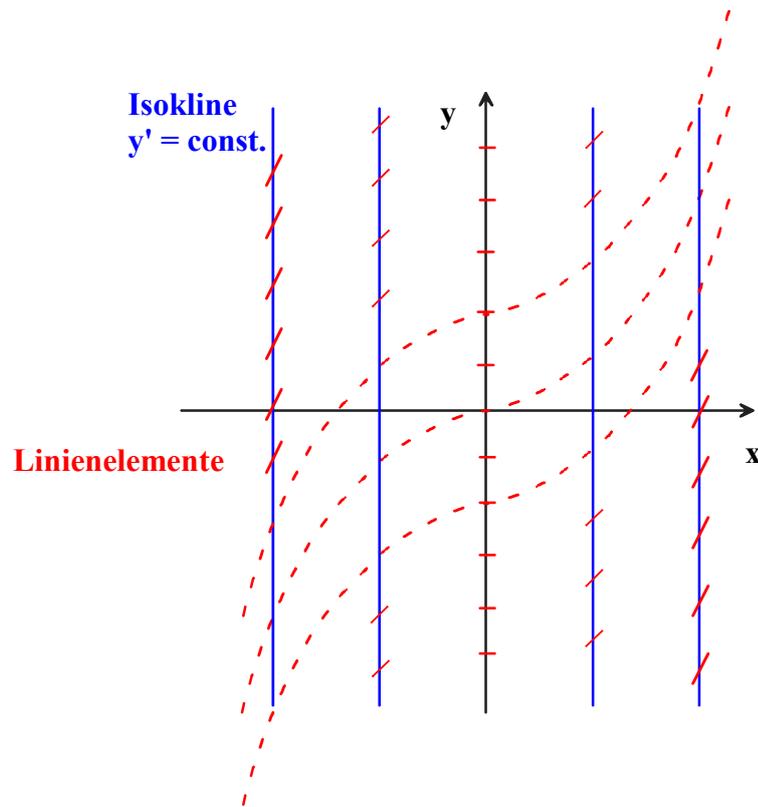
Eine explizite Differentialgleichung ordnet jedem Punkt des Definitionsbereiches von  $f(x, y)$  einen Wert der Ableitung  $y'$  der gesuchten Funktion zu. Diese Ableitung gibt die Richtung der Tangente an die Lösungskurve im Punkt  $P = (x, y)^T$  an. Das Zahlentripel  $(x, y, y')$  nennt man Linienelement. Die Menge aller Linienelemente ist das Richtungsfeld der Differentialgleichung. Linien, die Punkte gleichen Anstieges verbinden, heißen Isoklinen. D.h. auf ihnen gilt  $y' = c = \text{const.}$

**Beispiel 2.8**  $y' = -\frac{x}{y}$ ;



*Die allgemeine Lösung ist eine Schar konzentrischer Kreise um den Ursprung.*

**Beispiel 2.9**  $y' = x^2$ ;



Die allgemeine Lösung ist eine Schar von kubischen Parabeln.

Durch die Linienelemente wird der Anstieg der Lösungskurve angegeben. Geometrisch bedeutet damit die Lösung der Differentialgleichung das Finden von Kurvenscharen, deren Tangentenrichtung mit dem jeweiligen Linienelement zusammenfällt.

Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung ist eine einparametrische Kurvenschar  $y = y(x, C)$ . Folglich gibt es unendlich viele Lösungen  $y = y(x)$  der Differentialgleichung 1. Ordnung  $y' = f(x, y)$ .

**Satz 2.1** Sei  $f(x, y)$  stetig in  $D_f$ . Dann geht durch jeden Punkt  $P \in D_f$  mindestens eine Lösungskurve  $y = y(x)$  der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$ .

**Satz 2.2** Sei  $f(x, y)$  stetig in  $D_f$ . Es existiere  $\frac{\partial f}{\partial y}$  in  $D_f$  und sei dort stetig. Dann geht durch jeden Punkt  $P \in D_f$  genau eine Lösungskurve  $y = y(x)$  der Differentialgleichung  $y' = f(x, y)$ .

**Folgerung 2.1** *Unter den Bedingungen von Satz 2.2 hat die AWA  $y' = f(x, y)$ ;  $y(x_0) = y_0$  immer genau eine Lösung. Mit Hilfe des Anfangswertes  $y(x_0) = y_0$  wird aus der Kurvenschar der allgemeinen Lösung eine spezielle Lösung, die durch den Punkt  $P_0 = (x_0; y_0)^T$  verläuft, ausgewählt.*

## 2.2.2 Leicht integrierbare Spezialfälle von Differentialgleichungen 1. Ordnung\*

### Trennung der Veränderlichen

Wir betrachten Differentialgleichungen der Art:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) = g(x) \cdot h(y) \quad \text{mit} \quad g(x) \cdot h(y) \neq 0 \quad (*)$$

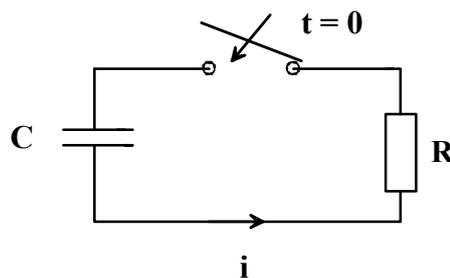
$$\Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C : \quad \text{Allgemeine Lösung von } (*)$$

Der Fall  $h(y) = 0$  führt evtl. zu einer singulären Lösung.

**Beispiel 2.10** *siehe Beispiel 2.2 aus 2.1: Aufladen eines Kondensators*

**Beispiel 2.11** *Entladen eines Kondensators über einen Widerstand*



Anfangsbedingung bei  $t = 0$  :  $u_c = u > 0$

$$u_c + u_R = u_c + iR = 0$$

Mit  $i = C \cdot \frac{du_c}{dt}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 u_c + CR \cdot \frac{du_c}{dt} &= 0 \\
 \frac{du_c}{dt} &= -\frac{1}{CR}u_c; \quad u_c \neq 0; \quad u_c = 0 \text{ ist aber Lösung!} \\
 \int \frac{du_c}{u_c} &= -\int \frac{1}{CR} dt \\
 \ln |u_c| &= -\frac{t}{CR} + \tilde{K}; \quad K = \begin{cases} e^{\tilde{K}} & \text{für } u_q - u_c \geq 0 \\ -e^{\tilde{K}} & \text{für } u_q - u_c < 0 \end{cases} \\
 u_c &= Ke^{-\frac{t}{CR}}; \quad K \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

denn  $u_c = 0$  ist Lösung der Differentialgleichung. Die Lösung der AWA erfolgt durch Berechnung der Konstanten der allgemeinen Lösung mit Hilfe der Anfangsbedingung:

$$u_c(0) = u = K \cdot 1 \quad \leadsto \quad u_c = ue^{-\frac{t}{CR}}$$

**Beispiel 2.12** Der radioaktive Zerfall einer Stoffmenge  $x(t)$  genügt der AWA:

$$\frac{dx}{dt} = -kx; \quad x(0) = x_0$$

Nach Integration ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x} &= \int -k dt \quad x \neq 0 \\
 \ln |x| &= -kt + \tilde{C} \\
 x &= \pm e^{-kt + \tilde{C}} = \pm e^{\tilde{C}} e^{-kt} \\
 x &= Ce^{-kt} \quad C \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

da  $x \equiv 0$  ebenfalls Lösung ist.

**Differentialgleichungen vom Typ**  $y' = f(ax + by + c); \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

Differentialgleichungen dieses Typs können durch Einführen der Substitutionsfunktion  $u = ax + by + c$  auf Differentialgleichungen mit getrennten Variablen zurückgeführt werden.

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) = f(u)$$

Nach Differentiation der Substitutionsfunktion  $u$  und Benutzen der Differentialgleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= a + b\frac{dy}{dx} \\ \frac{du}{dx} &= a + bf(u) \\ \int \frac{du}{a + bf(u)} &= \int dx + C; \quad a + bf(u) \neq 0.\end{aligned}$$

Differentialgleichungen dieses Typs können durch Einführen der Substitutionsfunktion  $u = ax + by + c$  auf Differentialgleichungen mit getrennten Variablen zurückgeführt werden.

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(ax + by + c) = f(u)$$

Nach Differentiation der Substitutionsfunktion  $u$  und Benutzen der Differentialgleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= a + b\frac{dy}{dx} \\ \frac{du}{dx} &= a + bf(u) \\ \int \frac{du}{a + bf(u)} &= \int dx + C; \quad a + bf(u) \neq 0.\end{aligned}$$

Der Fall  $a + bf(u) = 0$  muss gesondert untersucht werden und führt unter Umständen zu einer singulären Lösung.

**Beispiel 2.13**  $y' = \frac{dy}{dx} = (4x + 9y)^2 = u^2$ ; *Substitution:*  $u = 4x + 9y$ ;  $f(u) = u^2$ ;  
Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= 4 + 9y' = 4 + 9\frac{dy}{dx} = 4 + 9u^2 \\ \int \frac{du}{4 + 9u^2} &= \int dx + \tilde{C} \\ x + \tilde{C} &= \frac{1}{4} \int \frac{du}{1 + \frac{9}{4}u^2} \quad z = \frac{3}{2}u; \quad dz = \frac{3}{2}du \\ x + \tilde{C} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \int \frac{dz}{1 + z^2} \\ x + \tilde{C} &= \frac{1}{6} \arctan z = \frac{1}{6} \arctan \frac{3}{2}u \\ \tan(6x + C) &= \frac{3}{2}u = \frac{3}{2}(4x + 9y) \\ 4x + 9y &= \frac{2}{3} \tan(6x + C) \\ y &= \frac{1}{9} \left( \frac{2}{3} \tan(6x + C) - 4x \right) \\ y &= \frac{2}{27} \tan(6x + C) - \frac{4}{9}x \end{aligned}$$

### Differentialgleichungen vom Typ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ : Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

Differentialgleichungen dieses Typs können durch Einführen der Substitutionsfunktion  $u = \frac{y}{x}$  auf Differentialgleichungen mit getrennten Variablen zurückgeführt werden.

$$y' = \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(u)$$

Nach dem Differenzieren der Substitutionsfunktion und Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} u &= \frac{y}{x} \quad \curvearrowright \quad y = u \cdot x; \quad x \neq 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{du}{dx}x + u \\ f(u) &= \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u \\ \frac{dx}{x} &= \frac{du}{f(u) - u} \quad f(u) - u \neq 0 \\ \int \frac{dx}{f(u) - u} &= \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \end{aligned}$$

Der Fall  $f(u) - u = 0$  muss ebenfalls gesondert untersucht werden und führt unter Umständen zu einer singulären Lösung.

**Beispiel 2.14**  $y' = \frac{9x^2 + 3y^2}{2xy}; \quad y(2) = 2$

$$y' = \frac{9x^2 + 3y^2}{2xy} = \frac{9x}{2y} + \frac{3y}{2x} = \frac{9}{2}u^{-1} + \frac{3}{2}u = f(u)$$

Mit  $u = \frac{y}{x} \quad \curvearrowright \quad y = u \cdot x; \quad x \neq 0$  ergibt sich:

$$f(u) = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u = \frac{9}{2}u^{-1} + \frac{3}{2}u$$

$$\frac{du}{dx}x = \frac{9}{2}u^{-1} + \frac{3}{2}u - u = \frac{9}{2}u^{-1} + \frac{1}{2}u = \frac{9 + u^2}{2u}$$

$$\int \frac{2u}{9 + u^2} du = \int \frac{dx}{x} + C, \quad \text{da } 9 + u^2 \neq 0$$

Mit der Substitution  $v = 9 + u^2, \quad dv = 2udu$  erhält man dann:

$$\int \frac{2u}{9 + u^2} du = \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} + \tilde{C}$$

$$\ln(9 + u^2) = \ln|x| + \tilde{C}$$

$$9 + u^2 = C|x|$$

$$9 + \frac{y^2}{x^2} = C|x|$$

$$y^2 = (C|x| - 9)x^2.$$

Die Anpassung des Anfangswertes  $y(2) = 2$  ergibt:

$$4 = (2C - 9)4 \quad \curvearrowright \quad C = 5$$

$$y^2 = 5x^3 - 9x^2 \quad \text{für } x \geq 2$$

## 2.3 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Die allgemeine Form linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung für  $y = y(x)$  lautet:

$$y' + a(x)y = f(x); \quad (+)$$

Dabei heißt  $a(x)$  Koeffizientenfunktion und  $f(x)$  rechte Seite oder Störfunktion.

Gilt  $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in D_y$ , so liegt eine inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung vor, anderenfalls eine homogene.

**Satz 2.3** Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (+) ist die Summe von einer partikulären Lösung  $y_p(x)$  der inhomogenen Differentialgleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung  $y_h(x)$ :

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

### 2.3.1 Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

Die homogene Differentialgleichung zu (+) lautet:  $y' + a(x)y = 0$

**Methode: Trennung der Veränderlichen**

$$y' + a(x)y = 0 \quad (++)$$

$$\frac{dy}{dx} = -a(x)y \quad y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -a(x)dx : \text{allgemeine Lösung von } (++)$$

Zusätzlich muss geprüft werden, ob  $y = 0$  eine Lösung von (++) ist. Dann gilt aber  $y' = 0$  und nach Einsetzen in die Differentialgleichung folgt:

$$y' + a(x)y = 0 + a(x) \cdot 0 = 0$$

Damit muss in der allgemeinen Lösung von (++)  $y = 0$  mit enthalten sein:

$$\begin{aligned} \ln |y| &= \int -a(x)dx + C \\ |y| &= e^{-\int a(x)dx + C} = e^{-\int a(x)dx} \cdot e^C \\ &= D e^{-\int a(x)dx} \quad D > 0 \end{aligned}$$

$$y = \begin{cases} -D e^{-\int a(x)dx} & \text{für } y < 0 \\ +D e^{-\int a(x)dx} & \text{für } y > 0 \end{cases}$$

Zusammen mit der Lösung  $y = 0$  ergibt sich:

$$y_h = \mathbf{D} e^{-\int a(x)dx} \quad \mathbf{D} \in \mathbb{R}$$

Zur Lösung ist es möglich, entweder diese Formel zu benutzen (kurzer Weg) oder die Trennung der Veränderlichen jedes Mal erneut auszuführen (langer Weg).

**Beispiel 2.15**  $y' - y = x \quad \implies \quad \begin{array}{l} \text{homogene Gleichung: } y' - y = 0 \\ \text{Störfunktion: } f(x) = x \\ \text{Koeffizientenfunktion: } a(x) = -1 \end{array}$

kurzer Weg:

$$y_h = De^{-\int -1 dx} = De^x \quad D \in \mathbb{R}$$

langer Weg:

$$\begin{aligned} y' - y &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= y & y \neq 0; \quad y = 0 \text{ ist aber Lösung} \end{aligned}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\begin{aligned} \ln |y| &= x + C \\ |y| &= e^{x+C} = e^x \cdot e^C \\ &= De^x & D \geq 0 \end{aligned}$$

$$y = \begin{cases} -De^x & y \geq 0 \\ +De^x & y < 0 \end{cases}$$

$$y_h = De^x \quad D \in \mathbb{R}$$

### 2.3.2 Ermittlung einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Auch hier werden wir allgemein eine Lösungsformel herleiten, die sofort benutzt werden kann (kurzer Weg). Alternativ kann natürlich auch jedes Mal erneut die Lösungsmethode angewendet werden (langer Weg).

Wir suchen nun eine partikuläre Lösung von:  $y' + a(x)y = f(x)$

**Methode: Variation der Konstanten nach Lagrange**

Ausgangspunkt ist die Lösung der homogenen Gleichung:

$$y_h = \mathbf{D}e^{-\int a(x)dx} = \mathbf{D} \cdot \tilde{y}(x) \quad \mathbf{D} \in \mathbb{R}$$

$\tilde{y}(x)$  kann damit aus der Lösung des homogenen Problems abgelesen werden. Für die partikuläre Lösung des inhomogenen Problems stellen wir nun folgenden Ansatz auf:

$$y_p = \mathbf{D}(\mathbf{x})e^{-\int a(x)dx} = \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \tilde{y}(x)$$

D.h. wir setzen die gleiche Lösungsstruktur wie bei der Lösung der homogenen Gleichung an, lassen aber die Konstante variieren. Sie wird damit zu einer Funktion von  $x$ . Nach Differentiation ergibt sich:

$$y'_p = D'\tilde{y} + D\tilde{y}'$$

$\tilde{y}$  ist eine spezielle Lösung der homogenen Differentialgleichung ( $D = 1$ ) und erfüllt damit diese auch:  $\tilde{y}' = -a(x)\tilde{y}$ . Einsetzen in die obige Gleichung liefert:

$$y'_p = D'\tilde{y} + D(-a(x)\tilde{y})$$

In der inhomogenen Differentialgleichung ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} y'_p + a(x)y_p &= D'\tilde{y} + D(-a(x)\tilde{y}) + a(x)D\tilde{y} = f(x) \\ D'\tilde{y} &= f(x) \\ \frac{dD}{dx}\tilde{y} &= f(x) \\ \int dD &= \int \frac{f(x)}{\tilde{y}} dx \\ D(x) &= \int \frac{f(x)}{\tilde{y}} dx (+E) \end{aligned}$$

Da nur eine partikuläre Lösung gesucht wird, wählt man stets  $E = 0$ . Anschließend muss  $D(x)$  in den Ansatz

$$\mathbf{y}_p = \mathbf{D}(\mathbf{x})e^{-\int a(x)dx} = \mathbf{D}(\mathbf{x})\cdot\tilde{y}(x)$$

eingesetzt werden, um die partikuläre Lösung  $y_p$  zu erhalten.

In der ersten Zeile ist beim langen Weg eine Rechenkontrolle möglich: Es müssen sich nach dem Differenzieren und Einsetzen in die Differentialgleichung stets zwei Terme aufheben! Bei richtiger Rechnung ist dann die Differentialgleichung für  $D(x)$  stets mittels Trennung der Veränderlichen lösbar.

**Beispiel 2.16** Weiterführung des obigen Beispiels:  $y' - y = x$  mit der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$y = De^x$ .  $\implies$  Ansatz:  $y_p = D(x)e^x = D(x)\tilde{y} \quad \curvearrowright \tilde{y} = e^x$   
kurzer Weg:

$$\begin{aligned} D(x) &= \int \frac{f(x)}{\tilde{y}} dx = \int \frac{x}{e^x} dx \\ &= \int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p &= D(x) e^x = (-x e^{-x} - e^{-x}) e^x \\ &= -x - 1 \end{aligned}$$

langer Weg:

$$\begin{aligned} y_p' &= D' e^x + D e^x \\ y_p' - y_p &= D' e^x + D e^x - D e^x = x \\ D' e^x &= x \\ dD &= x e^{-x} dx \\ D &= \int x e^{-x} dx \end{aligned}$$

Die weitere Rechnung ist identisch mit dem kurzen Weg.

Die allgemeine Lösung der Ausgangsdifferentialgleichung lautet somit:

$$y = y_p + y_h = -x - 1 + D e^x; \quad D \in \mathbb{R}$$

**Beispiel 2.17**  $(x^2 + 2) y' - 2xy = 3(x^2 + 2)^2, \quad y(-1) = 6$

$$\leadsto \quad y' - \frac{2x}{x^2 + 2} y = 3(x^2 + 2)$$

1. Schritt: Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= \frac{2x}{x^2 + 2} dx \\ \ln |y| &= \ln(x^2 + 2) + C \\ y_h &= D(x^2 + 2) \end{aligned}$$

2. Schritt: Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (langer Weg) :

$$\begin{aligned} y_p &= D(x) (x^2 + 2) \\ y_p' &= D'(x) (x^2 + 2) + D(x) 2x \\ y_p' - \frac{2x}{x^2 + 2} y_p &= D'(x) (x^2 + 2) + D(x) 2x - \frac{2x}{x^2 + 2} D(x) (x^2 + 2) = 3(x^2 + 2) \\ D'(x) (x^2 + 2) &= 3(x^2 + 2) \\ D(x) &= \int 3 dx = 3x \end{aligned}$$

Für die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ergibt sich damit:

$$y_p = D(x) (x^2 + 2) = 3x(x^2 + 2)$$

3. Schritt: Gesamtlösung des AWP

$$\begin{aligned} y &= y_p + y_h = 3x(x^2 + 2) + D(x^2 + 2); & D \in \mathbb{R} \\ y_{AWP}(-1) &= -3(1 + 2) + D(1 + 2) = 6 \\ 3D &= 6 + 9 = 15 \\ D &= 5 \\ y_{AWP} &= 3x(x^2 + 2) + 5(x^2 + 2) = (3x + 5)(x^2 + 2) \\ &= 3x^3 + 6x + 5x^2 + 10 \end{aligned}$$

**Beispiel 2.18**

$$y' + x^2y = x^2e^{-\frac{x^3}{3}}$$

1. Schritt: Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} y' + x^2y &= 0 \\ \frac{dy}{y} &= -x^2 dx \\ \ln |y| &= -\frac{1}{3}x^3 + C \\ y_h &= De^{-\frac{1}{3}x^3} \end{aligned}$$

2. Schritt: Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

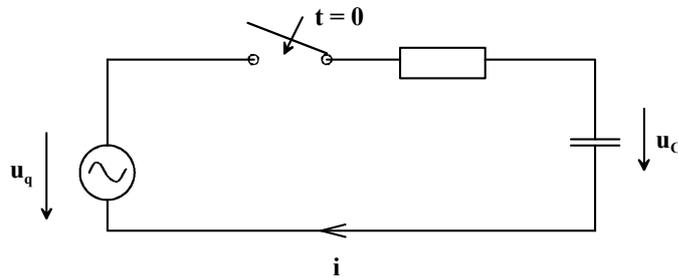
$$\begin{aligned} y_p &= D(x)e^{-\frac{1}{3}x^3} \\ y_p' &= D'(x)e^{-\frac{1}{3}x^3} + D(x)e^{-\frac{1}{3}x^3}\left(-\frac{3}{3}x^2\right) \\ y_p' + x^2y_p &= D'(x)e^{-\frac{1}{3}x^3} - D(x)e^{-\frac{1}{3}x^3}x^2 + x^2D(x)e^{-\frac{1}{3}x^3} = x^2e^{-\frac{x^3}{3}} \\ D'(x)e^{-\frac{1}{3}x^3} &= x^2e^{-\frac{x^3}{3}} \\ D(x) &= \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \end{aligned}$$

Für die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ergibt sich damit:

$$y_p = D(x)e^{-\frac{1}{3}x^3} = \frac{1}{3}x^3e^{-\frac{1}{3}x^3}$$

3. Schritt: Gesamtlösung:

$$\begin{aligned} y &= y_p + y_h = \frac{1}{3}x^3e^{-\frac{1}{3}x^3} + De^{-\frac{1}{3}x^3} \\ y &= \left(\frac{1}{3}x^3 + D\right)e^{-\frac{1}{3}x^3}; & D \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Beispiel 2.19** Einschalten eines RC-Gliedes an eine Wechselspannung

$u_q = U \sin \omega t$ ;  $u_c(t \leq 0) = 0$   
 Nach Kirchhoff gilt:

$$-u_q + iR + u_c = 0$$

Mit  $i_c = C \frac{du_c}{dt}$  und  $\tau = CR$  folgt dann:

$$\begin{aligned} -u_q + C \frac{du_c}{dt} R + u_c &= 0 \\ RC \frac{du_c}{dt} + u_c &= u_q \\ \tau \frac{du_c}{dt} + u_c &= U \sin \omega t \\ \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau} u_c &= \frac{U \sin \omega t}{\tau} \end{aligned}$$

Das ist eine lineare inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung mit  $a(t) = \frac{1}{\tau}$  und  $f(t) = \frac{U \sin \omega t}{\tau}$ .

1. Schritt: Lösung der homogenen Differentialgleichung:  $\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau} u_c = 0$

$$u_{ch} = D e^{-\int a(t) dt} = D e^{-\int \frac{1}{\tau} dt} = D e^{-\frac{1}{\tau} t}.$$

2. Schritt: Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u_{cp} &= D(t) e^{-\frac{1}{\tau} t} = D(t) \tilde{u}_c \\ u_{cp}^\bullet &= D^\bullet(t) e^{-\frac{1}{\tau} t} + D(t) e^{-\frac{1}{\tau} t} \left(-\frac{1}{\tau}\right) \end{aligned}$$

:

$$\begin{aligned} \frac{du_{cp}}{dt} + \frac{1}{\tau}u_{cp} &= D^\bullet(t)e^{-\frac{1}{\tau}t} + D(t)e^{-\frac{1}{\tau}t}\left(-\frac{1}{\tau}\right) + \frac{1}{\tau}D(t)e^{-\frac{1}{\tau}t} = \frac{U \sin \omega t}{\tau} \\ D^\bullet(t)e^{-\frac{1}{\tau}t} &= \frac{U \sin \omega t}{\tau} \\ D(t) &= \int \frac{U \sin \omega t}{\tau} e^{\frac{1}{\tau}t} dt = \left( \int \frac{f(t)}{\widetilde{u}_c} dt \right) \\ &= \frac{U}{\tau} \frac{e^{\frac{1}{\tau}t}}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left( \frac{1}{\tau} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right) \quad (2x \text{ partiell, Göhler}) \\ &= \frac{U}{\tau} \frac{\tau^2 e^{\frac{1}{\tau}t}}{1 + \tau^2 \omega^2} \left( \frac{1}{\tau} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} u_{cp} &= D(t)e^{-\frac{1}{\tau}t} = \frac{U\tau e^{\frac{1}{\tau}t}}{1 + \tau^2 \omega^2} \left( \frac{1}{\tau} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right) e^{-\frac{1}{\tau}t} \\ &= \frac{U\tau}{1 + \tau^2 \omega^2} \left( \frac{1}{\tau} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right) \end{aligned}$$

3. Schritt: Gesamtlösung:

$$\begin{aligned} u_c &= u_{cp} + u_{ch} \\ &= \frac{U\tau}{1 + \tau^2 \omega^2} \left( \frac{1}{\tau} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right) + D e^{-\frac{1}{\tau}t} \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung  $u_c(t=0) = 0$  findet man weiter:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{U\tau}{1 + \tau^2 \omega^2} (0 - \omega) + D \\ D &= \frac{U\tau\omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \\ u_c &= \frac{U}{1 + \tau^2 \omega^2} (\sin \omega t - \omega\tau \cos \omega t + \omega\tau e^{-\frac{1}{\tau}t}) \\ &= \frac{U}{1 + \tau^2 \omega^2} (\omega\tau e^{-\frac{1}{\tau}t} + A \sin(\omega\tau - \phi)) \end{aligned}$$

Nebenrechnung:  $\sin \omega\tau - \omega\tau \cos \omega t = A \sin(\omega\tau - \phi) = A \sin \omega\tau \cos \phi - A \cos \omega\tau \sin \phi$

$$\implies A \sin \phi = \omega\tau; \quad A \cos \phi = 1;$$

$$\implies A^2 \cos^2 \phi + A^2 \sin^2 \phi = A^2 = 1 + \omega^2 \tau^2 \quad \implies A = \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$$

$$\implies \tan \phi = \frac{A \sin \phi}{A \cos \phi} = \omega\tau; \quad \sin \phi = \frac{\omega\tau}{A} = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

Damit geht  $u_c$  über in

$$\begin{aligned} u_c &= \frac{U}{1 + \tau^2\omega^2} (\omega\tau e^{-\frac{1}{\tau}t} + \sqrt{1 + \omega^2\tau^2} \sin(\omega\tau - \phi)) \\ &= \frac{U}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \left( \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} e^{-\frac{1}{\tau}t} + \frac{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \sin(\omega\tau - \phi) \right) \\ &= \frac{U}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} (\sin \phi e^{-\frac{1}{\tau}t} + \sin(\omega\tau - \phi)) \\ &= \text{flüchtiger Anteil} + \text{stationärer Anteil} \end{aligned}$$

Der flüchtige Anteil entspricht der Lösung des homogenen Problems unter Einbeziehung der Anfangsbedingung. Er konvergiert mit  $t \rightarrow \infty$  gegen Null. Der flüchtige Anteil entspringt dem schwingenden System.

Der stationäre Anteil entspricht der partikulären Lösung des inhomogenen Problems und widerspiegelt den äußeren Einfluss auf das System. Er setzt sich für  $t \rightarrow \infty$  durch.

## 2.4 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Im Folgenden beschäftigen wir uns mit der Lösung von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Sie haben in der Technik eine große Bedeutung und bieten eine einfache Möglichkeit, die Wirkungsweise der Integraltransformationen zu demonstrieren.

Die allgemeine Form der einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lautet:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f.$$

Die Lösung einer linearen Differentialgleichung setzt sich additiv aus der allgemeinen Lösung der entsprechenden homogenen Differentialgleichung und aus einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zusammen:

$$y_{ges}(x) = y_p(x) + y_h(x).$$

### 2.4.1 Die homogene Gleichung\*

Allgemeine Form:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

Für diese Sorte von Differentialgleichungen kann stets eine Lösung angegeben werden. Diese ist ein sogenanntes Fundamentalsystem aus  $n$  linear unabhängigen Lösungen: Der Lösungsansatz  $y = e^{\lambda x}$  führt beim Einsetzen in die Differentialgleichung auf die charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} &= 0 \\ \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses Polynom  $n$ -ten Grades hat im Bereich  $\mathbb{C}$  nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau  $n$  Lösungen.

1. Jeder  $k$ -fachen reellen Lösung  $\lambda_i$  entsprechen im Fundamentalsystem die  $k$  partikulären Lösungen:

$$e^{\lambda_i x}, \quad x e^{\lambda_i x}, \quad x^2 e^{\lambda_i x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_i x}.$$

2. Dem  $k$ -fach auftretendem Paar konjugiert komplexer Wurzeln  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  entsprechen die  $2k$  partikulären Lösungen:

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{aligned}$$

**Beispiel 2.20**  $y^{(4)} - 2y''' - y'' - 4y' + 12y = 0; \quad y = e^{\lambda x}$

$$\implies \lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 12 = 0$$

Mittels Horner Schema findet man die Lösungen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \text{ und } \lambda_{3/4} = -1 \pm i\sqrt{2} = \alpha \pm i\beta.$$

$\implies$  allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y_h(x) &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 \\ &= C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{-x} \cos \sqrt{2}x + C_4 e^{-x} \sin \sqrt{2}x \end{aligned}$$

**Beispiel 2.21**  $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0; \quad y = e^{\lambda x}$

$$\implies \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \quad \text{hat die Lösungen}$$

$$\lambda_{1/2} = 2i \text{ und } \lambda_{3/4} = -2i \quad (\text{d.h. } k = 2; \alpha = 0; \beta = 2)$$

$\implies$  allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y_h(x) &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 \\ &= C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 x \cos 2x + C_4 x \sin 2x \end{aligned}$$

### 2.4.2 Die inhomogene Gleichung

Gesucht ist die eine partikuläre Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f.$$

Bekannt ist die Lösung  $y_h$  der homogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0.$$

$$y_h(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x),$$

wobei  $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$  ein Fundamentalsystem bildet.

#### Variation der Konstanten

Im allgemeinen Fall wird für die Lösung der homogenen Gleichung die Variation der Konstanten durchgeführt, d.h. es wird folgender Ansatz für  $y_p$  getroffen:

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \dots + C_n(x)y_n(x).$$

Da die Funktion  $y_p(x)$  die Differentialgleichung erfüllen muss, wird sie differenziert, und die Ableitungen werden in die Differentialgleichung eingesetzt. Mehrfache Wiederholung dieses Vorganges und Vereinfachungen zur Eindämmung der entstehenden Flut von Termen führt zu folgendem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} y_1C_1' + y_2C_2' + \dots + y_nC_n' &= 0 \\ y_1' C_1 + y_2' C_2 + \dots + y_n' C_n &= 0 \\ &\dots \\ y_1^{(n-1)} C_1 + y_2^{(n-1)} C_2 + \dots + y_n^{(n-1)} C_n &= f. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}$$

Die Systemdeterminante ist die sogenannte Wronskideterminante  $W$ . Weil die Funktionen  $y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  linear unabhängig sind, gilt  $W \neq 0$ , d.h. das Gleichungssystem ist immer eindeutig lösbar. Die Lösung  $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$  liefert durch Integration die gesuchten Funktionen  $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ . Mit dem Einsetzen in den Ansatz für

$y_p$  erhält man die gesuchte partikuläre Lösung der Differentialgleichung. Anschließend wird die Gesamtlösung bestimmt durch

$$y_{ges}(x) = y_p(x) + y_h(x).$$

**Beispiel 2.22**  $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung  $y'' + y = 0$  lautet mit der charakteristischen Gleichung  $\lambda^2 + 1 = 0$ ;  $\lambda_{1/2} = \pm i$ :

$$\begin{aligned} y_h(x) &= C_1 \sin x + C_2 \cos x. \\ y_p(x) &= C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x \end{aligned}$$

Mit diesem Ansatz für  $y_p$  ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin x} \end{pmatrix}.$$

Zum Lösen dieses Gleichungssystems wird die Cramersche Regel benutzt:

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \\ D_1 &= \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \frac{1}{\sin x} & -\sin x \end{vmatrix} = -\frac{\cos x}{\sin x} \\ D_2 &= \begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \frac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende Gleichungen für die unbekanntenen Funktionen  $C_1'(x)$  und  $C_2'(x)$ :

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= \frac{D_1}{D} = \frac{\cos x}{\sin x} \\ C_2'(x) &= \frac{D_2}{D} = -1 \\ C_1(x) &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \cot x dx = \ln |\sin x| + K_1 \\ C_2(x) &= \int -1 dx = -x + K_2 \end{aligned}$$

Die Konstanten  $K_1$  und  $K_2$  werden null gewählt, weil nur eine partikuläre Lösung benötigt wird. Somit gilt:  $C_1(x) = \ln |\sin x|$  und  $C_2(x) = -x$ . Durch Einsetzen in den Ansatz für  $y_p$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x \\ &= \ln |\sin x| \sin x - x \cos x. \end{aligned}$$

Die Gesamtlösung lautet:

$$\begin{aligned} y_{ges}(x) &= y_p(x) + y_h(x) \\ &= \ln|\sin x| \sin x - x \cos x + C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{aligned}$$

Diese Lösungsmethode ist sehr aufwendig und führt schon bei einfachen rechten Seiten zu komplizierten Integralen.

### Ansatzmethode

Wenn die Störfunktion  $f(x)$  eine bestimmte Struktur hat, kann man die partikuläre Lösung mit der Ansatzmethode bestimmen. Der Ansatz für die partikuläre Lösung wird dann nach der folgenden Tabelle entsprechend der Gestalt der rechten Seite (Störfunktion) aufgestellt:

Störfunktion $f(x)$	Ansatzfunktion $y_p(x)$
$e^{\alpha x}(b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m)$	$x^l e^{\alpha x}(B_0 + B_1x + \dots + B_mx^m)$
$e^{\alpha x}(k_1 \cos \beta x + k_2 \sin \beta x)$	$x^l e^{\alpha x}(K_1 \cos \beta x + K_2 \sin \beta x)$
$e^{\alpha x}[(k_{10} + k_{11}x + \dots + k_{1m}x^m) \cos \beta x + (k_{20} + k_{21}x + \dots + k_{2m}x^m) \sin \beta x]$	$x^l e^{\alpha x}[(K_{10} + K_{11}x + \dots + K_{1m}x^m) \cos \beta x + (K_{20} + K_{21}x + \dots + K_{2m}x^m) \sin \beta x]$

Dabei bedeuten die Konstanten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $b_i$ ,  $k_i$ , und  $k_{ij}$  fest vorgegebene Zahlenwerte aus der Aufgabenstellung. Die Konstanten  $B_i$ ,  $K_i$ , und  $K_{ij}$  sind unbestimmte Koeffizienten, die im Laufe der weiteren Rechnung ausgerechnet werden müssen. Die Größe  $l$  ist 0, wenn die Zahl  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  keine Lösung der zugehörigen charakteristischen Gleichung der entsprechenden homogenen Gleichung ist, anderenfalls ist sie gleich der Vielfachheit dieser Lösung (Resonanz).

Der Ansatz wird in die Differentialgleichung eingesetzt, und die unbestimmten Koeffizienten aus dem Ansatz werden über einen Koeffizientenvergleich bestimmt.

Bei der Aufstellung der Ansatzfunktionen ist Folgendes zu beachten:

1. In der Ansatzfunktion sind stets alle Koeffizienten  $B_0$  bis  $B_m$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  bzw.  $K_{10}$  bis  $K_{1m}$  und  $K_{20}$  bis  $K_{2m}$  mitzuführen, auch wenn einige der entsprechenden Koeffizienten in der Störfunktion nicht auftreten.

### Beispiel 2.23

Störfunktion $f(x)$	Ansatzfunktion $y_p(x)$
$7x^2$	$A + Bx + Cx^2$
$-4 \sin 3x$	$A \sin 3x + B \cos 3x$

2. Lautet

$$f(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$$

und ist  $\lambda = 0$   $l$ -fache Wurzel des charakteristischen Polynoms der entsprechenden homogenen Differentialgleichung, oder lautet die Störfunktion

$$f(x) = e^{\alpha x}(k_1 \cos \beta x + k_2 \sin \beta x)$$

und ist  $\lambda = \alpha \pm i\beta$   $l$ -fache Wurzel des charakteristischen Polynoms der entsprechenden homogenen Differentialgleichung, so muss der Term  $x^l$  als Faktor in den Ansatz aufgenommen werden.

3. Ist die Störfunktion  $f(x)$  eine Linearkombination von mehreren Störfunktionen entsprechend Tabelle, so ist der Lösungsansatz eine Linearkombination der entsprechenden Ansatzfunktionen.

Wegen dem Superpositionsprinzip für lineare Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung kann auch mit den einzelnen Ansatzfunktionen getrennt gerechnet werden und erst danach die Gesamtlösung zusammensetzen.

**Beispiel 2.24** für den Lösungsansatz:

$$\begin{aligned} y'' - 5y' + 6y = e^{3x}(2x - 1) &\implies \text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \\ &\implies \lambda_{1/2} = 2.5 \pm \sqrt{6.25 - 6} = 2.5 \pm 0.5; \\ &\implies \lambda_1 = 3; \quad \lambda_2 = 2 \implies y_h = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} \\ f(x) = e^{3x}(2x - 1) &\implies y_{p(\text{ohne Resonanz})} = e^{3x}(A + Bx) \\ &\implies \alpha_1 = 3 = \lambda_1 \\ &\implies y_p = x^1 e^{3x}(A + Bx) \end{aligned}$$

**Beispiel 2.25** für den Lösungsansatz:

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 5y = 7e^{2x} \sin x &\implies \text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \\ &\implies \lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4 - 5} = 2 \pm i; \\ &\implies y_h = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \\ f(x) = 7e^{2x} \sin x &\implies y_{p(\text{ohne Resonanz})} = e^{2x}(A \cos x + B \sin x) \\ &\implies \alpha_1 = 2, \quad \beta_1 = 1 \implies \mu = 2 \pm i = \lambda_{1/2} \\ &\implies y_p = x^1 e^{2x}(A \cos x + B \sin x) \end{aligned}$$

**Beispiel 2.26** für den Lösungsansatz:

$$\begin{aligned} y''' + 2y'' - 3y' = x^2 - 5xe^{2x} &\implies \text{charakteristische Gleichung: } \lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0 \\ &\implies \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2/3} = -1 \pm \sqrt{1 + 3} \\ &\implies y_h = C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) = x^2 - 5xe^{2x} &\implies y_{p(\text{ohne Resonanz})} = (A + Bx + Cx^2) + e^{2x}(D + Ex) \\
&\implies \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 2 \implies \alpha_1 = \lambda_1 \\
&\implies y_p = x^1(A + Bx + Cx^2) + e^{2x}(D + Ex)
\end{aligned}$$

**Beispiel 2.27** zur Berechnung partikulärer Lösungen

$$\begin{aligned}
y''' - 5y'' + 8y' - 4y = x^2 + e^{-x} &\implies \text{charakteristische Gleichung: } \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0 \\
&\implies \lambda_1 = 1; \lambda_{2/3} = 2 \\
&\implies y_h = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) = x^2 + e^{-x} &\implies y_{p(\text{ohne Resonanz})} = A + Bx + Cx^2 + De^{-x} \\
&\implies \alpha_1 = 0 \neq \lambda_i \quad \alpha_2 = -1 \neq \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

$$\implies y_p = A + Bx + Cx^2 + De^{-x}$$

$$\implies y'_p = B + 2Cx - De^{-x}$$

$$\implies y''_p = 2C + De^{-x}$$

$$\implies y'''_p = -De^{-x}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
x^2 + e^{-x} &= y'''_p - 5y''_p + 8y'_p - 4y_p \\
&= (-De^{-x}) - 5(2C + De^{-x}) + 8(B + 2Cx - De^{-x}) - 4(A + Bx + Cx^2 + De^{-x}) \\
&= e^{-x}(-D - 5D - 8D - 4D) + x^2(-4C) + x(-4B + 16C) - 10C + 8B - 4A
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich über den Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
-18D &= 1 \implies D = -\frac{1}{18} \\
-4C &= 1 \implies C = -\frac{1}{4} \\
-4B + 16C &= 0 \implies B = 4C = -1 \\
-10C + 8B - 4A &= 0 \implies A = (-10)\left(-\frac{1}{4}\right) + 8(-1)\frac{1}{4} = \frac{-22}{16} = -\frac{11}{8}
\end{aligned}$$

Als partikuläre Lösung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
y_p &= -\frac{11}{8} - x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{18}e^{-x} \implies \\
y_{ges} &= y_p + y_h \\
&= -\frac{11}{8} - x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{18}e^{-x} + C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}
\end{aligned}$$

**Beispiel 2.28** zur Berechnung partikulärer Lösungen

$$\begin{aligned}
 y'' + y = \sin x &\implies \text{charakteristische Gleichung: } \lambda^2 + 1 = 0 \\
 &\implies \lambda_{1/2} = \pm i \quad (\alpha = 0; \quad \beta = 1) \implies y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x \\
 f(x) = \sin x &\implies y_{p(\text{ohne Resonanz})} = A \sin x + B \cos x \\
 &\implies \alpha_1 = 0; \quad \beta_1 = 1 \implies \mu = \pm i = \lambda_{1/2} \\
 \implies y_p &= x(A \sin x + B \cos x) \\
 \implies y'_p &= A \sin x + B \cos x + x(A \cos x - B \sin x) \\
 \implies y''_p &= A \cos x - B \sin x + A \cos x - B \sin x + x(A(-\sin x) - B \cos x)
 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$\begin{aligned}
 \sin x &= y''_p + y_p \\
 &= 2A \cos x - 2B \sin x - xA \sin x - xB \cos x + x(A \sin x + B \cos x) \\
 &= 2A \cos x - 2B \sin x.
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich über den Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
 2A &= 0 \implies A = 0 \\
 -2B &= 1 \implies B = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Als partikuläre Lösung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 y_p &= -\frac{1}{2}x \cos x \implies \\
 y_{ges} &= y_p + y_h \\
 &= -\frac{1}{2}x \cos x + C_1 \sin x + C_2 \cos x.
 \end{aligned}$$

## 2.5 Die Schwingungsdifferentialgleichung\*

Die homogene Gleichung

$$y'' + ay' + by = 0, \quad a > 0, b > 0$$

entspricht der freien gedämpften harmonischen Schwingung. Es sei  $y = y(t)$ . Mit dem Ansatz  $y = e^{\lambda t}$  ergibt sich durch Einsetzen in der Ausgangsdifferentialgleichung die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

In Abhängigkeit von  $a$  und  $b$  gibt es entweder

1. zwei verschiedene reelle Nullstellen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$
2. eine zweifache reelle Nullstelle  $\lambda_1 = \lambda_2$
3. ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen  $\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ .

1. Fall:  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ;  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ ;  $\lambda_2 \in \mathbb{R}$

Der Lösungsansatz liefert  $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ ;  $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ . Damit ergibt sich

$$y_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Das ist der aperiodische Fall. Er tritt ein, wenn der Koeffizient  $a$ , d.h. der Reibungsanteil, hinreichend groß ist. Es gilt dann  $\lambda_1 < 0$ ;  $\lambda_2 < 0$ . Die Reibung bremst die Bewegung so sehr, dass sie ausklingt und keine Schwingung zustande kommt.

2. Fall:  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2} \in \mathbb{R}$

Der Lösungsansatz liefert  $y_1(t) = e^{-\frac{a}{2}t}$ ;  $y_2(t) = t e^{-\frac{a}{2}t}$ : aperiodischer Grenzfall.

$$y_h(t) = C_1 e^{-\frac{a}{2}t} + C_2 t e^{-\frac{a}{2}t}$$

3. Fall:  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C}$

Es gilt dann  $\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \beta i$  mit  $\beta = \sqrt{-\frac{a^2}{4} + b}$ .

Der Lösungsansatz liefert  $y_1(t) = e^{-\frac{a}{2}t} \cos \beta t$ ;  $y_2(t) = e^{-\frac{a}{2}t} \sin \beta t$ .

$$y_h(t) = C_1 e^{-\frac{a}{2}t} \cos \beta t + C_2 e^{-\frac{a}{2}t} \sin \beta t$$

Dieser Fall entspricht einer harmonischen Schwingung mit Dämpfung, d.h. einer abklingenden Schwingung.

Fall 3a: Fehlende Reibung:  $a = 0$

Damit gilt  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ , rein imaginär.

$$y_h(t) = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t$$

Dieser Fall entspricht einer harmonischen Schwingung ohne Dämpfung, d.h. einer konstanten Schwingung.

Die inhomogene Gleichung

$$y'' + ay' + by = f(t) = c \cos \omega t, \quad \omega \neq \beta$$

beschreibt eine erzwungene Schwingung mit der Störfunktion  $f(t) = c \cos \omega t$ . Für die partikuläre Lösung ergibt sich dann

$$y_p(t) = K_1 \cos \omega t + K_2 \sin \omega t.$$

Im Fall 3 der geringen Dämpfung ( $a \neq 0$ , klein) gilt:

$$\begin{aligned}
 y_{ges} &= y_h + y_p \\
 &= C_1 e^{-\frac{a}{2}t} \cos \beta t + C_2 e^{-\frac{a}{2}t} \sin \beta t + K_1 \cos \omega t + K_2 \sin \omega t \\
 &= e^{-\frac{a}{2}t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) + (K_1 \cos \omega t + K_2 \sin \omega t) \\
 &= e^{-\frac{a}{2}t} C \sin(\beta t + \phi) + K \sin(\omega t + \psi) \quad (2.1) \\
 &= \text{Einschwingvorgang} + \text{Dauervorgang} \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

(Nebenrechnung:  $C \sin(\beta t + \phi) = C \sin \beta t \cdot \cos \phi + C \sin \phi \cdot \cos \beta t \stackrel{!}{=} C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t$   
 $\implies C \cos \phi = C_1; \quad C \sin \phi = C_2; \quad C^2 = C_1^2 + C_2^2; \quad \tan \phi = \frac{C_2}{C_1}$ )

Der Federschwinger schwingt also nach dem Einschwingen mit der Erregerfrequenz, die Amplitude  $K$  und die Phasenverschiebung  $\psi$  sind verschieden zu der Erregerschwingung.

Im Fall 3a ohne Dämpfung kommt es zu einer Überlagerung von zwei harmonischen Schwingungen:

$$\begin{aligned}
 y_{ges} &= y_h + y_p \\
 &= C \sin(\beta t + \phi) + K \sin(\omega t + \psi), \quad \omega \neq \beta.
 \end{aligned}$$

Wenn zusätzlich gilt  $\omega = \beta$ , so hat die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung die Gestalt

$$y_p(t) = Kt \sin(\beta t + \psi)$$

und es gilt

$$\begin{aligned}
 y_{ges} &= y_h + y_p \\
 &= C \sin(\beta t + \phi) + Kt \sin(\beta t + \psi).
 \end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung sorgt bei  $t \rightarrow \infty$  für ein unbeschränktes betragsmäßiges Wachstum der Gesamtlösung. Es kommt zur Resonanzkatastrophe.

**Beispiel 2.29** *Elektrischer Schwingkreis:*

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{LC} &= 0 \\
 i(0) &= 0 \\
 i'(0) &= \frac{U}{L}
 \end{aligned}$$

*Fall 1: aperiodische Lösung:  $a = \frac{R}{L}; \quad b = \frac{1}{LC};$*

$$\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \omega_1 \quad \text{mit } \omega_1 = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\begin{aligned} i_h(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= C_1 e^{(-\frac{R}{2L} + \omega_1)t} + C_2 e^{(-\frac{R}{2L} - \omega_1)t} \\ &= e^{-\frac{R}{2L}t} (C_1 e^{\omega_1 t} + C_2 e^{-\omega_1 t}) \end{aligned}$$

Die Anpassung an die Anfangswerte ergibt:

$$\begin{aligned} i(0) &= 0 \implies 0 = C_1 + C_2 \implies C_1 = -C_2 \\ i'(0) &= \frac{U}{L} \implies \\ \frac{U}{L} &= C_1 \left(-\frac{R}{2L} + \omega_1\right) e^0 + C_2 \left(-\frac{R}{2L} - \omega_1\right) e^0 \\ &= -C_2 \left(-\frac{R}{2L} + \omega_1\right) + C_2 \left(-\frac{R}{2L} - \omega_1\right) \\ \frac{U}{L} &= -2C_2 \omega_1 \\ C_2 &= -\frac{U}{2L\omega_1}; \quad C_1 = \frac{U}{2L\omega_1} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} i_h(t) &= e^{-\frac{R}{2L}t} \frac{U}{L\omega_1} \left(\frac{1}{2}e^{\omega_1 t} - \frac{1}{2}e^{-\omega_1 t}\right) \\ &= e^{-\frac{R}{2L}t} \frac{U}{L\omega_1} \sinh(\omega_1 t). \end{aligned}$$

Fall 2: aperiodischer Grenzfall:  $\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} = -\frac{R}{2L} \implies$

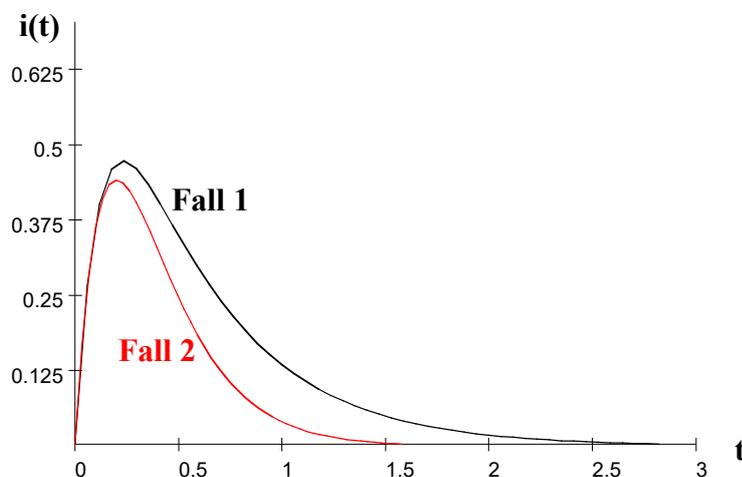
$$i_h(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} (C_1 + C_2 t)$$

Die Anpassung an die Anfangswerte ergibt:

$$\begin{aligned} i(0) &= 0 \implies 0 = C_1 \\ i'(0) &= \frac{U}{L} \implies \\ \frac{U}{L} &= (C_2 e^{-\frac{R}{2L}t} + C_2 t \left(-\frac{R}{2L}\right) e^{-\frac{R}{2L}t})|_{t=0} \\ \frac{U}{L} &= C_2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$i_h(t) = \frac{U}{L} t e^{-\frac{R}{2L}t}$$



Fall 3: geringe Dämpfung:

$$\begin{aligned}\lambda_{1/2} &= -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ &= -\frac{R}{2L} \pm i \sqrt{-\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm i\omega_2 \quad \text{mit } \omega_2 = \sqrt{-\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \\ i_h(t) &= e^{-\frac{R}{2L}t} (C_1 \cos \omega_2 t + C_2 \sin \omega_2 t)\end{aligned}$$

Die Anpassung an die Anfangswerte ergibt:

$$\begin{aligned}i(0) &= 0 \implies 0 = C_1 \\ i'(0) &= \frac{U}{L} \implies \\ \frac{U}{L} &= e^{-\frac{R}{2L}t} C_2 \omega_2 \cos \omega_2 t \Big|_{t=0} \\ &= C_2 \omega_2\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$i_h(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \frac{U}{L\omega_2} \sin \omega_2 t$$

Fall 3a: ohne Dämpfung:  $R = 0 \implies a = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm \sqrt{-\frac{1}{LC}} = \pm i \sqrt{\frac{1}{LC}} = \pm i \omega_3$$

$$i_h = C_1 \cos \omega_3 t + C_2 \sin \omega_3 t$$

Die Anpassung an die Anfangswerte ergibt:

$$i(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1$$

$$i'(0) = \frac{U}{L} \Rightarrow$$

$$\frac{U}{L} = C_2 \omega_3 \cos \omega_3 t |_{t=0}$$

$$C_2 = \frac{U}{L \omega_3} = \frac{U}{L \sqrt{\frac{1}{LC}}} = u \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}}$$

Damit ergibt sich:

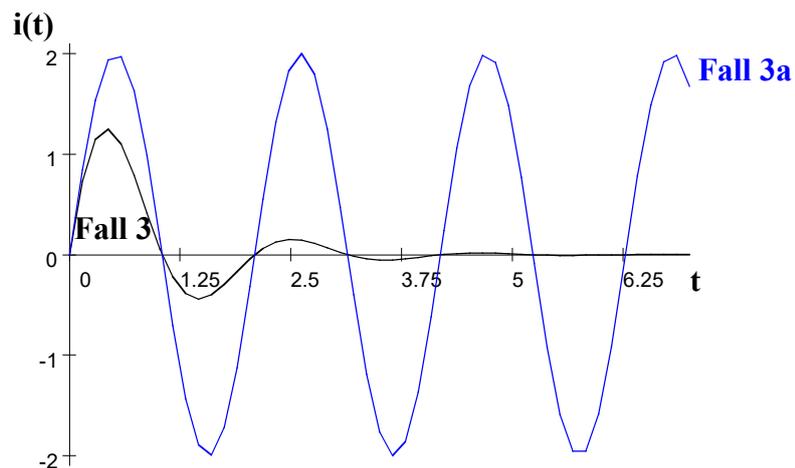
$$i_h(t) = U \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \sqrt{\frac{1}{LC}} t$$

Bei einer Anregung von außen gilt :

$$f(t) = C \cos(\omega t)$$

$$i_{ges} = i_h + i_p$$

$$= C_1 \sin(\omega_3 t + \phi_3) + C_2 \sin(\omega t + \phi)$$



Im Resonanzfall gilt:  $\omega_3 = \omega \implies$

$$i_{ges} = C_1 \sin(\omega_3 t + \phi_3) + C_2 t \sin(\omega_3 t + \phi)$$

Die Anpassung an die Anfangswerte ergibt:

$$\begin{aligned} i(0) &= 0 \implies 0 = C_1 \sin \phi_3 \implies 0 = C_1 \\ i'(0) &= \frac{U}{L} \implies \\ \frac{U}{L} &= C_2 [\sin(\omega_3 t + \phi) + t\omega_3 \cos(\omega_3 t + \phi)]|_{t=0} \\ \frac{U}{L} &= C_2 \sin \phi \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$i_{ges} = \frac{U}{L \sin \phi} t \sin(\omega t + \phi),$$

d.h. eine betragsmäßig unbeschränkt wachsende Funktion für  $t \rightarrow \infty$ .

## 2.6 Dynamische Systeme

Ein dynamisches System ist ein mathematisches Modell eines zeitabhängigen Prozesses, dessen weiterer Verlauf nur vom Anfangszustand, aber nicht von der Wahl des Anfangszeitpunktes abhängt. Der Begriff des dynamischen Systems geht auf die Mathematiker Henri Poincaré und George David Birkhoff zurück.

Man unterscheidet zwischen diskreter und kontinuierlicher Zeitentwicklung und erhält folglich zeitdiskrete, zeitkontinuierliche und hybride dynamische Systeme.

Zur Beschreibung eines dynamischen Systems benötigt man eine Menge  $T$ , die den Zeitraum beschreibt, eine nichtleere Menge  $X$ , die die möglichen Zustände des Systems enthält sowie eine Operation  $\phi$ , die  $T \times X$  auf  $X$  abbildet. Diese muss für beliebige  $s, t \in T$  und  $x \in X$  den folgenden beiden Bedingungen genügen:

1.  $\phi(0, x) = x$  (Identitätseigenschaft)
2.  $\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(s + t, x)$  (Halbgruppeneigenschaft).

**Beispiel 2.30** zeitliche Entwicklung der Populationsgröße einer ungehindert wachsenden Bakterienkultur

Zu einem festen Zeitpunkt hat die Population die Größe  $x \in \mathbb{R}^+$ . Die Populationsgröße beschreibt also den Zustand des Systems, das heißt, der Zustandsraum des Systems ist die Menge  $X = [0, \infty) = \mathbb{R}^+$ . Betrachtet man zunächst die Zustände  $x_0, x_1, x_2, \dots$  zu den diskreten Zeitpunkten  $t = 0, 1, 2, \dots$  erhält man ein zeitdiskretes dynamisches

*System:* Der Zeitraum  $T$  enthält die natürlichen Zahlen zuzüglich  $t = 0$ , d.h.  $T = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_0$ . Es gilt weiter  $x_t = ax_{t-1}$  mit dem konstanten Wachstumsfaktor  $a$ . Damit erhalten wir für den Zustand zu einem Zeitpunkt  $t \in T$ :

$$x_t = ax_{t-1} = a^2x_{t-2} = \dots = a^t x_0.$$

$x_0$  bezeichnet dabei den Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Wählen wir nun den Zeitpunkt  $s \in T, s > t$  und untersuchen den Zustand des Systems zu diesem Zeitpunkt:

$$x_s = a^s x_t = a^s a^t x_0 = x_{s+t}.$$

Bezogen auf die Funktion  $\phi$  heißt das aber

$$\begin{aligned} \phi(0, x_0) &= x_0, \\ \phi(t, x) &= x_t = a^t x_0 \\ \phi(s, \phi(t, x)) &= \phi(s, x_t) = a^s a^t x_0 = x_{s+t} = \phi(s+t, x). \end{aligned}$$

Damit sind die Identitäts- und Halbgruppeneigenschaft von  $\phi$  erfüllt und das Tripel  $(T, X, \phi)$  bildet ein dynamisches System.

Die Verbindung zum aktuellen Inhalt dieses Moduls ergibt sich aus der Tatsache, dass das wichtigste Mittel zur Beschreibung zeitkontinuierlicher dynamischer Systeme autonome gewöhnliche Differentialgleichungen sind. Das sind gewöhnliche Differentialgleichungen, die nicht explizit von der unabhängigen Variablen abhängen:

$$y^{(n)}(x) = f(y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)).$$

Sie können in ein Differentialgleichungssystem von  $n$  gekoppelten Differentialgleichungen umgeformt werden. Diese damit beschriebenen dynamischen Systeme bezeichnet man auch als autonome Systeme.

### **Beispiel 2.31** Federoszillator

Im allgemeinen Fall lautet die Differentialgleichung

$$m\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + kx(t) = F(t), \quad r > 0, k > 0.$$

Mit dieser allgemeinen rechten Seite ist die Differentialgleichung jedoch nicht autonom, da dort eine explizite Abhängigkeit von  $t$  vorhanden ist. Wir setzen also  $F(t) = 0$  und entfernen damit die von außen wirkende Kraft:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + r\dot{x}(t) + kx(t) &= 0 \\ \ddot{x}(t) &= -\frac{r}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}x(t) \\ &= f(x(t), \dot{x}(t)) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für  $x(t)$  die Gestalt einer autonomen gewöhnlichen Differentialgleichung, deren Lösungen translationsinvariant sind, d.h. es gilt

$$x(t) = x(s + t) \quad \text{mit } s \in \mathbb{R}$$

Wir benutzen als Zeitraum  $T = [0, \infty)$  und als Größen, die den Zustand des Oszillators beschreiben, das geordnete Paar  $(x(t), v(t))$  aus dem Ort  $x(t)$  und der Geschwindigkeit  $v(t) = \dot{x}(t)$ , die die schwingende Masse  $m$  zum Zeitpunkt  $t$  hat. Als Ausgangszustand benutzen wir die Werte  $x(0) = x_0$  sowie  $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$ . Damit lassen sich die Eigenschaften des dynamischen, autonomen Systems beweisen und der Federoszillator ist ein solches.

Will man den allgemeinen Fall mit der rechten Seite  $F(t)$  mit einschließen, so muss man die Ausgangsdifferentialgleichung formal in ein entsprechendes Differentialgleichungssystem überführen.

Wir setzen

$$\begin{aligned} y_0(t) &= x(t) \\ y_1(t) &= \dot{x}(t) = \frac{dy_0}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} &= 1 \Leftrightarrow y_2(t) = t \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für  $y_1(t)$  die Gestalt einer autonomen gewöhnlichen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1(t)}{dt} &= \ddot{x}(t) = -\frac{r}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}x(t) + \frac{F(t)}{m} \\ &= -\frac{r}{m}y_0(t) - \frac{k}{m}y_1(t) + \frac{F(y_2(t))}{m} \\ &= f(y_0(t), y_1(t), y_2(t)). \end{aligned}$$

# 3 Skalare Funktionen mehrerer unabhängiger Variabler

## 3.1 Definition

Aus dem 1. Semester ist der Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  bekannt: Es ist die Menge der geordneten  $n$ -Tupel  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  reeller Zahlen. Jedem geordneten  $n$ -Tupel entspricht ein Punkt des  $n$ -dimensionalen Raumes mit den Koordinaten  $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ . Bekannt ist weiterhin die Euklidische Norm  $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$  als Abstand des Punktes  $\vec{x}$  vom Ursprung. Diese Norm entspricht der Zuordnung einer reellen Zahl zu dem Punkt  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .

**Definition 3.1** *Es sei  $D_f$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n : D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ . Wenn durch eine Vorschrift jedem Punkt  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in D_f$  genau eine reelle Zahl  $y \in W_f \subseteq \mathbb{R}$  zugeordnet wird, so ist durch die Vorschrift auf  $D_f$  eine reelle Funktion von  $n$  unabhängigen Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit dem Wertebereich  $W_f$  erklärt.*

*explizite Form:  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\vec{x}) = f(P)$*

*implizite Form:  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = F(\vec{x}, y) = 0$*

**Beispiel 3.1**  $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

**Beispiel 3.2**  $\phi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  : elektrostatisches Potential, das im Punkt  $P = (x, y, z)^T$  durch die Punktladung  $Q$  im Ursprung erzeugt wird.

**Beispiel 3.3**  $T(x, y, z, t)$  : Temperatur im Punkt  $(x, y, z)^T$  des Zimmers zur Zeit  $t$

**Beispiel 3.4**  $p(x, y, z)$  : Luftdruck im Punkt  $(x, y, z)^T$  eines Geländestückes

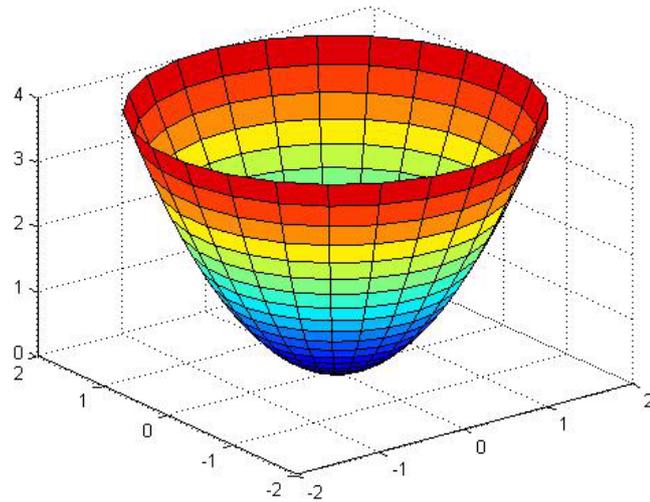
Reelle Funktionen von  $n$  unabhängigen Veränderlichen werden auch skalare Felder genannt (in der Technik manchmal unzulässig verallgemeinernd Potentiale).

## 3.2 Geometrische Veranschaulichung skalarer Funktionen

1. Wir betrachten Punkte  $P \in D_f \mid f(P) = c = const.$ . Die Menge dieser Punkte heißt Niveaufläche, wenn  $D_f \subseteq \mathbb{R}^3$  bzw. Niveaulinie, wenn  $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ , auch Äquipotentialfläche bzw. Äquipotentiallinie.

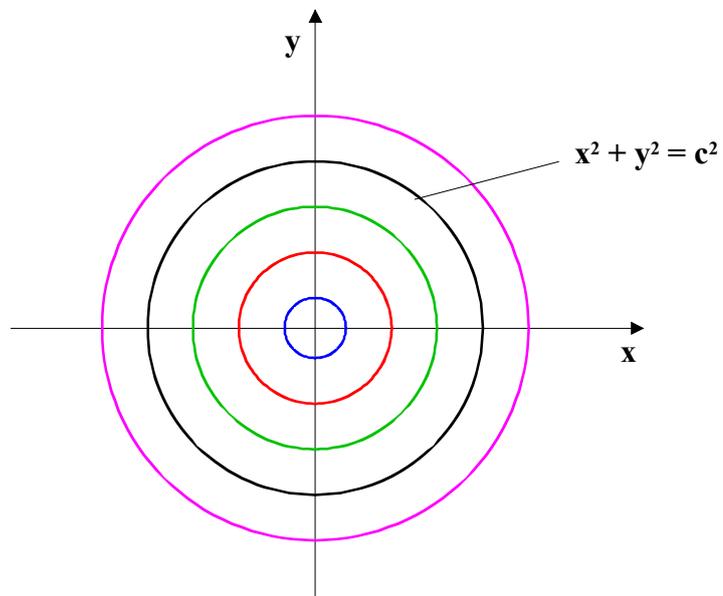
**Beispiel 3.5** *Isobaren auf der Wetterkarte sind Linien, die Orte gleichen Luftdruckes verbinden.*

**Beispiel 3.6**  $z = x^2 + y^2$



*Niveaulinien:  $z = x^2 + y^2 = c^2 = \text{const.}$*

*Die Niveaulinien sind folglich Kreise mit dem Radius  $c$ .*



**Beispiel 3.7**  $w = x^2 + y^2 + z^2$

Niveauflächen:  $w = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 = \text{const.}$

Die Niveauflächen sind folglich die Oberflächen der Kugeln mit dem Radius  $c$ .

**Beispiel 3.8**  $\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Niveauflächen:  $\phi = \frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = c = \text{const.}$

$$\implies \tilde{c} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\implies \tilde{c}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Die Niveauflächen sind ebenfalls Kugeloberflächen mit dem Radius  $\tilde{c}$ .

2. Wir betrachten Schnittflächen der Art:  $x_i = c = \text{const.}$

**Beispiel 3.9**  $z = x^2 + y^2$

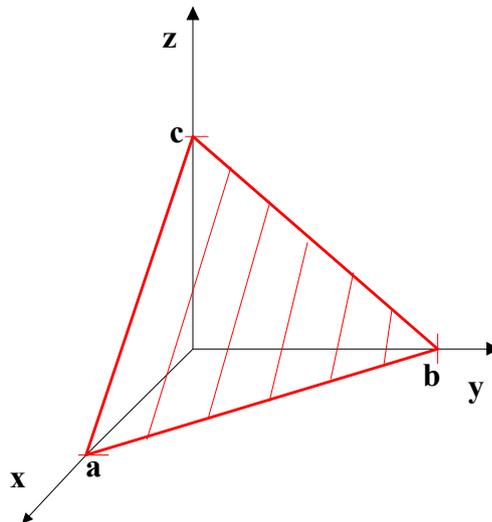
Sei  $x = 0 = \text{const.} \implies z = y^2$  : Parabel über der  $y$ -Achse;

Sei  $y = 0 = \text{const.} \implies z = x^2$  : Parabel über der  $x$ -Achse;

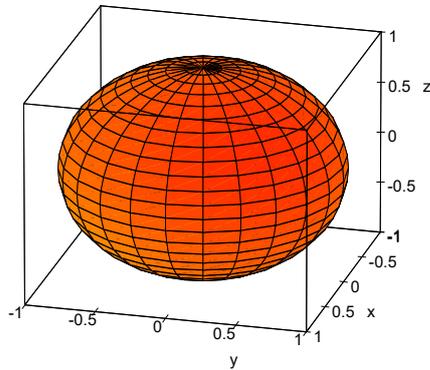
3. Speziell bei Funktionen mit nur zwei unabhängigen Veränderlichen kann eine Darstellung im  $\mathbb{R}^3$  erfolgen.

**Beispiel 3.10** Achsenabschnittsform der Ebenengleichung:

$$\tilde{a}x + by + \tilde{c}z = d \implies \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

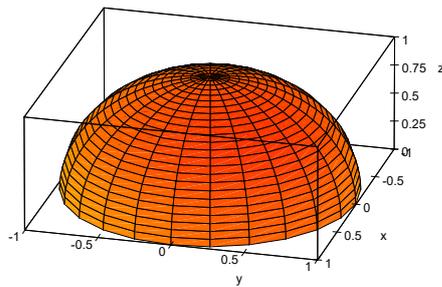


**Beispiel 3.11** Implizite Funktion:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  :

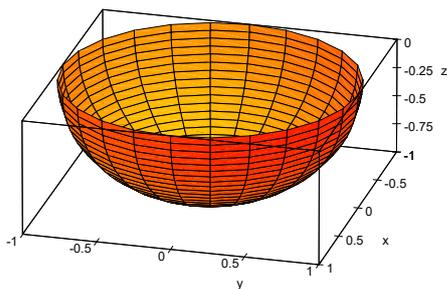


*Einheitskugel*

$\implies z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  : obere Halbkugel



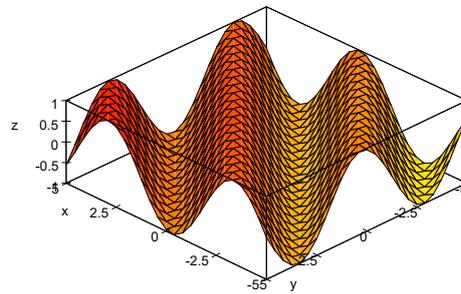
$\implies z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$  : untere Halbkugel



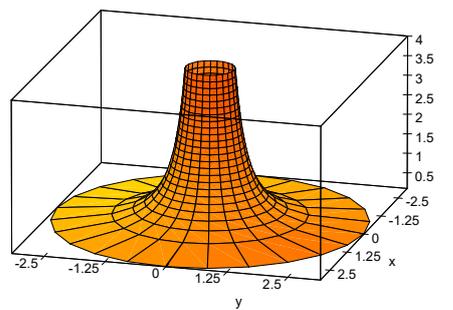
$D_f = \{(x, y)^T \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  : Fläche des Einheitskreises im  $\mathbb{R}^2$

$W_f = [-1; 1]$  : Intervall auf der z-Achse

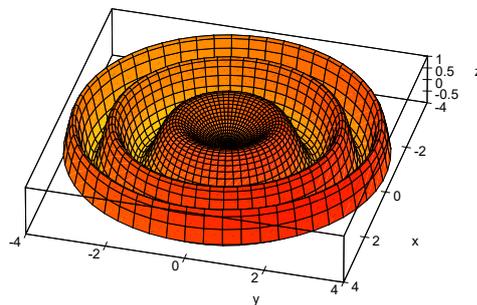
**Beispiel 3.12**  $f(x, y) = \sin(x + y)$



**Beispiel 3.13**  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$



**Beispiel 3.14**  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$



### 3.3 Grenzwerte und Stetigkeit skalarer Funktionen mit 2 Veränderlichen

**Definition 3.2** Die Funktion  $f(x, y)$  sei mindestens in einer Umgebung  $U_{P_0}$  des Punktes  $P_0 = (x_0, y_0)^T \in D_f \subseteq \mathbb{R}^2$  mit Ausnahme von  $P_0$  definiert. Dann hat  $f$  in  $P_0$  den Grenzwert  $\alpha$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle  $P = (x, y)^T \in D_f$  mit  $d(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$  gilt  $|f(x, y) - \alpha| < \varepsilon$ .

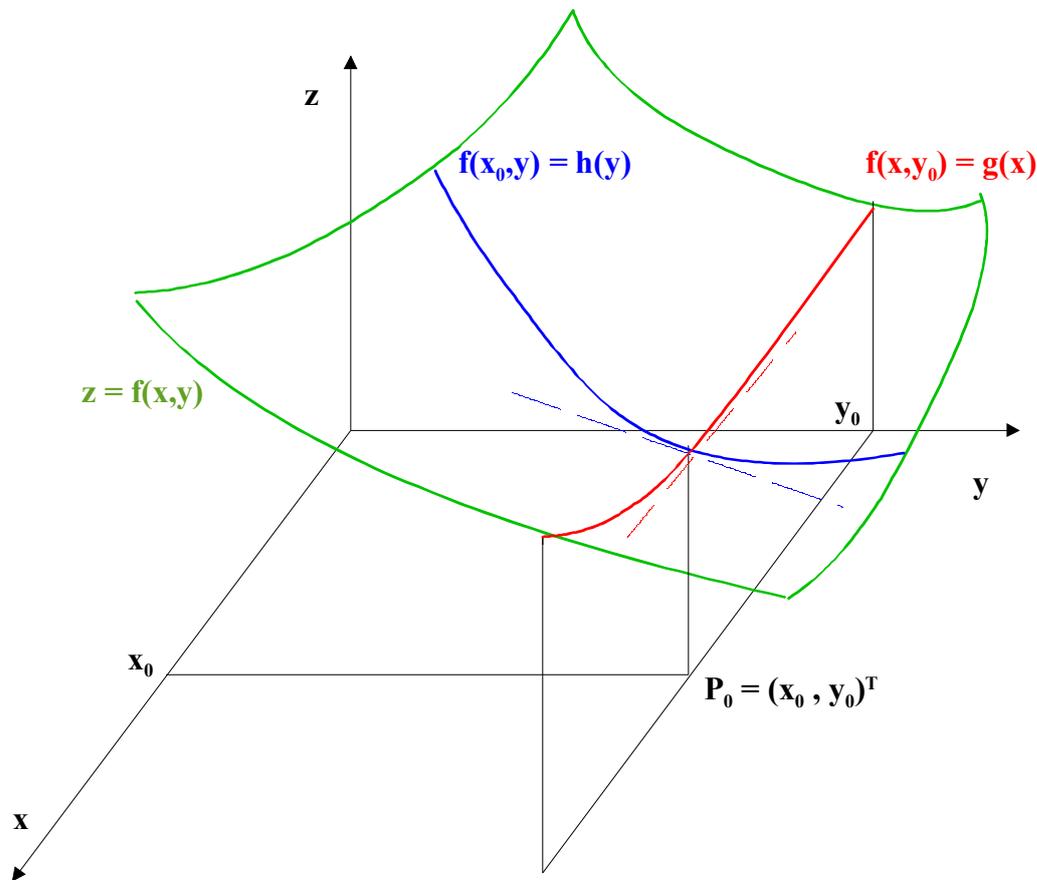
Schreibweise:  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = \alpha$  oder  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = \alpha$

**Definition 3.3** Die Funktion  $f(\vec{x})$  heißt im Punkt  $P^0 = \vec{x}^0$  stetig, wenn

- a)  $P^0 \in D_f$  und
- b)  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}^0)$  gilt.

# 4 Differentialrechnung von skalaren Funktionen

## 4.1 Partielle Ableitungen 1. Ordnung



Für festes  $x_0$  bzw.  $y_0$  sind die Funktionen  $g(x) = f(x, y_0)$  und  $h(y) = f(x_0, y)$  von einer Veränderlichen abhängig und können in der bekannten Weise differenziert werden:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f(x, y_0)}{\partial x} \right|_{x=x_0} &= \frac{dg(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ \left. \frac{\partial f(x_0, y)}{\partial y} \right|_{y=y_0} &= \frac{dh(y)}{dy} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{h(y_0 + \Delta y) - h(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}. \end{aligned}$$

Diese beiden Grenzwerte charakterisieren das Anstiegsverhalten der Funktion  $f(x, y)$  im Punkt  $P_0 = (x_0, y_0)^T$  in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung. Sie heißen partielle Ableitungen nach  $x$  bzw.  $y$ . Ist  $f(x, y)$  differenzierbar für alle  $(x, y) \in M \subseteq \mathbb{R}^2$ , so sind die partiellen Ableitungen selbst wieder Funktionen von  $x$  und  $y$ . Als Voraussetzung wird benötigt, dass  $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2)$  in  $U(\vec{x}^0)$  definiert ist. Bezeichnung:  $\left. \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x} \right|_{\vec{x}=\vec{x}^0}$  oder  $f_x(\vec{x}^0)$

bzw.  $\left. \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial y} \right|_{\vec{x}=\vec{x}^0}$  oder  $f_y(\vec{x}^0)$

Partielle Ableitungen lassen sich analog bei Funktionen mit  $n$  Veränderlichen definieren. Es werden dann bei der Grenzwertbildung für die Ableitung alle die Variablen festgehalten, nach denen gerade **nicht** abgeleitet wird.

Die Ableitungsregeln sind entsprechend der Definition analog zu den Regeln bei der Ableitung von Funktionen einer Veränderlichen.

Es sei  $u = u(x, y)$ ;  $v = v(x, y)$ ;  $f = f(t)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u \pm v)}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \pm \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial(u \cdot v)}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} v + u \frac{\partial v}{\partial x} \\ \left(\frac{u}{v}\right)_x &= \frac{u_x v - u v_x}{v^2} \\ \frac{\partial f(u(x, y))}{\partial x} &= \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{Kettenregel}). \end{aligned}$$

**Beispiel 4.1**  $z = f(x, y) = ax + by + c$ ;  $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$z_x = a; \quad z_y = b$$

**Beispiel 4.2**  $z = f(x, y) = 3x^2y^4$

$$z_x = 6xy^4 \quad z_y = 12x^2y^3$$

**Beispiel 4.3**  $\phi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}(x^2 + y^2 + z^2)^{-0.5}$

$$\begin{aligned} \phi_z &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1.5}(2z) \\ &= -\frac{Qz}{4\pi\epsilon_0}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1.5} \end{aligned}$$

**Beispiel 4.4**  $w(x, y, z) = x^2 + 2x^2yz^2 + \sin z^2$

$$w_x = 2x + 4xyz^2; \quad w_y = 2x^2z^2; \quad w_z = 4x^2yz + 2z \cos z^2$$

## 4.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Es sei  $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\vec{x} \in G \subseteq \mathbb{R}^n$ . Existiert  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  im gesamten Gebiet  $G$ , so ist diese Funktion wieder von den  $n$  Veränderlichen abhängig und möglicherweise differenzierbar:

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}.$$

Diese Ableitung heißt partielle Ableitung 2. Ordnung. Analog werden partielle Ableitungen beliebiger, endlicher Ordnung definiert.

**Beispiel 4.5**  $f = f(x, y)$ ;  $n = 2$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

Für gemischte partielle Ableitungen 2. Ordnung gilt der Satz von SCHWARZ (1843 - 1921):

**Satz 4.1** *Satz von SCHWARZ:*

Es sei  $f = f(x, y)$ .  $f_{xy}$  und  $f_{yx}$  seien stetig in der offenen Menge  $G \subseteq \mathbb{R}^2$ . Dann gilt

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

**Bemerkung 4.1** Dieser Satz gilt analog auch für  $n > 2$ .

**Bemerkung 4.2** Dieser Satz gilt analog auch für gemischte partielle Ableitungen höherer Ordnung.

**Beispiel 4.6**  $z = z(x, y) = x^y$

$$z_x = yx^{y-1} \quad z_y = x^y \ln x$$

$$\begin{aligned} z_{xy} &= x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x & z_{yx} &= yx^{y-1} \ln x + x^y \frac{1}{x} \\ z_{xy} &= x^{y-1}(1 + y \ln x) & z_{yx} &= x^{y-1}(y \ln x + 1) \end{aligned}$$

## 4.3 Das totale Differential

$f = f(x, y)$  besitze stetige partielle Ableitungen in der Umgebung  $U_\Delta$  des betrachteten Punktes  $P_0 = (x_0, y_0)^T$ . Weiter sei  $P_{0\Delta} = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)^T$  ein Punkt aus dieser Umgebung. In Analogie zum eindimensionalen Fall  $f = f(x)$  stellen wir nun die Frage:

Wie groß ist der Zuwachs  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ ? Bei Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung in einer Koordinatenrichtung erhält man:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f_x(x_0 + \tau_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x + f_y(x_0, y_0 + \tau_2 \Delta y) \Delta y \quad (MWS) \\ &= \left( f_x(x_0, y_0) + \phi(\overrightarrow{\Delta x}) \right) \Delta x + \left( f_y(x_0, y_0) + \psi(\overrightarrow{\Delta x}) \right) \Delta y \end{aligned}$$

Mit  $\overrightarrow{\Delta x} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$  und der Stetigkeit von  $f_x$  und  $f_y$  in  $U_\Delta$  folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\overrightarrow{\Delta x} \rightarrow \vec{0}} \phi(\overrightarrow{\Delta x}) &= 0 \\ \lim_{\overrightarrow{\Delta x} \rightarrow \vec{0}} \psi(\overrightarrow{\Delta x}) &= 0. \end{aligned}$$

Bei Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung in  $\overrightarrow{\Delta x}$  gilt:

$$\Delta f \approx f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y.$$

Dieser in  $\Delta x$  und  $\Delta y$  lineare Anteil des Funktionszuwachses heißt **totales Differential**.

**Definition 4.1** Es sei  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  stetig partiell differenzierbar nach  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Für  $\vec{x}^0 \in D_f$  und beliebige Zuwächse  $\overrightarrow{\Delta x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)^T$  gelte

$$\Delta f = f(\vec{x}^0 + \overrightarrow{\Delta x}) - f(\vec{x}^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_i} \Delta x_i + \phi(\overrightarrow{\Delta x}) \left\| \overrightarrow{\Delta x} \right\|$$

mit  $\lim_{\overrightarrow{\Delta x} \rightarrow \vec{0}} \phi(\overrightarrow{\Delta x}) = 0$ . Dann heißt  $f(\vec{x})$  total differenzierbar und

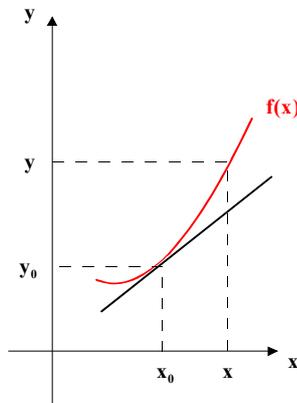
$$df(\vec{x}^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\vec{x}^0)}{\partial x_i} dx_i$$

das totale Differential von  $f$  in  $\vec{x}^0$  bezüglich des Zuwachses  $\overrightarrow{dx}$ .

**Gegenüberstellung:**

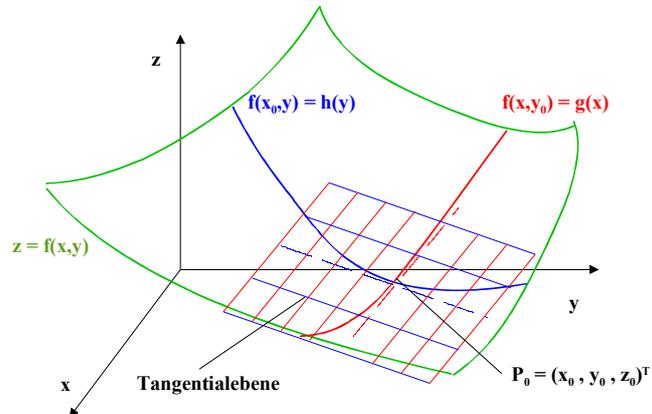
$$y - y_0 = f'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)$$

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$



Geradengleichung für die Tangente an  $f(x)$  im Punkt  $P_0 = (x_0, y_0)^T$

Anstieg der Tangenten:  $f'(x_0)$



Ebenengleichung für die Tangentialebene an  $f(x, y)$  im im Punkt  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$

Diese Ebene wird aufgespannt durch die Tangenten an die Schnittkurven

$$z = h(y) = f(x_0, y) \text{ und}$$

$$z = g(x) = f(x, y_0) :$$

$$z = h(y) = z_0 + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z = g(x) = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0)$$

Das totale Differential gibt den linearen Anteil des Funktionszuwachses an, d.h. den Funktionszuwachs, der entsteht, wenn die Bildfläche von  $f$  im Punkt  $P_0$  durch die Tangentialebene ersetzt wird. Durch Auswertung der Formel für das totale Differential kann die Gleichung für die Tangentialebene aufgestellt werden. Im Fall  $n = 2$  gilt:

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

Anwendungen des totalen Differentials liegen z.B. in

- der Aufstellung der Gleichung für die Tangentialebene
- der Lösung von totalen Differentialgleichungen
- der Lösung von Differentialgleichungen mittels integrierendem Faktor
- der Prüfung der Wegunabhängigkeit bei Kurvenintegralen 2. Art
- der Fehlerrechnung u.v.a.m.

**Beispiel 4.7** Sei  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ . Wir bestimmen die Tangentialebene an diese Funktion im Punkt  $P_0 = (1, 1)^T$ .

$$\begin{aligned} z - z_0 &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ z - \ln \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{P_0} &= \frac{2x}{2(\sqrt{x^2 + y^2})^2} \Big|_{P_0} (x - x_0) + \frac{2y}{2(\sqrt{x^2 + y^2})^2} \Big|_{P_0} (y - y_0) \\ z - \ln \sqrt{2} &= \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1) \\ z - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y &= \frac{1}{2} \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

**Beispiel 4.8** Zur Abschätzung des absoluten (relativen) Fehlers einer der unmittelbaren Messung nicht zugänglichen Größe  $\tilde{z}$ :

Es sei  $\tilde{z} = f(\tilde{x}, \tilde{y})$ ;  $\Delta z = \tilde{z}(\tilde{x}, \tilde{y}) - z(x, y)$ , wobei die Messwerte  $x$  und  $y$  mit den maximalen Messfehlern von  $\Delta x$  und  $\Delta y$  gemessen werden und  $\tilde{x}$  bzw.  $\tilde{y}$  die wirklichen Werte von  $x$  bzw.  $y$  sind:

$$\begin{aligned} |\tilde{y} - y| &\leq \Delta y \quad \text{d.h.} \quad y - \Delta y \leq \tilde{y} \leq y + \Delta y \\ |\tilde{x} - x| &\leq \Delta x \quad \text{d.h.} \quad x - \Delta x \leq \tilde{x} \leq x + \Delta x. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für  $\Delta z = \tilde{z}(\tilde{x}, \tilde{y}) - z(x, y)$

$$|\Delta z| \approx |dz| \leq |f_x(x, y)| |\Delta x| + |f_y(x, y)| |\Delta y|.$$

Gegeben seien die Messwerte  $a = (10 \pm 0.01)\text{cm}$ ,  $b = (6 \pm 0.01)\text{cm}$ ,  $c = (5 \pm 0.01)\text{cm}$  und  $m = (270 \pm 0.5)\text{g}$  für einen Quader. Gesucht ist eine näherungsweise Abschätzung für den Maximalfehler der Dichte.

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{m}{V} = \frac{m}{abc} \\ |\Delta \rho| &\approx |d\rho| \\ &\leq \left| \frac{\partial \rho}{\partial a} \right| |\Delta a| + \left| \frac{\partial \rho}{\partial b} \right| |\Delta b| + \left| \frac{\partial \rho}{\partial c} \right| |\Delta c| + \left| \frac{\partial \rho}{\partial m} \right| |\Delta m| \\ &= \left| -\frac{m}{a^2bc} \right| |\Delta a| + \left| -\frac{m}{ab^2c} \right| |\Delta b| + \left| -\frac{m}{abc^2} \right| |\Delta c| + \left| \frac{1}{abc} \right| |\Delta m| \\ &= \frac{m}{abc} \left( \frac{|\Delta a|}{a} + \frac{|\Delta b|}{b} + \frac{|\Delta c|}{c} + \frac{|\Delta m|}{m} \right) \\ &= \rho \left( \frac{|\Delta a|}{a} + \frac{|\Delta b|}{b} + \frac{|\Delta c|}{c} + \frac{|\Delta m|}{m} \right) \\ &= \frac{270\text{g}}{10 \cdot 6 \cdot 5\text{cm}^3} \left( \frac{0.01}{10} + \frac{0.01}{6} + \frac{0.01}{5} + \frac{0.5}{270} \right) \\ &\approx 0.00587 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \end{aligned}$$

Für den relativen Fehler ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta\rho|}{\rho} &\leq \frac{0.01}{10} + \frac{0.01}{6} + \frac{0.01}{5} + \frac{0.5}{270} \\ &\approx 0.00652 \hat{=} 0.652\%. \end{aligned}$$

## 4.4 Gradient

**Definition 4.2** Es sei  $f(\vec{x})$  partiell differenzierbar,

$\vec{\Delta x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)^T = \Delta x_1 \vec{e}_1 + \Delta x_2 \vec{e}_2 + \dots + \Delta x_n \vec{e}_n$ . Der Vektor

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\vec{x}^0} \vec{e}_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{\vec{x}^0} \vec{e}_2 + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{\vec{x}^0} \vec{e}_n$$

heißt Gradient der Funktion  $f$  im Punkt  $\vec{x}^0$ .

Schreibweise:  $\text{grad}f(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\vec{x}^0} \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{\vec{x}^0} \end{pmatrix}$ ; für  $n = 3$  gilt:  $\text{grad}f(\vec{x}^0) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\vec{x}^0} \\ \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\vec{x}^0} \\ \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{\vec{x}^0} \end{pmatrix}$ .

**Bemerkung 4.3** Durch Einführen des formalen Vektors  $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ , dem sogenannten Nablaoperator, folgt  $\text{grad}f = \nabla f$ .

**Bemerkung 4.4**

$$\begin{aligned} df(\vec{x}^0) &= \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\vec{x}^0} \Delta x_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{\vec{x}^0} \Delta x_2 + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_{\vec{x}^0} \Delta x_n \\ &= \text{grad}f(\vec{x}^0) \cdot \vec{\Delta x} \quad (\text{Skalarprodukt!}) \end{aligned}$$

**Beispiel 4.9**  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad \curvearrowright$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ f_y &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \text{grad}f &= \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen  $f_x$  und  $f_y$  sind außer im Ursprung stetig. Damit ist  $f$  total differenzierbar in  $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)^T$ :

$$df = \frac{1}{x^2 + y^2}(x dx + y dy) = \text{grad}f \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

Im Punkt  $P_0 = (1, 1)^T$  gilt dann  $\text{grad}f|_{P_0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Beispiel 4.10**  $F = \frac{\gamma m_1 m_2}{x^2 + y^2 + z^2}$

$$F_x = \frac{-\gamma m_1 m_2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \cdot 2x$$

$$\nabla F = \frac{-\gamma m_1 m_2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

### Rechenregeln:

Voraussetzungen:  $a, b \in \mathbb{R}$ ;  $a, b = \text{const.}$ ;

$f(\vec{x}), g(\vec{x})$  seien skalare Felder,  $h = (x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  eine Funktion einer Veränderlichen

1.  $\text{grad}(af + bg) = a \text{grad}f + b \text{grad}g$
2.  $\text{grad}(f \cdot g) = (\text{grad}f)g + f(\text{grad}g)$
3.  $\text{grad}h(f) = \frac{dh}{df} \cdot \text{grad}f$

**Beispiel 4.11** Für das obige Beispiel ergibt sich damit als Gleichung für die Tangentialebene im Punkt  $P_0$  (vergleiche mit oben!).

$$\begin{aligned} z - z_0 &= z - f(P_0) \simeq df(P_0) \\ &= \text{grad}f(P_0) \cdot \vec{\Delta x} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} \\ z - \frac{1}{2} \ln 2 &= \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}(y - 1) \\ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + z &= \frac{1}{2} \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

**Folgerung 4.1**  $\frac{df}{d\vec{l}}$  wird maximal, wenn  $\text{grad}f(\vec{x}^0)$  und  $\vec{l}$  parallel sind. Folglich zeigt der Gradient in die Richtung des Raumes, in der die Funktion am schnellsten wächst.

**Folgerung 4.2**  $\frac{df}{d\vec{l}}$  misst die Zunahme von  $f(\vec{x})$  bei Verschiebung von  $\vec{x}^0$  in Richtung  $\vec{l}$  um den Weg  $\vec{\Delta x}$ .

D.h. die Änderung von  $f$  pro Weeinheit hat in  $\vec{x}^0$  in Richtung von  $\text{grad}f$  ihren Maximalwert, nämlich  $\|\text{grad}f(\vec{x}^0)\|$ .

**Folgerung 4.3** In der zum Gradienten senkrecht stehenden Richtung gilt:

$$\frac{df}{d\vec{l}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = \text{const.}$$

**Definition 4.3** Die Zusammenstellung aller ersten partiellen Ableitungen einer Funktion  $f(\vec{x})$  an der Stelle  $\vec{x}^0$  in einer Matrix nach folgendem Schema bezeichnet man als JACOBI-Matrix:

$$J_f(\vec{x}^0) = \left( \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{array} \right) \Bigg|_{\vec{x}^0}$$

## 4.5 Extremwertaufgaben

Betrachten  $f = f(x, y)$ : eine gekrümmte Fläche im Raum. Bei Extremwerten liegt die Tangentialebene parallel zur x-y-Ebene.  $\curvearrowright$

$$\begin{aligned} 0 &= df(P_0) \\ 0 &= f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy \quad \curvearrowright \\ \left. \begin{array}{l} f_x(P_0) = 0 \\ f_y(P_0) = 0 \end{array} \right\} & \text{Gleichungssystem für } P_0 = (x_0, y_0)^T \end{aligned}$$

**Satz 4.2** Notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums

Es sei  $f = f(x, y)$ ,  $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f$  sei partiell differenzierbar. Ist  $P^0 = (x_0, y_0)^T$  die Stelle eines relativen Extremums, so gilt  $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{P_0} = 0$  und  $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{P_0} = 0$ .

Diese Bedingung ist nicht hinreichend, denn es gilt:

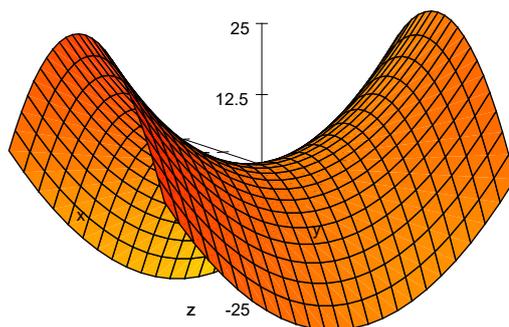
**Beispiel 4.12**  $f(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $P_0 = (0, 0)^T$

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= 2x|_{P_0} = 0 \\ f_y(0, 0) &= -2y|_{P_0} = 0 \end{aligned}$$

aber andererseits gilt weiter

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= x^2 \geq 0 \text{ in } U(P_0) \\ f(0, y) &= -y^2 \leq 0 \text{ in } U(P_0) \\ f(0, 0) &= 0, \end{aligned}$$

d.h. es liegt ein Sattelpunkt vor.



**Satz 4.3** *Hinreichende Bedingungen für einen Extrempunkt*

Es sei  $f = f(x, y)$ ,  $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f$  besitze stetige partielle Ableitungen 2. Ordnung.  
Gilt:

1.  $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{P_0} = 0$  und  $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{P_0} = 0$ .
2.  $D(P_0) = f_{xx}(P_0)f_{yy}(P_0) - [f_{xy}(P_0)]^2 > 0$
3.  $f_{xx}(P_0) < 0$ , so liegt bei  $P_0$  ein relatives Maximum vor.
4.  $f_{xx}(P_0) > 0$ , so liegt bei  $P_0$  ein relatives Minimum vor.

**Bemerkung 4.5**  $D = f_{xx}f_{yy} - [f_{xy}]^2 = \det \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$  heißt Diskriminante von  $f$ .

**Bemerkung 4.6** Gilt an einer extremwertverdächtigen Stelle  $P_0$

- a)  $D(P_0) < 0$ , dann liegt in  $P_0$  ein Sattelpunkt vor.
- b)  $D(P_0) = 0$ , dann ist keine Aussage zu  $P_0$  möglich. Zur Entscheidung müssen höhere Ableitungen von  $f$  herangezogen werden.

**Bemerkung 4.7** Im Fall von mehr als zwei Veränderlichen kann die notwendige Bedingung erweitert werden auf

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\vec{x}^0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Hinreichende Bedingungen für diesen Fall sind komplizierter. Es gilt

**Satz 4.4** Es sei  $f = f(\vec{x})$ ;  $\vec{x} \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ . Weiter sei  $f$  zweimal stetig differenzierbar in  $D_f$ . Gilt:

1.  $\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\vec{x}^0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$
2.  $A = (a_{ik}); \quad a_{ik} = \frac{\partial^2 f(\vec{x}^0)}{\partial x_i \partial x_k}$  besitzt durchweg positive (negative) Eigenwerte, dann hat  $f(\vec{x})$  bei  $\vec{x} = \vec{x}^0$  ein relatives Minimum (Maximum).

**Beispiel 4.13**  $f(x, y) = \frac{x^2}{2} - 4xy + 9y^2 + 3x - 14y + \frac{1}{2}; \quad D_f = \mathbb{R}^2 \quad \curvearrowright$

$$\begin{aligned} f_x &= x - 4y + 3 = 0 \\ f_y &= -4x + 18y - 14 = 0 \end{aligned}$$

Die Lösung dieses linearen Gleichungssystems durch Multiplikation der 1. Zeile mit 4 und Addition zur 2. ergibt

$$\begin{aligned} 2y - 2 &= 0 \\ y_0 &= 1 \\ x_0 &= 4y_0 - 3 = 1 \end{aligned}$$

In diesem Beispiel entsteht also nur ein einziger extremwertverdächtiger Punkt:  $P_0 = (1, 1)^T$ . Nun wird die hinreichende Bedingung überprüft:

$$\begin{aligned} f_{xx}(1, 1) &= 1 \\ f_{yy}(1, 1) &= 18 \\ f_{xy}(1, 1) &= f_{yx} = -4 \\ D(1, 1) &= 18 - 16 = 2 > 0. \end{aligned}$$

Damit liegt in  $P_0$  ein Extremum vor. Da  $f_{xx}(1, 1) = 1 > 0$  gilt, ist es ein Minimum. Wir erhalten also als Extrempunkt:  $P_0 = (1, 1, -5)^T$ .

**Beispiel 4.14** *Es liege ein Quader mit den Kantenlängen  $x, y, z$  vor. Gegeben ist die Summe der Kantenlängen  $S = x + y + z$ . Für welche Werte von  $x, y, z$  ist das Volumen des Quaders maximal?*

$$\begin{aligned} V &= x \cdot y \cdot z \\ z &= S - x - y \end{aligned}$$

Durch Einsetzen ergibt sich eine Zielfunktion, die nur noch von zwei Veränderlichen abhängig ist:

$$\begin{aligned} V &= x \cdot y \cdot (S - x - y) \\ &= xyS - x^2y - xy^2. \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen lauten:

$$\begin{aligned} V_x &= yS - 2xy - y^2 = y(S - 2x - y) = 0 \\ V_y &= xS - x^2 - 2xy = x(S - x - 2y) = 0. \end{aligned}$$

Durch Nullsetzen der Faktoren in den verschiedenen Kombinationen ergeben sich die extremwertverdächtigen Punkte

1.  $P_1 = (0, 0)^T$ , wenn man die Faktoren  $x$  und  $y$  null setzt.
2.  $P_2 = \left(\frac{S}{3}, \frac{S}{3}\right)^T$ , wenn man die Faktoren  $(S - 2x - y)$  und  $(S - x - 2y)$  null setzt:

$$\begin{aligned} S &= 2x + y \\ S &= x + 2y \quad \curvearrowright \\ -S &= -3y \end{aligned}$$

3.  $P_3 = (0, S)^T$ , wenn man die Faktoren  $x$  und  $(S - 2x - y)$  null setzt:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ S &= 2x + y = y \end{aligned}$$

4.  $P_4 = (S, 0)^T$ , wenn man die Faktoren  $y$  und  $(S - x - 2y)$  null setzt:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ S &= x + 2y = x. \end{aligned}$$

Offensichtlich können die Punkte  $P_1, P_3, P_4$  keine Maxima liefern, da wegen einer

Kantenlänge gleich null das Volumen ebenfalls null sein muss. Die Überprüfung der hinreichenden Bedingungen ergibt Folgendes:

$$\begin{aligned} D &= V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2 \\ &= (-2y)(-2x) - (S - 2y - 2x)^2 \\ &= 4xy - (S - 2y - 2x)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= 0 - S^2 < 0 \quad \curvearrowright \quad \text{Sattelpunkt in } P_1 \\ D_2 &= 4\frac{S}{3}\frac{S}{3} - \left(S - \frac{2S}{3} - \frac{2S}{3}\right)^2 \\ &= \frac{4}{9}S^2 - \frac{1}{9}S^2 > 0 \quad \curvearrowright \quad \text{Extrempunkt in } P_2 \\ D_3 &= 0 - (-S)^2 < 0 \quad \curvearrowright \quad \text{Sattelpunkt in } P_3 \\ D_4 &= 0 - (-S)^2 < 0 \quad \curvearrowright \quad \text{Sattelpunkt in } P_4 \end{aligned}$$

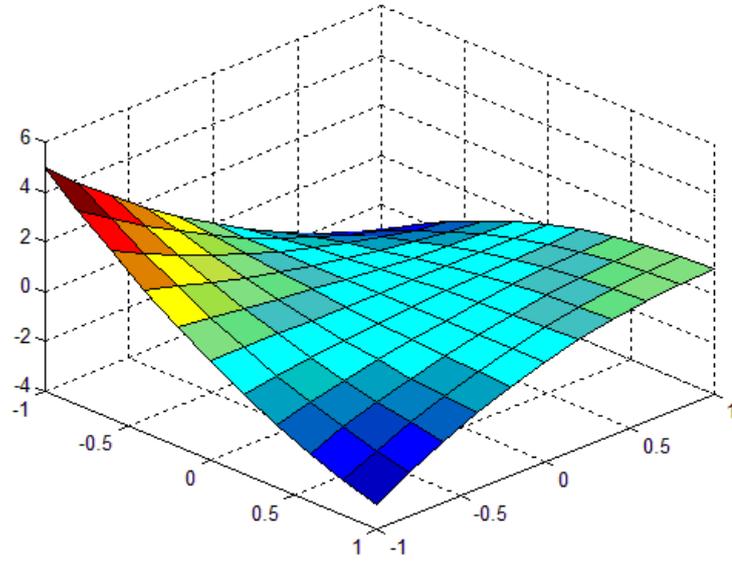
Im Punkt  $P_2$  wird nun auf Maximum oder Minimum geprüft:

$$V_{xx}|_{P_2} = (-2y)|_{P_2} = -2\frac{S}{3} < 0.$$

Folglich liegt in Punkt  $\left(\frac{S}{3}, \frac{S}{3}\right)^T$  ein Maximum vor. Der zugehörige  $z$ -Wert und das Volumen lauten

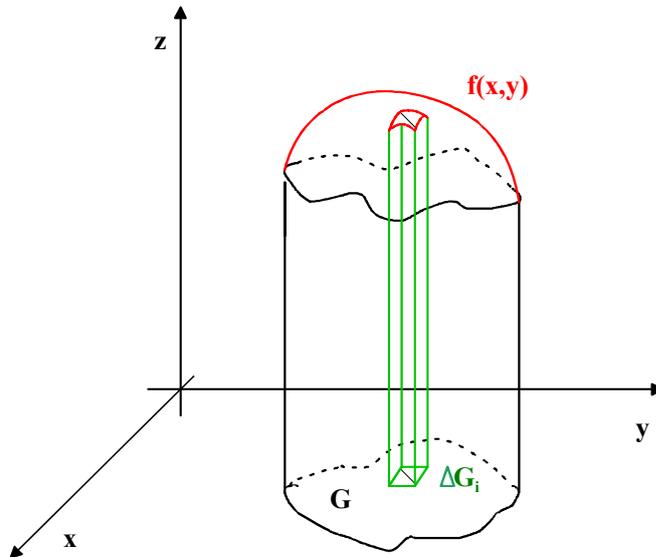
$$\begin{aligned} z &= S - x - y = \frac{S}{3} \\ V &= \frac{1}{27}S^3. \end{aligned}$$

Das folgende Bild zeigt die zum Maximum führende Funktion  $V = 3xy - xy^2 - x^2y$ , d.h. es wurde  $S = 3$  gewählt.



# 5 Integrale über ebene Bereiche (Flächenintegrale)

Wir betrachten das Volumen unter einer Fläche  $f(x, y)$ :



**Voraussetzungen:**

1. Wir bilden  $V_n(\omega) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) |\Delta G_i|$  mit  $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta G_i$  für beliebige Zerlegungen  $\omega$  des Gebietes  $G$ .
2.  $f(x, y)$  sei stetig und beschränkt auf  $G$
3.  $G$  sei beschränkt und abgeschlossen.

**Definition 5.1** Gilt für jede Zerlegung von  $G$  mit  $\lim_{i \rightarrow \infty} \max_i |\Delta G_i| = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(\omega) = I$$

mit ein und derselben Zahl  $I$ , so heißt

$$I = \iint_G f(x, y) dx dy$$

Flächenintegral von  $f(x, y)$  über  $G$ .

**Eigenschaften, die aus der Definition folgen:**

1.  $\iint_G c f(x, y) dx dy = c \iint_G f(x, y) dx dy$
2.  $\iint_G (f(x, y) + g(x, y)) dx dy = \iint_G f(x, y) dx dy + \iint_G g(x, y) dx dy$
3.  $\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy$   
für  $G = G_1 \cup G_2 \wedge G_1 \cap G_2 = \emptyset$  (bzw. eine Menge vom Maß Null)

**Bemerkung 5.1**  $dx dy$  ist zunächst als Symbol für das Flächenelement  $\Delta G_i$  zu verstehen. Die Form von  $\Delta G_i$  muss deshalb nicht als rechteckig vorausgesetzt werden.

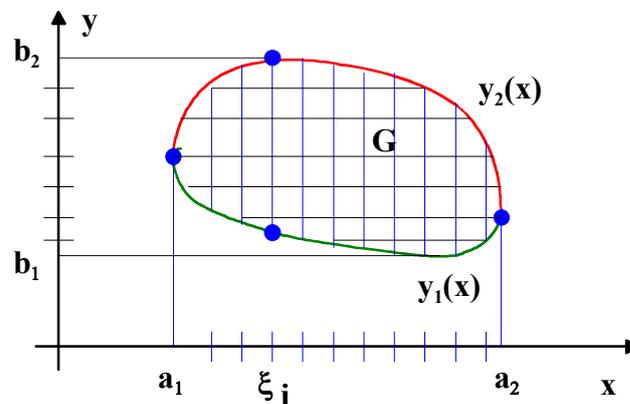
**Bemerkung 5.2**  $I$  gibt das Volumen des Zylinders mit der Grundfläche  $G$  und der Deckfläche  $f(x, y)$  an.

**Bemerkung 5.3** Gilt  $f(x, y) \equiv 1$  über  $G$ , so gibt  $I$  den Flächeninhalt von  $G$  an.

Die Definition ist jedoch zur Berechnung dieser Integrale ungeeignet.

## 5.1 Berechnung von Flächenintegralen

Wir wählen eine achsenparallele Zerlegung von  $G$  in  $m$  Teilintervalle in  $x$ -Koordinatenrichtung und in  $n$  Teilintervalle in  $y$ -Koordinatenrichtung. Die Begrenzungskurve von  $G$  wird in zwei Funktionen von  $x$  zerlegt:  $y_1(x)$  sei die untere und  $y_2(x)$  die obere Begrenzung:



$$I = \lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

**Heuristische Überlegung:**

Zuerst Ausführung eines Grenzüberganges:

$$I = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j \right) \Delta x_i$$

Für festes  $\xi_i$  müsste gelten:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j &= \int_{y_1(\xi_i)}^{y_2(\xi_i)} f(\xi_i, y) dy = F(\xi_i) \\ \Rightarrow I &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m F(\xi_i) \Delta x_i = \int_{a_1}^{a_2} F(x) dx \\ \Rightarrow I &= \iint_G f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{a_2} \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

**Bemerkung 5.4** Das in Klammern eingeschlossene Integral ist ein Parameterintegral, da der Integrand und die Grenzen von einem Parameter  $x$  abhängen. Dieser ist bei der Integration wie eine Konstante zu behandeln.

**Beispiel 5.1**

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^{3-x} (x+y) dy \\ &= \left( xy + \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_{y=1}^{y=3-x} \\ &= x(3-x) + \frac{1}{2}(3-x)^2 - x - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - x + 4 \end{aligned}$$

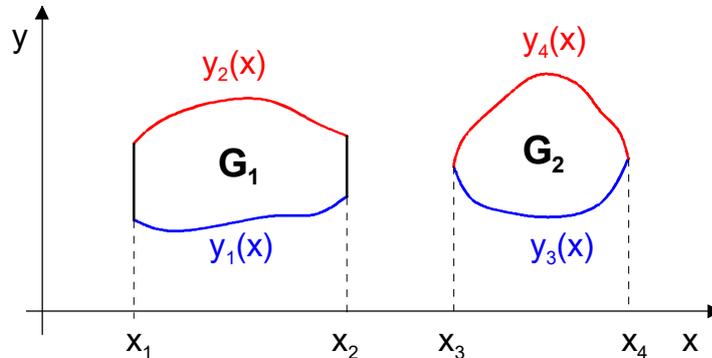
**Bemerkung 5.5** Wenn die Reihenfolge der Summationen vertauscht wird und  $x_1(y)$  bzw.  $x_2(y)$  die linke bzw. rechte Begrenzung von  $G$  bezeichnen, so ergibt sich völlig analog:

$$I = \iint_G f(x, y) dx dy = \int_{b_1}^{b_2} \left( \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

**Satz 5.1** Bei der Existenz des Flächenintegrals und des Parameterintegrals für  $x \in [a_1, a_2]$  (bzw.  $y \in [b_1, b_2]$ ) kann das Flächenintegral nach den oben angegebenen Formeln berechnet werden.

Für praktische Berechnungen wird  $G$  in endlich viele Normalbereiche zerlegt.

Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse:



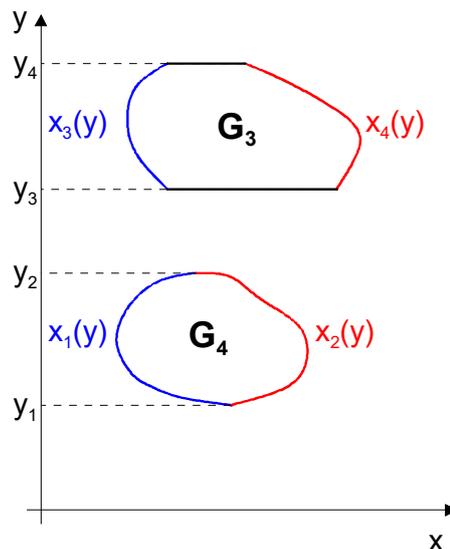
a) Projektion von  $G$  auf die  $x$ -Achse  $\implies x_1, x_2, x_3, x_4$

b) Ermittlung der unteren/oberen Funktionen  $\implies y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x)$

$$G_1 = \{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_2; y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

$$G_2 = \{(x, y) \mid x_3 \leq x \leq x_4; y_3(x) \leq y \leq y_4(x)\}$$

Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse:



a) Projektion von  $G$  auf die  $y$ -Achse  $\implies y_1, y_2, y_3, y_4$

b) Ermittlung der „linken/rechten“ Funktionen  $\implies x_1(y), x_2(y)$

$$G_4 = \{(x, y) \mid y_1 \leq y \leq y_2; x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$$

$$G_3 = \{(x, y) \mid y_3 \leq y \leq y_4; x_3(y) \leq x \leq x_4(y)\}$$

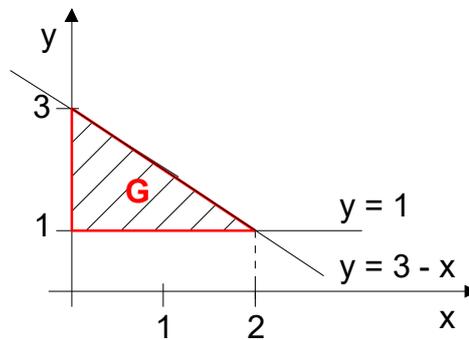
Normalbereichen können analog auf den räumlichen bzw. n-dimensionalen Fall übertragen werden.

**Bemerkung 5.6** Die Wahl der Integrationsreihenfolge kann den Rechenaufwand beeinflussen!

**Bemerkung 5.7** Für rechteckige Bereiche  $G$  ist die Integrationsreihenfolge beliebig:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dy \right) dx.$$

**Beispiel 5.2**  $I = \iint_G (x + y^2) dx dy$



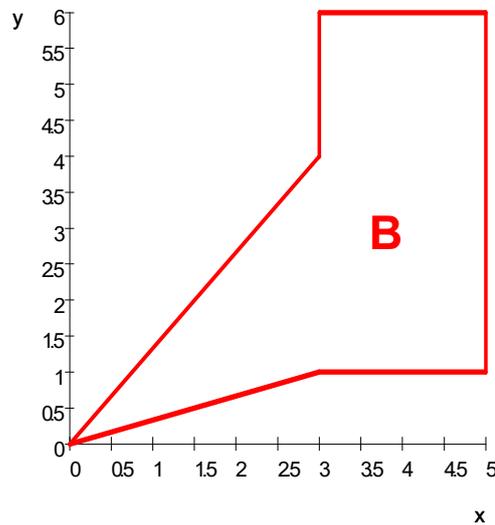
Normalbereich bzgl. der x-Achse :  $G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2; \quad 1 \leq y \leq 3-x\}$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left( \int_1^{3-x} (x + y^2) dy \right) dx \\ &= \int_0^2 \left[ xy + \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=1}^{y=3-x} dx \\ &= \int_0^2 \left( x(3-x) + \frac{1}{3}(3-x)^3 - x - \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \int_0^2 \left( -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 7x + \frac{26}{3} \right) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{26}{3}x \right]_0^2 \\ &= -\frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{2 \cdot 8}{3} - \frac{7 \cdot 2 \cdot 2}{2} + \frac{26 \cdot 2}{3} = 7.\overline{33} \end{aligned}$$

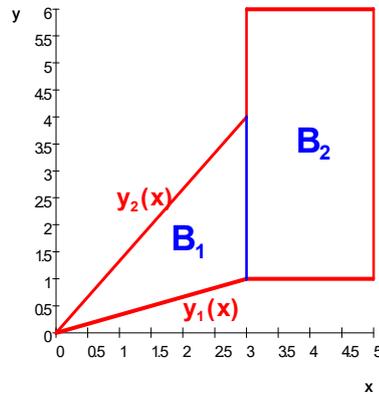
Normalbereich bzgl. der y-Achse :  $G = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 3; 0 \leq x \leq 3 - y\}$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^3 \left( \int_0^{3-y} (x + y^2) dx \right) dy \\
 &= \int_1^3 \left[ \frac{1}{2}x^2 + y^2x \right]_{x=0}^{x=3-y} dy \\
 &= \int_1^3 \left( \frac{1}{2}(3-y)^2 + y^2(3-y) \right) dy \\
 &= \int_1^3 (-y^3 + 3.5y^2 - 3y + 4.5) dy \\
 &= \left[ -\frac{1}{4}y^4 + \frac{3.5}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2 + 4.5y \right]_1^3 \\
 &= -\frac{1}{4}3^4 + \frac{3.5}{3}3^3 - \frac{3}{2}9 + 4.5 \cdot 3 + \frac{1}{4} - \frac{3.5}{3} + \frac{3}{2} - 4.5 = 7.3\bar{3}
 \end{aligned}$$

**Beispiel 5.3**  $f(x, y) = 2x - y$  sei auf  $B$  definiert



$B$  besteht aus den Normalbereichen  $B_1$  und  $B_2$  bezüglich der  $x$ -Achse:



$$B_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3; \frac{1}{3}x \leq y \leq \frac{4}{3}x\};$$

$$B_2 = \{(x, y) \mid 3 \leq x \leq 5; 1 \leq y \leq 6\};$$

Gesucht:  $I = \iint_B f(x, y) dB$

$$I = \iint_{B_1} f(x, y) dB + \iint_{B_2} f(x, y) dB \quad (\text{Aufspaltung von } B)$$

$$= \int_0^3 \left( \int_{\frac{1}{3}x}^{\frac{4}{3}x} (2x - y) dy \right) dx + \int_3^5 \left( \int_1^6 (2x - y) dy \right) dx \quad (\text{Herstellung der Doppelintegrale})$$

$$= \int_0^3 \left[ 2xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=\frac{1}{3}x}^{y=\frac{4}{3}x} dx + \int_3^5 \left[ 2xy - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=1}^{y=6} dx$$

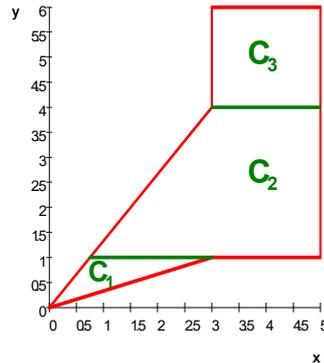
$$= \int_0^3 \left( 2x \frac{4}{3}x - \frac{1}{2} \frac{16}{9}x^2 - 2x \frac{x}{3} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{9} \right) dx + \int_3^5 \left( 12x - \frac{1}{2}36 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^3 \frac{7}{6}x^2 dx + \int_3^5 \left( 10x - \frac{35}{2} \right) dx$$

$$= \left[ \frac{7}{6} \frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 + \left[ 5x^2 - \frac{35}{2}x \right]_3^5$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{7}{2 \cdot 3 \cdot 3} 3 \cdot 3 \cdot 3 + 125 - \frac{35}{2} 5 - 5 \cdot 9 + \frac{35}{2} 3 \\
&= \frac{21}{2} + 80 - \frac{70}{2} = \frac{111}{2} = 55.5
\end{aligned}$$

Die Aufteilung von  $B$  in Normalbereiche bzgl. der  $y$ -Achse ergibt drei Teilgebiete und damit einen erheblich höheren Integrationsaufwand:



## 5.2 Anwendungen der Flächenintegrale

- Falls gilt  $f(x, y) \geq 0$  in  $B$ , so stellt  $I = \iint_B f(x, y) dB$  das Volumen eines Zylinders mit der Grundfläche  $B$  und der Höhe  $f(x, y)$  dar. D.h. gilt  $f(x, y) = \text{const.} = 1$ , so ergibt sich als Zahlenwert für  $I$  der Flächeninhalt  $A_B$  von  $B$ :

$$V = \iint_B f(x, y) dB; \quad A_B = \iint_B 1 dB$$

Ist die Bedingung  $f(x, y) \geq 0$  in  $B$  nicht erfüllt, so muss bei der Volumenberechnung das Flächenintegral an der Kurve  $f(x, y) = 0$  geteilt werden (Analogie zur Flächenberechnung mit eindimensionalen Integralen!). Bereiche mit unterschiedlichen Vorzeichen von  $f(x, y)$  sind getrennt zu behandeln und die Ergebnisse zum Schluss dem Vorzeichen entsprechend zu addieren.

Ist  $f_1(x, y)$  die Grundfläche des Körpers,  $f_2(x, y)$  die Deckfläche über  $B$ , dann gilt

$$V = \iint_B [f_2(x, y) - f_1(x, y)] dB$$

2. Sei  $B$  mit einer Massenbelegung versehen. Dann kann jedem Punkt  $P = (x, y)^T \in B$  eine stetige Flächendichte  $\rho(x, y)$  zugeordnet werden. Für die Masse des Flächenstückes  $B$  gilt dann:

$$m = \iint_B \rho(x, y) dB$$

3. Berechnung des Flächenschwerpunktes eines ebenen Bereiches  $B$  mit der Flächendichte  $\rho(x, y)$  :

$$x_s = \frac{1}{m} \iint_B x \rho(x, y) dB$$

$$y_s = \frac{1}{m} \iint_B y \rho(x, y) dB.$$

Ist die Dichte  $\rho = \rho_0 = \text{const.}$ , so kann in den obigen Formeln der Faktor  $\rho_0$  vor das Integral gezogen werden. Mit  $\frac{\rho_0}{m} = \frac{\rho_0}{B\rho_0} = \frac{1}{B}$  entstehen dann die Formeln für den **geometrischen Schwerpunkt**:

$$x_0 = \frac{1}{B} \iint_B x dB$$

$$y_0 = \frac{1}{B} \iint_B y dB.$$

4. Berechnung der Flächenträgheitsmomente eines ebenen Bereiches  $B$  mit der Flächendichte  $\rho(x, y)$  :
- a) bezüglich der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse:

$$I_x = \iint_B y^2 \rho(x, y) dB$$

$$I_y = \iint_B x^2 \rho(x, y) dB$$

- b) Polares Trägheitsmoment bzw. Trägheitsmoment bzgl. des Koordinatenursprunges

$$I_0 = \iint_B r^2 \rho(x, y) dB = \iint_B (x^2 + y^2) \rho(x, y) dB$$



# 6 Ergänzungen zur Linearen Algebra

## 6.1 Matrizen als lineare Abbildungen

Ein linearer Raum ist eine Menge von Elementen zwischen denen eine Addition und eine Multiplikation von einem Element und einer skalaren Größe  $\lambda \in \mathbb{C}$  definiert ist. Für diese beiden Rechenoperationen gelten analoge Rechengesetze wie im linearen Vektorraum (s. Mathematik 1). Es seien nun zwei lineare Räume  $\mathbb{X}$  und  $\mathbb{Y}$  gegeben.

**Definition 6.1** Eine Abbildung  $T : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$  mit  $y = T[x]$ ,  $x \in \mathbb{X}$ , für die gilt

$$T[\alpha x_1 + \beta x_2] = \alpha T[x_1] + \beta T[x_2]; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}; \quad x_1, x_2 \in \mathbb{X}$$

heißt lineare Abbildung. Die Elemente  $x$  werden als Urbilder und die Elemente  $y$  als Bilder bezeichnet.

**Beispiel 6.1** Die Funktion  $f(x) = 6x$  ist in diesem Sinn eine lineare Abbildung von  $\mathbb{X} = \mathbb{R}$  nach  $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$ , denn es gilt

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) = 6(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha(6x_1) + \beta(6x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2); \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

**Beispiel 6.2** Die Funktion  $f(x) = 6x + 1$  ist in diesem Sinn keine lineare Abbildung, denn es gilt

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= 6(\alpha x_1 + \beta x_2) + 1 = \alpha 6x_1 + \beta 6x_2 + 1 \\ &\neq \alpha 6x_1 + \alpha + \beta 6x_2 + \beta \\ &= \alpha(6x_1 + 1) + \beta(6x_2 + 1) \\ &= \alpha f(x_1) + \beta f(x_2); \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

**Beispiel 6.3** Nun sei  $A$  eine Matrix vom Typ  $(n, m)$ ,  $\vec{x}$  ein Vektor vom Typ  $(m, 1)$ . Dann existiert das Matrizenprodukt  $y = A\vec{x}$  und ist vom Typ  $(n, 1)$ . Nach der Distributivität des Matrizenproduktes erhalten wir

$$A(\alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{x}_2) = \alpha A\vec{x}_1 + \beta A\vec{x}_2; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Somit wird durch die Matrix  $A$  eine lineare Abbildung  $T$  vom linearen (Vektor-)Raum  $\mathbb{R}^m$  in den linearen (Vektor-)Raum  $\mathbb{R}^n$  definiert:  $T[\vec{x}] = A\vec{x}$ .

Lineare Abbildungen sind in der Mathematik und der Technik weit verbreitet. Deshalb werden wir nun einige Bezeichnungen und Eigenschaften kennenlernen.

**Definition 6.2** Das Urbild des Nullelementes  $0 \in \mathbb{Y}$  wird als Nullraum oder Kern der linearen Abbildung  $T$  bezeichnet:

$$N(T) = \{x \in \mathbb{X} \mid T[x] = 0\}$$

Die Dimension dieser Menge  $N(T)$  heißt Defekt von  $T$ .

**Definition 6.3** Die Menge der Bilder der linearen Abbildung  $T$  heißt Bild der linearen Abbildung oder Wertebereich (englisch „range“), Bezeichnung  $R(T)$ . Die Dimension dieser Menge heißt Rang von  $T$ , d.h.  $\text{rg}(L) = \dim(R(T))$ .

**Remark 6.1** Der Rang einer Matrix (Definition s. Mathematik 1) stimmt mit dem Rang der linearen Abbildung überein, die durch diese Matrix definiert wird:  
 $\text{rg}(T) = \text{rang}(A)$ .

**Beispiel 6.4** Das Bild der obigen Funktion  $f(x) = 6x$  ist der allgemein bekannte Wertebereich dieser Funktion:  $R(T) = \mathbb{R}$ , er hat die Dimension 1, d.h.  $\text{rg}(T) = \dim(R(f)) = 1$ . Der Nullraum  $N(T) = \{0\}$ .

**Beispiel 6.5** Das Bild des Matrixoperators  $T[\vec{x}] = A\vec{x}$  ist eine Teilmenge vom Raum  $\mathbb{R}^n$ :  $R(T) \subseteq \mathbb{R}^n$ , diese habe die Dimension  $r \leq n$ , d.h.  $\text{rg}(T) = \dim(R(f)) = r$ . Dann hat der Kern der Abbildung die Dimension  $n - r$ . Als Illustration betrachte man die folgende Matrix  $A$  und spezielle Vektoren  $\vec{z}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \quad a = \text{const.} \in \mathbb{R}$$

Dann gilt stets

$$A\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit wird der Unterraum der Vielfachen des Vektors  $\vec{z}$  auf das Nullelement des Bildes abgebildet.

Damit ergibt sich  $N(T) = \left\{ \vec{z} \mid \vec{z} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, a = \text{const.} \in \mathbb{R} \right\}$ ,  $\dim(N(T)) = 1$ .

Benutzt man allgemeine Elemente von  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$  als Urbilder, erhält man mit

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x - y \end{pmatrix}$$

(zufällig) den Unterraum  $R(T) = N(T) \subseteq \mathbb{Y} = \mathbb{R}^2$  mit der Dimension 1, d.h.  $\text{rg}(T) = 1 = \text{rang}(A)$ .

## 6.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Wir betrachten im Folgenden nur noch Räume  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n = \mathbb{Y} = \mathbb{R}^n$ , die durch eine lineare Abbildung in Matrixform miteinander verbunden sind.

Es sei also  $T = A$  eine Matrix vom Typ  $(n, n)$ ,  $\vec{x}$  ein Spaltenvektor vom Typ  $(n, 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Problem: Gibt es Vektoren  $\vec{x}$ ,  $\vec{x} \neq \vec{0}$  derart, dass sich die Multiplikation  $A\vec{x}$  auf die einfachere Operation  $\lambda\vec{x}$  reduziert?

**Definition 6.4** Existiert ein Vektor  $\vec{x}$ ,  $\vec{x} \neq \vec{0}$ , so dass die Gleichung  $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$  gilt, so heißt  $\lambda$  Eigenwert und  $\vec{x}$  der zugehörige Eigenvektor.

**Bemerkung 6.1**  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \neq 0 \implies A(\alpha\vec{x}) = \alpha A\vec{x} = \alpha\lambda\vec{x} = \lambda(\alpha\vec{x})$   
Neben  $\vec{x}$  ist auch  $\alpha\vec{x}$  ebenfalls Eigenvektor. D.h., Eigenvektoren sind nicht eindeutig.

**Bemerkung 6.2** Die Menge aller Eigenwerte wird als Spektrum von  $T$  bezeichnet.

### Berechnung von Eigenwerten:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \implies (A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$$

Fall 1:  $\text{rang}(A - \lambda E) = n \implies \vec{x} = \vec{0}$   
 $\vec{x}$  ist dann aber entsprechend Definition kein Eigenvektor.

Fall 2:  $\text{rang}(A - \lambda E) < n \implies \exists$  nichttriviale Lösungen  $\vec{x}$   
Forderung für deren Existenz:

$\det(A - \lambda E) = 0$  : Charakteristische Gleichung der Matrix  $A$ .

$\det(A - \lambda E) = P_n(\lambda) = 0$  ist die Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte.

**Folgerung 6.1** aus dem Fundamentalsatz der Algebra (GAUSS)

Jede Gleichung  $n$ -ten Grades besitzt im Bereich der komplexen Zahlen genau  $n$  Lösungen, wobei die  $k$ -fachen Lösungen  $k$ -mal zu zählen sind.

**Folgerung 6.2** Für eine  $(n, n)$ -Matrix existieren genau  $n$  Eigenwerte, wobei die  $k$ -fachen  $k$ -mal zu zählen sind.

**Folgerung 6.3** Eigenwerte einer reellen Matrix können komplexe Zahlen sein.

**Bemerkung 6.3** Die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sind reell.

**Beispiel 6.6** zur Berechnung von Eigenwerten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & -1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 - \lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(-1 - \lambda)(-\lambda) - (-\lambda) - (-\lambda)$$

$$= \lambda^2(-1 - \lambda) + 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = 1$$

**Beispiel 6.7** zur Berechnung von Eigenwerten

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \mu E) = \det \begin{pmatrix} 5 - \mu & 4 \\ -5 & -3 - \mu \end{pmatrix} = (5 - \mu)(-3 - \mu) + 20$$

$$= -15 + 20 - 5\mu + 3\mu + \mu^2 = \mu^2 - 2\mu + 5 = 0$$

$$\mu_1 = 1 + 2i, \quad \mu_2 = 1 - 2i$$

### Berechnung der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_i$ :

1. Lösen des Gleichungssystems  $(A - \lambda_i E)\vec{x} = \vec{0}$ , d.h. wir suchen den Kern der Abbildung  $T = A - \lambda_i E$ .
2. Da  $\text{rang}(A - \lambda_i E) = r < n \implies$  Lösung enthält  $n - r$  Parameter.
3. Durch unterschiedliche Wahl der  $n - r$  Parameter ist es möglich,  $n - r$  Eigenvektoren  $\vec{x}$  zu finden, die nicht durch Multiplikation mit einem Faktor ineinander überführbar sind.

**Beispiel 6.8** Sei  $A$  wie in Beispiel 7.6:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\underline{b}$
0	-1	0	0
-1	-1	1	0
0	1	0	0
-1	-1	1	0
0	-1	0	0
0	1	0	0

$\lambda_1 = 0$ , löse  $(A - \lambda_1 E)\vec{x} = A\vec{x} = \vec{0}$ :

$$\text{Wähle } x_3 = t = 1, \quad x_2 = 0, \quad -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \implies x_1 = 1$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{EV_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -2$ , löse  $(A - \lambda_2 E)\vec{x} = (A + 2E)\vec{x} = \vec{0}$ :

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\underline{b}$
2	-1	0	0
-1	1	1	0
0	1	2	0
2	-1	0	0
0	$\frac{1}{2}$	1	0
0	1	2	0

Wähle  $x_3 = t = 1$ ,  $x_2 = -2x_3 = -2$ ,  $2x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$

$$\Rightarrow \overrightarrow{EV_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 1$ , löse  $(A - \lambda_3 E)\vec{x} = (A - E)\vec{x} = \vec{0}$ :

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\underline{b}$
-1	-1	0	0
-1	-2	1	0
0	1	-1	0
1	1	0	0
0	-1	1	0
0	1	-1	0

Wähle  $x_3 = t = 1$ ,  $x_2 = x_3 = 1$ ,  $x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$

$$\Rightarrow \overrightarrow{EV_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Beispiel 6.9** Zu der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ gehören die Eigenwerte: } \lambda_1 = \lambda_2 = -3 \text{ und } \lambda_3 = 5.$$

Berechne die Eigenvektoren zu  $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ :

$$\text{Löse } (C - \lambda_1 E)\vec{x} = (C + 3E)\vec{x} = \vec{0}$$

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\underline{b}$
-1	-3	3	0
2	6	-6	0
-1	-3	3	0
1	3	-3	0
0	0	0	0
0	0	0	0

$\text{rang}(C + 3E) = 1 \implies 2 \text{ Parameter, } 2 \text{ Eigenvektoren}$   
 $x_1 = 0 - 3x_2 + 3x_3$

Wähle  $x_2 = 1, x_3 = 0 \implies \overrightarrow{EV_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wähle  $x_2 = 0, x_3 = 1 \implies \overrightarrow{EV_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Bemerkung 6.4** *Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.*

**Bemerkung 6.5** *Linearkombinationen von Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert sind wieder ein Eigenvektor zu eben diesem Eigenwert.*

**Folgerung 6.4** *Sind alle  $n$  Eigenwerte paarweise verschieden, so gibt es eine Basis  $V = \{\overrightarrow{EV_1}, \overrightarrow{EV_2}, \dots, \overrightarrow{EV_n}\}$  aus den Eigenvektoren zu den Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  von  $T = A$ .*

### 6.3 Hauptachsentransformation

Die Hauptachsentransformation ist in der (euklidischen) Geometrie ein Verfahren, mit dem man die Gleichungen von Ellipsen, Hyperbeln, ...; Ellipsoiden, Hyperboloiden, ... (Kurven und Flächen 2. Ordnung) durch eine geeignete Koordinatentransformation auf die entsprechende Normalform bringt und damit ihren Typ und ihre geometrischen Eigenschaften, wie z. B. den Mittelpunkt und die Halbachsen bestimmen kann. Dafür werden orthogonale Matrizen als Transformationsabbildungen benutzt, damit Längen und Winkel bei der Transformation nicht verändert werden. Wesentlicher Bestandteil ist dabei die Diagonalisierung einer symmetrischen Matrix mit Hilfe einer orthogonalen Matrix, die sogenannte Hauptachsentransformation. Sie findet auch in vielen anderen Wissenschaftsdisziplinen Anwendung, z.B. in der klassischen Mechanik, der theoretischen Physik, in der Statistik, bei der elektronischen Bildverarbeitung, in der Informatik bei der Mustererkennung zur Datenreduktion, ...

**Definition 6.5** Eine Matrix  $Q$  vom Typ  $(n, n)$  heißt orthogonal, wenn gilt  $Q^T Q = E$ .

**Folgerung 6.5** Die Spaltenvektoren einer orthogonalen Matrix stehen paarweise senkrecht aufeinander, sie bilden eine Orthonormalbasis im Raum  $\mathbb{R}^n$ .

**Folgerung 6.6** Eine orthogonale Matrix ist immer regulär, es gilt  $Q^{-1} = Q^T$

**Bemerkung 6.6** Eine orthogonale Matrix vermittelt eine winkeltreue Abbildung, die die Längen der abgebildeten Vektoren erhält.

**Bemerkung 6.7**  $|\det Q| = 1$

**Beispiel 6.10** Die Einheitsmatrix ist orthogonal. (Nachweis Hausaufgabe!)

**Beispiel 6.11** Die Matrix  $Q = \frac{1}{\sqrt{40}} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$  ist ebenfalls orthogonal, denn

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{40} = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 15 + 25 & 20 - 20 \\ 20 - 20 & 25 + 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Im Folgenden schränken wir uns auf lineare Abbildungen mit symmetrischen Matrizen  $A$  vom Typ  $(n, n)$  ein. In diesem Fall gibt es immer eine orthogonale Matrix  $Q$  so dass  $D = Q^T A Q$  eine Diagonalmatrix ist. Die Hauptdiagonale von  $D$  enthält dann die Eigenwerte von  $A$ . Eine symmetrische Matrix  $A$  besitzt immer  $n$  reelle Eigenwerte, wobei  $n$ -fache auch  $n$ -mal gezählt werden müssen. In  $Q$  verwendet man als Spaltenvektoren die normierten Eigenvektoren. (Bei mehrfachen Eigenwerten muss u.U. aus den zugehörigen Eigenvektoren mit Hilfe des Orthogonalisierungsverfahren nach E. SCHMIDT einer Orthonormalbasis berechnet werden.) Damit bei der Abbildung die Orientierung der Vektoren erhalten wird, sind die Eigenvektoren so zu orientieren, dass  $\det Q = +1$  gilt.

Betrachtet man  $A$  als lineare Abbildung  $T$ , so entspricht die Anwendung von  $T$  einer Koordinatentransformation in eine neue Basis  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ . Für die Vektoren in den verschiedenen Koordinatensystemen ( $\vec{x}$ : altes,  $\vec{\xi}$ : neues Koordinatensystem) gilt dann

$$\vec{x} = Q \vec{\xi}; \quad \vec{\xi} = Q^{-1} \vec{x} = Q^T \vec{x}.$$

**Beispiel 6.12**  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -2$   $\lambda_3 = 1$

und die Eigenvektoren  $\overrightarrow{EV_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{EV_2} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{EV_3} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

(s. Bsp. 7.8). Damit ergibt sich als orthogonale Transformationsmatrix

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \det \tilde{Q} = -1$$

Um den Richtungssinn der Vektoren bei der Transformation zu erhalten, muss ein Eigenvektor, d.h. eine Spalte das Vorzeichen wechseln, z.B. die mittlere:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \det Q = +1$$

und wir erhalten tatsächlich

$$D = Q^T A Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$