Übung zur Anwendung der Integration II

A) Aufgaben zur Vorbereitung/Arbeitsblatt aus Semester 1 bereithalten!

1. Berechnen Sie folgende Integrale mit dem Tafelwerk/Taschenrechner. Der Einsatz des TR ist für das unbestimmte Integral erlaubt. Die Grenzen bitte selbst auswerten!

a) $\int \frac{6}{1-3x}dx$ b) $\int_0^2 (x-3e^x+2\sin x)\sin x dx$ c) $\int x^6 \ln x dx$

B) Seminaraufgaben

1. Berechnen Sie folgende Integrale mit dem Tafelwerk oder dem Taschenrechner

a) $\int (3x-1)\cos(5x)dx$ b) $\int_0^\pi 5\cos x \sin(2x)dx$ c) $\int_0^\pi e^{6x}\cos(4x)dx$

2. Berechnen Sie die Länge folgender Kurvenstücke:

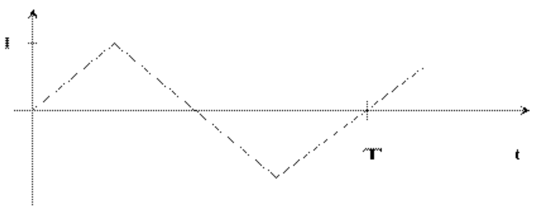
a) $y=\frac{1}{2}x^2$; $-1 \le x \le 1$ b*) x(t)=lnt; $y(t)=2\sqrt{t}$; $3 \le t \le 8$

c) $x(t)=t\sin t;\quad y(t)=\frac{2}{3}\sqrt{2t^3}$; $z(t)=2-t\cos t$; $1 \le t \le 3$

d) $x = a\cos t;\ \ y = a\sin t;$ $0 \le t \le 2\pi$; a = const., a > 0, $a \in \mathbb{R}$.

3. Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Fläche F :
$F = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 2\sin(3x),\ 0 \le x \le \pi/3 \}$.

4. Berechnen Sie den Effektivwert des Dreiecksstromes: (quadratischer Mittelwert)



5. Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale:

a) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ b) $\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$ c) $\int_0^\infty 2xe^{-2x}dx$

d) $\int_{-\infty}^0 \sin x dx$ e) $\int_0^3 \frac{dx}{x-2}$ f)* $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{|x-2|}}$

C) Hausaufgaben / Anwendungen der Integration II

1. Berechnen Sie folgende Integrale mit dem Tafelwerk oder dem Taschenrechner

a) $\int_0^{\pi/2} (4x+\frac{3}{4})\sin(2x)dx$ b) $\int_0^{\pi/2} x^2\sin(3x)dx$ c) $\int_1^e (\ln x)^3 dx$

2. Bestimmen Sie die Bogenlänge folgender Kurve:

a) $y^2 = x^3$ *von* $x = 0$ *bis* $x = 4/3$,

b) $x = t^2$, $y = (t^2 - 3)t/3$ zwischen den Schnittpunkten mit der x-Achse .

3. Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Fläche, die durch folgende Kurven begrenzt wird: $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$.

4.* In einem Wechselstromkreis ändere sich die Stromstärke i nach der Funktion

$i = i(t) = i_0 e^{-kt}\sin(\omega t)$. Bestimmen Sie die Ladungsmenge $q = \int_0^T i\,dt$, die in der Zeit

$0 \le t \le T = \frac{\pi}{\omega}$ durch den Stromkreis fließt.

5. Berechnen Sie, sofern existiert:

a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x+x^2}$ b) $\int_0^\infty e^{-x}dx$ c) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

Lösungen zum Teil A

1a)

$$-2\ln|1-3x|+C = -2\ln\left|(-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)\right|+C = -2\ln 3 - 2\ln\left|x-\frac{1}{3}\right|+C = -2\ln\left|x-\frac{1}{3}\right|+K; \quad C, K \in \mathbb{R}$$

b) -12,0723 c) $\frac{x^7}{7}\left(\ln x - \frac{1}{7}\right)+C$

Lösungen zum Teil B

1. a) $I = \frac{1}{5}(3x-1)\sin(5x) + \frac{3}{25}\cos(5x) + C$

b) $I = -\frac{5}{2}\left[\frac{1}{3}\cos(3x) + \cos x\right]_0^\pi = \frac{20}{3}$

c) $I = \left[\frac{1}{52}e^{6x}(\cos(4x) + 4\sin(4x))\right]_0^\pi = \frac{3}{26}\left(e^{6\pi}-1\right) \approx 1{,}77 \cdot 10^7$

2. a) 2.2956 LE b) 2.4054 LE c) 6 LE d) $2\pi a$ LE

3. F = 4/3; $M_y = \frac{2}{9}\pi$; $M_x = \frac{\pi}{3}$; $S_x = \frac{\pi}{6}$; $S_y = \frac{\pi}{4}$

4. $\frac{1}{\sqrt{3}} I$

5. a) 2 b,c) 0,5 d,f) $\nexists$ e) $2\sqrt{2}+2$

Lösungen C) Hausaufgaben / Anwendungen der Integration II

1a) $\pi + 3/4$ 1b) $-\frac{\pi}{9} - \frac{2}{27}$ 1c) $-2e + 6$

2a) 56/27 2b) $4\sqrt{3}$

3) $s_x = 0.75,\quad s_y = 0.3 \quad (F = 1/3,\ M_y = 1/4,\ M_x = 1/10)$

4) $q(t) = \frac{i_0 \omega}{k^2 + \omega^2}\left[e^{\frac{-k\pi}{\omega}} + 1\right]$

5a) ln2 5b) 1 5c) 3

Übung Zahlenreihen

A) Aufgaben zur Vorbereitung der Übungsvorlesung

1. Erstellen Sie eine Übersicht über die Eigenschaften und Formeln zur arithmetischen und geometrischen Reihe.
2. Prüfen Sie, ob geometrische Reihen vorliegen. Wenn ja, berechnen Sie die Summe:

   a) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+....$ b) $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+...$c) $64+32+16+8+4+....$ d) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+...$
3. Erstellen Sie eine Übersicht über die Anwendungsvoraussetzungen und Formeln zu den Konvergenzkriterien.
4. Prüfen Sie folgende Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit den angegebenen Kriterien auf Konvergenz, wenn a_k folgende Gestalt hat:

   LEIBNIZ: I) $(-1)^k \frac{2}{\ln(k)}$ II) $(-1)^k \frac{k}{k+1}$

   WURZELKR.: I) $\frac{2k}{3^k}$ II) $\frac{k}{9^k}$

   QUOTIENTENKR.: I) $\frac{2k}{3^k}$ II) $\frac{2^k}{k+1}$
5. Erstellen Sie eine Übersicht über die Eigenschaften von Zahlenreihen.

B) Übungsaufgaben

1. Ein Betrieb erreiche im 1. Jahr einen Umsatz von 120 Mio. Euro. Der Umsatz nehme jedes Jahr a) um 5 Mio. Euro b) um 5% des Vorjahresumsatzes zu.
   Berechnen Sie jeweils den Umsatz im 10. Jahr sowie den Gesamtumsatz in den 10 Jahren.
2. Wenn die Post Briefmarken von 5 Cent bis 100 Euro in Abständen von jeweils 5 Cent als Dauerserie drucken ließe, welchen Betrag müsste ein Sammler für den gesamten Satz aufwenden?
3. Ein aus einem Betrieb ausscheidender Vorstand erhält folgende vererbbare Pensionszulage: Im 1. Jahr 200 000 Euro. Nach jedem Jahr nehme die Pension um 25% der Vorjahrespension ab.
   (a) Nach wieviel Jahren liegt der Auszahlbetrag erstmals unter 1 Euro?
   (b) Welcher Betrag wird in den ersten 44 Jahren ausgezahlt?
4. Untersuchen Sie mit dem angegebenen Konvergenzkriterium die Zahlenreihe : $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, auf Konvergenz, wenn a_k folgende Gestalt hat:

   (a) LEIBNIZ: I) $\frac{(-1)^k k}{(k+2)^2}$ II) $\frac{(-1)^k (k^2-4k)}{k^2}$ III) $\frac{6}{(-1)^k \sqrt{(4k+1)}}$ IV) $\frac{2(-1)^k}{\ln(k)}$ V) $\frac{1}{(-1)^k(15k+6(-1)^k)}$
   VI*) $\frac{(-1)^k}{[3k+\cos(k\pi)]}$

   (b) WURZELKR.: I) $\frac{5^k}{4^k(2k)^2}$ II) $\left(\frac{k+200}{2k+7}\right)^k$ III) $\frac{2^k}{(k+1)}$ IV) $\frac{(3k-2)^k k^k}{k^2}$ V) $\frac{3+(-1)^k}{2^k}$

   (c) QUOTIENTENKR.: I) $\frac{3^k k!}{k^k}$ II) $\frac{2^k}{(k+1)!}$ III) $\frac{2k-1}{2^k}$ IV) $\frac{(3k-2)k!}{k^2}$ V) $\frac{3+(-1)^k}{2^k}$ VI*) $\frac{(k!)^2}{(2k)!}$

   (d) *VERGLEICHSKR.: I) $\frac{1}{k^2+1}$ II) $\frac{1}{\ln k}$ III) $\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

   (e) INTEGRALKR.: I) $\frac{k}{(k+1)^3}$ II) $\frac{1}{k^2+1}$ III) $\frac{5}{5k-1}$ IV) $\frac{k}{1+k^2}$ V) $\frac{1}{(2k+1)^2-1}$ VI*) $\frac{1}{2k-5}$

   (f) I) $\frac{2^k}{(k+1)!}$ II) $\frac{1}{2k+1}\left(\frac{3}{2}\right)^k$ III) $(-1)^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}}$ IV) $\left(\frac{1}{2}+\frac{384}{k}\right)^k$ V) $\frac{1}{\sqrt{3k+1}}$

C) Hausaufgaben

1. Untersuchen Sie auf Konvergenz: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, wenn a_k folgende Gestalt hat:
   a) $\frac{k}{e^k}$ b) $\frac{(-1)^{k+1}k}{(k+1)^k}$ c) $\frac{(-1)^k}{1+3^k}$ d) $\frac{k}{(1+k^2)^2}$ e) $\frac{(2k+1)k!}{k(k+1)}$ f) $\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{2k-1}}$ g) $\frac{7^n}{(1+\frac{1}{n})^n}$
2. Geben Sie von der Zahlenreihe $s = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots$ das allgemeine Glied, eine Summenformel und die Summe der Reihe (mit Begründung) an. Wie heißt eine solche Reihe?
3. Geben Sie von der Zahlenreihe $S = -17 - 10 - 3 + 4 + 11 + 18 + \ldots.$ das allgemeine Glied, eine Summenformel und die Summe der Reihe (mit Begründung!) an. Wie heißt eine solche Reihe?
4. Auf einer Musik-CD kann auf einer spiralförmigen Kurve zwischen den Durchmessern $d_i = 44\ mm$ und $d_a = 116\ mm$ Information gespeichert werden. Wir nähern diese Kurve durch konzentrische Kreise mit dem Abstand 1.6 μm an. Wie lang ist diese Kurve? Wie lange spielt eine voll beschriebene CD, wenn die Abtastgeschwindigkeit $1.3 m/s$ beträgt
5. *Herr Maier geht mit seinem Hund spazieren. Sie gehen auf einen Baum zu, der c Meter entfernt ist. Herr Maier geht mit konstanter Geschwindigkeit, der Hund rennt mit der dreifachen Geschwindigkeit voran. Sobald der Hund den Baum erreicht hat, kehrt er zu Herrn Maier zurück; dann kehrt er erneut um und rennt wieder zum Baum zurück usw. a_n sei die Entfernung zum Baum beim n-ten Treffen, $a_1 = c$. Welchen Weg legt der Hund zurück bis Herr Maier den Baum erreicht?

Lösungen zum Teil A)

1. s. Hefter ==> Zusammenstellung erarbeiten
2. a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{3}{2}$;
   b) $\frac{1}{3} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{4}$
   c) $64 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 64 \cdot 2 = 128$
   d) keine geometrische Reihe
3. s. Hefter ==> Zusammenstellung erarbeiten
4. LEIBNIZ I) konvergent II) divergent
   WURZELKRITERIUM: I) konvergent II) konvergent
   QUOTIENTENKRITERIUM: I) konvergent II) divergent
5. s. Hefter ==> Zusammenstellung erarbeiten

Lösungen zum Teil B)

1. (a) arithmetische Reihe, $a = 120,\ b = 5,\ s_{10} = 1425(\cdot 10^6 Euro),\ a_{10} = 165(\cdot 10^6 Euro)$
   (b) geometrische Reihe, $a_0 = 120,\ q = 1{,}05,\ s_{10} = 1509{,}34(\cdot 10^6 Euro),\ a_{10} = 186{,}16(\cdot 10^6 Euro)$
2. arithmetische Reihe, $s_{2000} = 100\ 050\ Euro$
3. a) nach 44 Jahren b) 799 997,45 Euro
4. .

	I)	II)	III)	IV)	V)	VI)*
a)	konv.	div.	konv.	konv.	konv.	konv.
b)	div.	konv.	div.	div.	konv.	—
c)	div.	konv.	konv.	div.	keine Aussage	konv.
d)	konv.	div.	div.	—	—	—
e)	konv.	konv.	div.	div.	konv.	div.
f)	QK, konv.	QK, div.	LK, konv.	WK, konv.	IK, div.	—

Lösungen zum Teil C) Hausaufgaben

1. a) bis d) und f) : konvergent, e), g): divergent
2. $a_k = 9\frac{1}{3^{k-1}}, \quad q = \frac{1}{3}, \quad s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{3^{k-1}} = \frac{9}{1-\frac{1}{3}} = \frac{9}{2} \cdot 3 = 13,5$ geometrische Reihe
3. $a_k = -17 + (k-1) * 7, \quad d = 7, \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} (-17 + (k-1) * 7)\,, \quad s_n = -17n + \frac{n}{2}(n-1) \cdot 7 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$,

   da n^2 schneller wächst als n, arithmetische Reihe
4. Weglänge = 5654.87 m, Spieldauer = 72.5 min
5. 3c

Übung Potenzreihen

A) Aufgaben zur Vorbereitung der Übungsvorlesung

1. Wiederholen Sie die Begriffe Funktionenreihe, Partialsumme, Konvergenzbereich, Konvergenzradius und Summe der Reihe am Beispiel von $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{2}\right)^k$.
2. Untersuchen Sie mit Hilfe vom Wurzel- und vom Quotientenkriterium den Konvergenzbereich der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-2)}{k}^k$. Setzen Sie die ermittelten Randpunkte in die Reihe ein und untersuchen Sie die entstehenden Zahlenreihen mit den entsprechenden bekannten Konvergenzkriterien für Zahlenreihen auf Konvergenz.
3. Erstellen Sie sich eine Arbeitsanleitung zur Bestimmung des Konvergenzbereichs einer Potenzreihe. Welche Konvergenzkriterien sind bei der Randpunktuntersuchung noch sinnvoll?
4. Suchen Sie im Tafelwerk die Reihe für $\cos x$ und bestimmen Sie daraus die Reihe für $\cos(3x)$, indem Sie x durch $3x$ ersetzen. Wie ändert sich dabei der Konvergenzradius?
5. Ersetzen Sie in der Reihe von A2) x durch $3x$: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3x-2)}{k}^k$. Wie ändert sich nun der Konvergenzradius?
6. Wiederholen Sie die Formel zur Entwicklung einer Funktion $f(x)$ in eine Taylorreihe an der Stelle x_0. Werten Sie diese Formel bis zum 4. Glied für $f(x) = \cos x$ und $x_0 = \frac{\pi}{4}$ aus.

B) Übungsaufgaben

1. Für welche x konvergieren folgende Reihen?
   a) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{2k-1}\left(\frac{x}{3}\right)^k$ b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(4-3x)}{k^2}^k$ c) $\sum_{k=1}^{\infty}k!x^k$ d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{3^k(k+1)}$ e) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2x-3)^k}{2k-1}(-1)^{k+1}$
   f) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3x+5)^k}{(4k+1)(-1)^k}$ g) $\sum_{k=1}^{\infty}k^kx^k$ h) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)^k}(x+1)^k$ i)* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2k}}{4^k}$ j)* $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^kx^k}$
   k)* $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(kx)}{2}\right)^k$ l*) $\sum_{k=1}^{\infty}2^ka_k(x-2)^{3k+5}$, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k$ in $(-r,r)$ konvergiert
2. Bestimmen Sie durch Verwendung bekannter Reihenentwicklungen die Taylorreihen bzw. Werte von:
   a) $e^{-x}\sin x$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\ln(1+x)}$ c) $\int_0^t e^{-x^2}dx$
3. * Bestimmen Sie im Konvergenzbereich der jeweiligen Reihen die Summen von
   a) $\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n$ b) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$
4. Entwickeln Sie in eine Taylorreihe:
   a) $f(x) = \frac{1}{2x-3}$ bei $x_0 = 0$ b) $f(x) = \ln(x+1)$ bei $x_0 = 0$
   d) $f(x) = x^4 - x^2 + 2x$ bei $x_0 = 1$ und bei $x_0 = 0$
   d) $f(x) = (1+x)^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$, bei $x_0 = 0$; zuerst allgemein, dann speziell für $\alpha = -1$

C) Hausaufgaben zu Potenzreihen

1. Für welche x konvergieren folgende Reihen?
   a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^k}{k+3}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{2^k(2k-1)}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x-1}{k}\right)^k$ d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k3^k(x-5)^k}$
2. Bestimmen Sie unter Benutzung bekannter Reihen:
   a) eine Reihenentwicklung für $f(x) = x^2\frac{e^x}{1-x} + 3x^3$ in $x_0 = 0$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}$
   c) eine Reihenentwicklung für $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\ln(1+x)$ in $x_0 = 0$ Hinweis: zuerst Logarithmengesetz anwenden
3. Entwickeln Sie in eine Taylorreihe und geben Sie die ersten 4 Glieder an:
   a) $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{3}$ b) $f(x) = (x-1)e^x$ in $x_0 = 0$ c) $f(x) = \sqrt{1+x}$ in $x_0 = 0$
4. Berechnen Sie näherungsweise aus den ersten beiden Gliedern der Reihe aus Hausaufgabe 3c:
   $\sqrt{1.004}, \sqrt{0.992}, \sqrt{90}$ (zuerst 81 ausklammern) . Vergleichen Sie mit den exakten Werten.

Lösungen zum Teil A)

1. a) Glieder der Reihe sind Funktionen
   b) Partialsumme: $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x+1}{2}\right)^k$
   c) Konvergenzbereich $= \{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2}\right)^k$ besitzt einen Grenzwert$\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1\}$ (geometrische Reihe!)
   d) Konvergenzmittelpunkt: $x = -1$; Konvergenzradius: $r = 2$
   e) Summe der Reihe: $s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x+1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} = \frac{2}{2-x-1} = \frac{2}{1-x}$ (geometrische Reihe!)

2. $x_0 = 2, \quad b_k = \frac{(x-2)^k}{k}$

   Quotientenkriterium: $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = |x-2| \overset{!}{<} 1 \quad \curvearrowright \quad 1 < x < 3$

   Wurzelkriterium: $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|b_k|} = \frac{|x-2|}{1} \overset{!}{<} 1 \quad \curvearrowright \quad 1 < x < 3$

   $x = 3 : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$: harmonische Reihe: divergent

   $x = 1 : \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$: alternierende Reihe: Leibnizkriterium ist erfüllt (Nachweis!): konvergent

   $\curvearrowright Konvergenzbereich: \quad 1 \le x < 3$

3. $\cos(3x) = 1 - \frac{9}{2!}x^2 + \frac{81}{4!}x^4 - \frac{3^6}{6!}x^6 + ...; Konvergenzbereich = \mathbb{R}$

4. $Konvergenzbereich: \quad \frac{1}{3} \le x < 1$

5. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(1 - (x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2 + \frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3 + \frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4 - ....\right)$

Lösungen zum Teil B)

1. a) $I = (-3;3)$ b) $I = \left[1; \frac{5}{3}\right]$ c) $I = \{0\}$ d) $[-3;3)$ e) $I = (1;2]$
   f) $I = (-2; -\frac{4}{3}]$ g) $I = \{0\}$ h) $I = \mathbb{R}$ i) $(0;4)$ j) $I = (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$
   k) $I = \mathbb{R}$ da Abschätzung durch geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{2}$
   l) $I = \left(-\sqrt[3]{\frac{r}{2}} + 2; \sqrt[3]{\frac{r}{2}} + 2\right)$

2. (a) $\mathrm{e}^{-x}\sin x = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + ...$
   (b) 1
   (c) $\int_0^t e^{-x^2 dx} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{n!(2n+1)}$

3. (a) geometrische Reihe mit $q = x - 2$, $I = (1;3)$; $s = s(x) = \frac{1}{3-x}$
   (b) $s = e^x - x - \frac{1}{2}x^2$; $I = \mathbb{R}$

4. (a) $f(x) = -\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\frac{x}{1!} - \frac{8}{27}\frac{x^2}{2!} - ... - \frac{2^n n!}{3^{n+1}}\frac{x^n}{n!} + ... = -\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2x}{3}\right)^n$
   (b) $f(x) = \frac{x}{1!} - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 + -... + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}(n-1)!x^n + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$
   (c) $f(x) = 2 + 4(x-1) + 5(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$ bei $x_0 = 1$
   $f(x) = x^4 - x^2 + 2x$ bei $x_0 = 0$

Lösungen zum Teil C)

1. a) $I = [-1;0)$ b) $I = [-1;3)$ c) $I = \mathbb{R}$ d) $I = \mathbb{R} \setminus \left[\frac{14}{3};\frac{16}{3}\right)$ e) $I = (-e;e)$

2. a) $f(x) = x^2 + 5x^3 + \frac{5}{2}x^4 + \frac{8}{3}x^5 + ...$b) 1 c) $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{5}{12}x^5 - ....$
   d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 x}dx = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4 - \frac{5}{256}\varepsilon^6 - ...)$, $u \cong \frac{\pi}{2}(3a + \frac{b^2}{a})$

3. (a) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\frac{1}{2!}(x - \frac{\pi}{3})^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{3!}(x - \frac{\pi}{3})^3 + ...$
   (b) $f(x) = -1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + ... + \frac{n-1}{n!}x^n + ...$
   (c) $f(x) = 1 + \binom{0.5}{1}x + \binom{0.5}{2}x^2 + \binom{0.5}{3}x^3 + ... = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + ...$
   (d) $f(x) = 1 + \binom{-0.5}{1}x^2 + \binom{-0.5}{2}x^4 + \binom{-0.5}{3}x^6 + ... = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x^4 - \frac{5}{16}x^6 + ...$

4. $\sqrt{1.004} \cong 1.002$ (1.001998) $\sqrt{0.992} \cong 0.996$ (0.995991) $\sqrt{90} \cong 9.5$ (9.4868)

Übung Fourierreihen

A) Aufgaben zur Vorbereitung der Übungsvorlesung

1. Skizzieren Sie $y_1 = x^2$ und $y_2 = \sin x$ sowie die folgenden Funktionen jeweils in einem neuen Koordinatensystem (evtl. auch mit dem TR!). Überlegen Sie, welche Auswirkungen die eingefügten Parameter haben!

   (a) $y_3 = x^2 + 1, \quad y_4 = \sin x - 1 \quad y_5 = y_1 + a,\ a \in \mathbb{R}$

   (b) $y_3 = \frac{1}{2}x^2, \quad y_4 = -3\sin x \quad y_5 = by_1,\ b \in \mathbb{R}$

   (c) $y_3 = (x)^2, \quad y_4 = \sin(3x)$

   (d) $y_3 = \left(-\frac{1}{2}x\right)^2, \quad y_4 = \sin(-3x) \quad y_5 = y_1(cx),\ c \in \mathbb{R}$

   (e) $y_3 = (x-1)^2, \quad y_4 = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad y_5 = y_1(x+d),\ d \in \mathbb{R}$

   (f) $y_3 = \left(\frac{1}{2}(x-2)\right)^2, \quad y_4 = \sin(2x+\pi) \quad y_5 = by_1(c(x+d)) + a,\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$

2. Wiederholen Sie das Zeichnen linearer Funktionen und das Ablesen linearer Funktionen aus dem Funktionsbild, z.B. anhand von.$y_1 = 3x - 1$ und $y_2 = -\frac{1}{2}x$.

3. Was müssen Sie von einer Funktion wissen, um in der Formelübersicht die richtige Formel zur Aufstellung der Fourierreihe für diese Funktion zu finden und warum? - Stellen Sie mit diesem Wissen eine Arbeitsanleitung für die Berechnung einer komplexen Fourierreihe aus der gegebenen Funktionsdarstellung auf.

4. Berechnen Sie folgende Integrale mittels Tafelwerk/Taschenrechner:

   (a) $\int_0^\pi x^2 dx$ und $\int_0^\pi x^2 \cos(kx)\, dx$

   (b) $\int \exp(-ik2\pi x) dx$ und $\int_0^1 (1-x)\exp(-ik2\pi x) dx$ mit $k \in \mathbb{Z}$

B) Übungsaufgaben

1. (a) Entwickeln Sie $f(x) = x^2$ in $[-\pi, \pi]$ in eine Fourierreihe! (komplexe Form)

   (b) Stellen Sie die trigonometrische Form dieser Fourierreihe auf. Setzen Sie die Werte $x = 0$ und $x = \pi$ in die Reihe ein und bestimmen Sie die Summe der entstehenden Reihe mit Hilfe des Funktionswertes von $f(x)$ an diesen Stellen.

   (c) Bestimmen Sie das Amplitudenspektrum und den Klirrfaktor! (Hinweis: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$)

2. Setzen Sie periodisch fort und entwickeln Sie in eine Fourierreihe: (komplexe Form)

   (a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} \le x < 2\pi \end{cases}$
   (Periodenlänge: 2π)

   (b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \le x < \frac{a}{4} \\ 0 & \text{für } \frac{a}{4} \le x \le a \end{cases}$
   (Periodenlänge: a)

3. Zeichnen Sie die Funktion $f(x)$, setzen Sie sie mit der Periode 4π gerade periodisch fort und entwickeln Sie sie in eine komplexe Fourierreihe: $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < x < \pi \\ 15 & \text{für } \pi \le x < 2\pi \end{cases}$

4. Entwickeln Sie $f(x) = 1 - x$ für $x \in [0,1]$ in eine komplexe Fourierreihe

   (a) mit Periodenlänge = 1,

   (b) mit Periodenlänge = 2, wobei f(x) gerade fortgesetzt wird

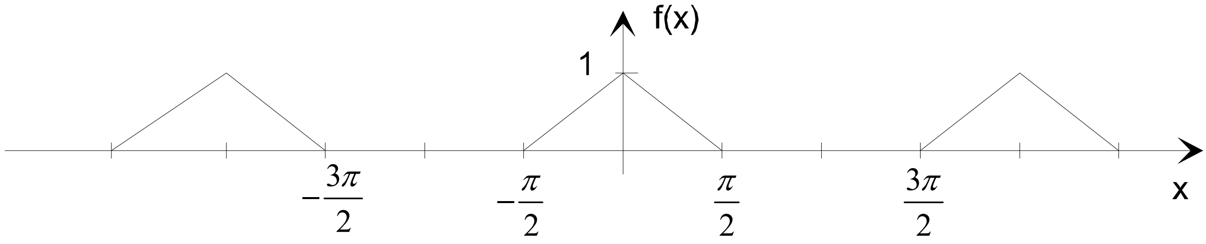
   (c) mit Periodenlänge = 2. wobei f(x) ungerade fortgesetzt wird

5. *Es sei die Fourierreihe für $f(x)$ bekannt. Bestimmen Sie die Fourierreihe für

   (a) $g(x) = f(x) + c$,
   (b) $h(x) = f(x + d)$,
   (c) $k(x) = b \cdot f(x)$,
   (d) $r(x) = f(ax)$ mit $a, b, c, d \in \Re$

6. *Lösen Sie die Aufgabe 4c) mit Hilfe der Reihenentwicklung aus Aufgabe 4a) und den Lösungsansätzen von Aufgabe 5).

7. Entwickeln Sie in eine Fourierreihe:



8. Entwickeln Sie folgende Funktion in die komplexe Form der Fourierreihe
   $f(x) = e^{|x|}$ für $-1 \leq x < 1$

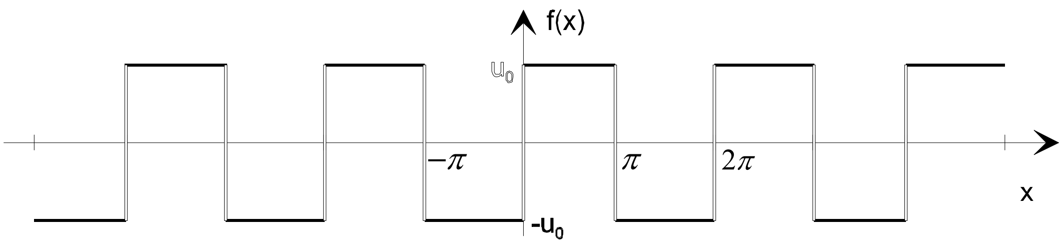
C) Hausaufgabe Fourierreihen

1. Entwickeln Sie $f(x) = |x|$ in $[-\pi, \pi]$ in eine Fourierreihe in komplexer Form.

2. Welche der folgenden Reihen ist eine Fourierreihe?

   (a) $\sum_{k=7}^{\infty} a_k \cos bx$
   (b) $\sum_{k=7}^{\infty} a_k \cos kx$
   (c) $x \cos x + x^2 \cos^2 x + x^3 \cos^3 x + ...$
   (d) $\sin 3x + 7$
   (e) $e \sin x + e^2 \sin 2x + e^3 \sin 3x + ...$
   (f) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)^2$

3. Entwickeln Sie folgende Funktion in eine Fourierreihe in komplexer Form und bestimmen Sie bei b) das Amplitudenspektrum sowie den Klirrfaktor :
   a) $f(x) = e^{-|x|}$ für $-\pi \leq x < \pi$
   b)



Lösungen zum Teil A)

1. (a) $a \in \mathbb{R}:$ Verschiebung des Graphen in y-Richtung um a

   (b) $b \in \mathbb{R}:$
   $1 < b:$ Streckung des Graphen in y-Richtung
   $0 < b < 1:$ Stauchung des Graphen in y-Richtung
   $-1 < b < 0:$ Stauchung des Graphen in y-Richtung und zusätzliche Spiegelung an der x-Achse
   $-1 > b:$ Streckung des Graphen in y-Richtung und zusätzliche Spiegelung an der x-Achse

   (c) und

   (d) $c \in \mathbb{R}:$
   $1 < c:$ Stauchung des Graphen in x-Richtung
   $0 < c < 1:$ Streckung des Graphen in x-Richtung
   $-1 < c < 0:$ Streckung des Graphen in x-Richtung und zusätzliche Spiegelung an der y-Achse
   $-1 > c:$ Stauchung des Graphen in x-Richtung und zusätzliche Spiegelung an der y-Achse

   (e) $d \in \mathbb{R}$:Verschiebung des Graphen in x-Richtung
   $d > 0$: nach links
   $d < 0$: nach rechts

2. $y = mx + n: \quad m = \frac{\triangle y}{\triangle x}; \quad n:$ Schnittpunkt mit der y-Achse
   (nach links geneigte Geraden haben einen negativen Anstieg)

3. Symmetrie, Periodenlänge, Funktionsdarstellung im Integrationsgebiet

   (a) $\frac{1}{3}\pi^3, \quad \frac{2\pi}{k^2}(-1)^k$

   (b) -$\frac{1}{ik2\pi}\exp(-ik2\pi x) + C, \quad -\frac{i}{2k\pi}$

Lösungen zum Teil B)

1. $f(x)$ ist $2\pi-$periodisch und gerade

   (a)

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx \overset{Aufgabe\ A3}{=} \frac{1}{\pi}\frac{1}{3}\pi^3 = \frac{1}{3}\pi^2 \\
c_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos(kx)\, dx \overset{Aufgabe\ A3}{=} \frac{1}{\pi}\frac{2\pi}{k^2}(-1)^k = \frac{2}{k^2}(-1)^k \\
f(x) &\simeq \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{2}{k^2}(-1)^k e^{ikx}
\end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned}
f(x) &\simeq \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos(kx) \\
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} &= -\frac{\pi^2}{12} \\
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} &= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

   (c) Amplitudenspektrum: $A_k = 2|c_k| = \frac{4}{k^2}$, berechne damit A_k für $k = 1, 2, 3, 4, 5$ und stelle diese Zahlen in einem Koordinatensystem dar.
   Klirrfaktor: $k \simeq 0,276$

2. (a) $T = 2\pi$; keine Symmetrie; $c_0 = 0.25$;

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2k\pi}\left[\sin\frac{k\pi}{2} + i(\cos\frac{k\pi}{2} - 1)\right] \\ f(x) &\simeq \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k}\left[\sin\frac{k\pi}{2} + i(\cos\frac{k\pi}{2} - 1)\right] e^{ikx} \end{aligned}$$

(b) $T = a$; keine Symmetrie; $c_0 = 0.25$;

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2k\pi}\left[\sin\frac{k\pi}{2} + i(\cos\frac{k\pi}{2} - 1)\right] \\ f(x) &\simeq \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k}\left[\sin\frac{k\pi}{2} + i(\cos\frac{k\pi}{2} - 1)\right] e^{ik\frac{2\pi}{a}x} \end{aligned}$$

3. $T = 4\pi$; gerade Funktion; $c_0 = 7.5$

$$\begin{aligned} c_k &= -\frac{15}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2} \\ f(x) &\simeq 7.5 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} -\frac{15}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2} e^{ik\frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

4. Zeichnen Sie die Funktion jeweils im angegebenen Bereich und je nach Aufgabe darüber hinaus. Welche Periode und welche Symmetrie haben die fortgesetzten Funktionen?

(a) $T = 1$; keine Symmetrie; $c_0 = 0.5$; $c_k = -\frac{i}{2k\pi}$

$$y \simeq 0.5 - \frac{i}{2\pi}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k} e^{ik2\pi x}$$

(b) $T = 2$; gerade Funktion; $c_0 = 0.5$; $c_k = \frac{1}{(k\pi)^2}(1 - (-1)^k)$

$$y \simeq 0.5 + \frac{1}{\pi^2}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\ ungerade}}^{\infty} \frac{2}{k^2} e^{ik\pi x}$$

(c) $T = 2$; ungerade Funktion; $c_0 = 0$; $c_k = -\frac{i}{k\pi}$

$$y \simeq -\frac{i}{\pi}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k} e^{ik\pi x}$$

5. * Mit den Lösungen aus dieser Aufgabe können bereits bekannte FR an neue Funktionen angepasst werden. Setze die bekannten Größen in die FR ein und forme sinnvoll um:

(a)

$$g(x) = f(x) + c = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\alpha x} + c = (c + c_0) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} c_k e^{ik\alpha x}$$

(b)

$$h(x) = f(x+d) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\alpha(x+d)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\alpha d} e^{ik\alpha x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widetilde{c}_k e^{ik\alpha x}$$

(c)

$$k(x) = bf(x) = b\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\alpha x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} bc_k e^{ik\alpha x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{c}_k e^{ik\alpha x}$$

(d)

$$r(x) = f(ax) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\alpha ax}$$

6. *Starte mit der Funktion aus 4a) und wende die Formeln aus Aufgabe 5 auf die folgenden 3 Schritte an:
   1) Verschiebe die Funktion um 0.5 nach unten
   2) Strecke danach in y-Richtung um den Faktor 2
   3) Strecke anschließend in y-Richtung mit dem Faktor 0.5.

7. $T = 2\pi$; gerade Funktion; $c_0 = 0.25$;

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{2}{(\pi k)^2}\left[1 - \cos\frac{k\pi}{2}\right] \\ f(x) &\simeq \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k^2}\left[1 - \cos\frac{k\pi}{2}\right] e^{ikx} \end{aligned}$$

8. Verwende für das Integral den TR, das Tafelwerk oder bei Handrechnung zweimal partielle Integration mit jeweils der gleichen Funktionensorte zum Differenzieren bzw. Integrieren und stelle anschließend nach dem gesuchten Integral um. c_0 ordnet sich hier in c_k ein, da nicht durch k allein geteilt wird.

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{1+(k\pi)^2}\left((-1)^k e - 1\right); \quad (c_0 = e - 1) \\ f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k e - 1}{1+(k\pi)^2} e^{ik\pi x} \end{aligned}$$

Lösungen zum Teil C) (Hausaufgabe Fourierreihen)

1. $|x| \simeq \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{(2k+1)^2} e^{i(2k+1)x} \simeq \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{\substack{n=-\infty, \\ n\ ungerade}}^{\infty} -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} e^{inx}$

2. a) nein b) ja c) nein d) ja e) ja f) ja

   (a) $e^{-|x|} \simeq \frac{1}{\pi} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} (1 + (-1)^{k+1} e^{-\pi}) \cdot \frac{1}{(1+k^2)} e^{ikx}$

   (b) $f(x) \simeq -\frac{2iu_0}{\pi} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} e^{i(2k+1)x} \simeq -\frac{2iu_0}{\pi} \sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n\ ungerade}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{inx}$

   $k = \sqrt{\frac{\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots}{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi^2}{8}-1}{\frac{\pi^2}{8}}} \simeq 0.4352$

   $A_k = \frac{4}{k\pi}u_0,\ k\ ungerade:\quad A_1 = 1.27u_0,\quad A_3 = 0.42u_0,\quad A_5 = 0.25u_0,\quad A_7 = 0.18u_0, \ldots$

Übung Differentialgleichungen

A) Vorbereitung für die Übungsvorlesung

1. Wiederholen Sie die Begriffe: gewöhnliche Differentialgleichung, Ordnung/Grad der Differentialgleichung, allgemeine/spezielle/singuläre Lösung, explizite/implizite DGl 1.Ordnung

2. Klassifizieren Sie folgende DGl nach Ordnung, Grad und Homogenität/Inhomogenität.

   a) $(y')^2 + 3xy = x^2 - 1$ b) $y''' - x^7 y = 0$ c) $y'' - y\sin x = x^3 y'$ d) $e^y + xy' = x^2$

3. Lösen Sie mittels der Lösungsformel für homogene lineare DGl 1. Ordnung:

   a) $y' = y,\ y(1) = 7$ b) $x^2 y' = (x-1)y$ c*) $y' = \frac{e^x}{y}$ (Trennung der Veränderlichen)

4. Erstellen Sie eine Übersicht über die Ihnen bekannten Methoden zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen: Anwendungsvoraussetzungen, Struktur der Lösung, Vorgehen
   Wann und wie werden Anfangsbedingungen in die Lösung eingebracht?

5. Halten Sie die Folie zur Ansatzmethode bei der Lösung gewöhnlicher DGl mit konstanten Koeffizienten bereit.

B) Übungsaufgaben

1. *)Lösen Sie mittels Trennung der Veränderlichen:
   a) $yy' + x\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$ b) $y' = \frac{y\ln y}{\sin x}$ c) $yy' = -x\sin x,\ y(\pi) = 11$

2. Lösen Sie folgende lineare DGl 1. Ordnung:

   a) $2xy' - y = \frac{3}{2}x^2$ b) $y' + 2x^2 y = -x^2 e^{-x^3}$
   c) $xy' + 2y - 3x^2 - 2x = 0 \quad y(1) = \frac{1}{12}$ d) $y'x^2y^2 + xy^3 = y^2$
   e) $\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{CR}i(t) = 0 \quad C, R \in \mathbb{R}$ f) $L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = U\sin(\omega t) \quad L, R, U \in \mathbb{R}$

3. Geben Sie die allgemeine Lösung folgender homogener DGl an!

   a) $y'' - 4y' + 3y = 0$ b) $y'' - 4y' + 4y = 0$
   c) $y'' - 4y' + 13y = 0$ d) $y'' - 9y = 0$
   e) $y'' + 4y = 0$ f) $y'' + 25y' = 0$
   g) $y'' = 0$ h) $y^{(4)} - 3y'' - 4y = 0$

4. Geben Sie die Ansätze für partikuläre Lösungen der inhomogenen DGl an, wenn die Störfunktion $f(x)$ wie folgt aussieht und keine Resonanz vorliegt:

   a) $f(x) = e^x$ b) $f(x) = 7$
   c) $f(x) = 2e^{-x}$ d) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$
   e) $f(x) = 3e^{-2x}\sin 3x$ f) $f(x) = 1 + \sin x + \sin 2x$
   g) $f(x) = x^2 - 1$ h) $f(x) = xe^x$
   i) $f(x) = x + e^x$ j) $f(x) = x(\sin x + \cos 2x)$

5. Geben Sie die allgemeine Lösung der homogenen DGl an. Entscheiden Sie, ob der Resonanzfall vorliegt, und stellen Sie den Ansatz zur Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen DGl auf!

   a) $y'' - 3y' + 2y = 2x + 1$ b) $y'' - 3y' + 2y = e^x$
   c) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}\sin x$ d) $y'' + y = \sin x + \cos 2x$
   e) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$ f) $y''' + y' = x$
   g) $y''' + 8y = e^{-2x}$ h) $y'' - 4y = 8x^3 + 4x^2$

6. Berechnen Sie die vollständigen Lösungen für 5a) bis 5h)

C) Hausaufgabe

1. $y' = xy + 2x,\ y(0) = 2$
2. $y' = \frac{3y}{x} + x$
3. $y'' - 2y' = 0$
4. $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$
5. $*) y' + \frac{x}{y} = 0,\ y(1) = 2$
6. $*) yy' = xe^{x+y}$
7. $y''' - 6y'' + 5y' = 5x^2 - 14,4$
8. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$
9. $y' = \frac{y}{1+x^2}$
10. $y' - y\tan x = 2\sin x$
11. $y' = -\frac{1-2x}{x^2}y, \quad y(1) = 2$
12. $xy' + y = \ln x + 1$

Lösungen zu A)

1. s. Skript
2. (a) 1. Ordnung, 2. Grad, nichtlinear, inhomogen
   (b) 3. Ordnung, 1. Grad, linear, homogen
   (c) 2. Ordnung, 1. Grad, linear, homogen
   (d) 1. Ordnung, nichtlinear, inhomogen
3. (a) $y = 7e^{x-1}$
   (b) $y = xe^{\frac{1}{x}}C,\ C \in \mathbb{R}$
   (c) $y = \pm\sqrt{2e^x + 2C}, \quad C \geq 0$ oder für $C < 0 \wedge x \geq \ln(-C)$
4. s. Skript

Lösungen zu B)

1. (a) $*)\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C\ , C \geq 0\ \left(bzw.\ y \pm \sqrt{1 - \left(\sqrt{1-x^2} + C\right)^2}\right)$
   (b) $*)\ y = e^{C\tan\frac{x}{2}},\ C \in \mathbb{R}$
   (c) $*)\ y = \pm\sqrt{2x\cos x - 2\sin x + 127,28}$
2. (a) $y = C\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2,\ C \in \mathbb{R}$
   (b) $y = Ce^{-\frac{2}{3}x^3} + e^{-x^3},\ C \in \mathbb{R}$
   (c) $y = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{3}x$
   (d) $y = \frac{C}{x} + \frac{\ln|x|}{x};\ y \equiv 0,\ C \in \mathbb{R}$
   (e) $i(t) = C\exp(-\frac{t}{CR}),\ C \in \mathbb{R}$
   (f) $i(t) = C\exp(-\frac{R}{L}t) + \frac{U}{R^2+L^2\omega^2}(R\sin(\omega t) - L\omega\cos(\omega t)),\ C \in \mathbb{R}$

3. (a) $y_h = C_1e^x + C_2e^{3x},\ C_i \in \mathbb{R}$
   (b) $y_h = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x},\ C_i \in \mathbb{R}$
   (c) $y_h = C_1e^{2x}\cos(3x) + C_2e^{2x}\sin(3x),\ C_i \in \mathbb{R}$
   (d) $y_h = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x},\ C_i \in \mathbb{R}$
   (e) $y_h = C_1\sin(2x) + C_2\cos(2x),\ C_i \in \mathbb{R}$
   (f) $y_h = C_1 + C_2e^{-25x},\ C_i \in \mathbb{R}$
   (g) $y_h = C_1 + C_2x,\ C_i \in \mathbb{R}$
   (h) $y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3\sin(x) + C_4\cos(x),\ C_i \in \mathbb{R}$

4. (a) $y_p = A_0e^x,\ A_i \in \mathbb{R}$
   (b) $y_p = A_0,\ A_i \in \mathbb{R}$
   (c) $y_p = A_0e^{-x},\ A_i \in \mathbb{R}$
   (d) $y_p = A_0\cos\frac{x}{2} + A_1\sin\frac{x}{2},\ A_i \in \mathbb{R}$
   (e) $y_p = e^{-2x}\left(A_0\cos(3x) + A_1\sin(3x)\right),\ A_i \in \mathbb{R}$
   (f) $y_p = A_0 + A_1\cos x + A_2\sin x + A_3\cos(2x) + A_4\sin(2x),\ A_i \in \mathbb{R}$
   (g) $y_p = A_0 + A_1x + A_2x^2,\ A_i \in \mathbb{R}$
   (h) $y_p = (A_0 + A_1x)\,e^x,\ A_i \in \mathbb{R}$
   (i) $y_p = (A_0 + A_1x) + A_3e^x,\ A_i \in \mathbb{R}$
   (j) $y_p = (A_0 + A_1x)\cos x + (A_2 + A_3x)\sin x + (A_4 + A_5x)\cos 2x + (A_6 + A_7x)\sin x,\ A_i \in \mathbb{R}$

5. (a) $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x},\ C_i \in \mathbb{R}$, keine Resonanz, $y_p = A_0 + A_1x,\ A_i \in \mathbb{R}$
   (b) $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x},\ C_i \in \mathbb{R}$, Resonanz, $y_p = (A_0 + A_1x)\,e^x x,\ A_i \in \mathbb{R}$
   (c) $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x},\ C_i \in \mathbb{R}$, keine Resonanz, $y_p = e^{2x}\left(A_0\cos x + A_1\sin x\right),\ A_i \in \mathbb{R}$
   (d) $y_h = C_1\cos x + C_2\sin x,\ C_i \in \mathbb{R}$, Resonanz, $y_p = (A_1\cos x + A_2\sin x)\,x + A_3\cos(2x) + A_4\sin(2x),\ A_i \in \mathbb{R}$
   (e) $y_h = C_1e^x + C_2xe^x,\ C_i \in \mathbb{R}$, keine Resonanz, $y_p = A_0e^{2x},\ A_i \in \mathbb{R}$
   (f) $y_h = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3,\ C_i \in \mathbb{R}$, Resonanz, $y_p = (A_0 + A_1x)\,x,\ A_i \in \mathbb{R}$
   (g) $y_h = C_1e^x\cos(\sqrt{3}x) + C_2e^x\sin\left(\sqrt{3}x\right) + C_3e^{-2x},\ C_i \in \mathbb{R}$, Resonanz, $y_p = A_0e^{-2x}x,\ A_i \in \mathbb{R}$
   (h) $y_h = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$, keine Resonanz, $y_p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3,\ A_i \in \mathbb{R}$

6. (a) $y_{ges} = C_1e^x + C_2e^{2x} + 2 + x,\ C_i \in \mathbb{R}$
   (b) $y_{ges} = C_1e^x + C_2e^{2x} - xe^x,\ C_i \in \mathbb{R}$
   (c) $y_{ges} = C_1e^x + C_2e^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}(\sin x + \cos x),\ C_i \in \mathbb{R}$
   (d) $y_{ges} = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x}{2}\cos x - \frac{1}{3}\cos(2x),\ C_i \in \mathbb{R}$
   (e) $y_{ges} = C_1e^x + C_2xe^x + e^{2x},\ C_i \in \mathbb{R}$
   (f) $y_{ges} = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3 + \frac{1}{2}x^2,\ C_i \in \mathbb{R}$
   (g) $y_{ges} = C_1e^x\cos(\sqrt{3}x) + C_2e^x\sin\left(\sqrt{3}x\right) + C_3e^{-2x} + \frac{1}{12}xe^{-2x},\ C_i \in \mathbb{R}$
   (h) $y_{ges} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{2} - 3x + x^2 + 2x^3\ C_i \in \mathbb{R}$

Lösungen zu C) HA GDGl

1. Lineare DGl 1. Ordnung, $y = Ke^{x^2/2} - 2, K \in \mathbb{R}, \quad y_{AWA} = 4e^{x^2/2} - 2$
2. Lineare DGl 1. Ordnung, $y = -x^2 + Kx^3$, $K \in \mathbb{R}$
3. konstante Koeffizienten, $y = C_1 + C_2 e^{2x}$, $C_i \in \mathbb{R}$
4. konstante Koeffizienten, $y = e^{-x}\left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{6}x^3\right)$, $C_i \in \mathbb{R}$
5. *)Trennung der Variablen, $y = \pm\sqrt{5 - x^2}$
6. *)Trennung der Variablen, $e^{-y}(1-y) + e^x(1-x) = K$, $K \in \mathbb{R}$
7. konstante Koeffizienten, $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x} + \frac{1}{3}x^3 + 1,2x^2 - \frac{2}{5}x$, $C_i \in \mathbb{R}$
8. Lineare DGl 1. Ordnung, $y = \frac{K}{x^2} - \frac{e^{-x^2}}{2x^2}$, $K \in \mathbb{R}$
9. homogene Lineare DGl 1. Ordnung, $y = Ke^{\arctan x}$, $K \in \mathbb{R}$
10. Lineare DGl 1. Ordnung, $y = \frac{K}{\cos x} - \cos x$, $K \in \mathbb{R}$
11. homogene Lineare DGl 1. Ordnung, $y = 2x^2 e^{\frac{1}{x} - 1}$
12. Lineare DGl 1. Ordnung, $y = \frac{K}{x} + \ln x$, $K \in \mathbb{R}$

Übung Differentialrechnung von Funktionen mit mehreren Veränderlichen

A) Vorbereitung der Übungsvorlesung

1. *Bestimmen Sie D_f, W_f und zeichnen Sie eine Skizze folgender Funktionen $z = f(x, y)$:
   a) $z = c = const$ b) $x + y + z = 1$

2. Geben Sie alle Unstetigkeitspunkte folgender Funktionen an:
   a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ b) $f(x, y) = \frac{y}{x-y}$

3. Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung von:
   a) $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ b) $f(x, y) = x^3 + x^2y + y^3$ c) $f(x, y) = xe^{-xy}$

4. Bilden Sie das totale Differential von:
   a) $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ b) $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

5. Bestimmen Sie alle relativen Extrema der Funktion $z = z(x, y)$:
   $z = 4x^2 + y^2 - xy + 10x + 10y - 4$

B) Seminaraufgaben

1. *Bestimmen Sie D_f, W_f und zeichnen Sie eine Skizze folgender Funktionen $z = f(x, y)$:
   a) $z = \sqrt{1 - x^2}$ b) $z = \sin x$ c) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ d) $z = \frac{1}{x^2+y^2}$

2. Geben Sie alle Unstetigkeitspunkte folgender Funktionen an:
   a) $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ b) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ c) $f(x, y) = \frac{1}{\sin 2x}$

3. Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von:
   a) $f(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$ b) $f(x, y) = \frac{y}{x-y}$ c) $f(x, y) = \sqrt{xy}$
   d) $f(x, y, z) = xyz + \frac{y-z}{x}$ e) $f(u, v, w) = \frac{ux}{u^2+v^2+w^2}$ f) $f(s, t) = e^{\sin(st)}$

4. Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung von:
   a) $f(x, y) = x^2 + e^xy + e^yx^2 - 3x\ln y$ b) $f(x, y) = y^x$
   c) $f(x, y) = \frac{4}{x^2+y^2}$ d) $f(x, y) = \frac{y}{x-y}$

5. Bilden Sie das totale Differential von:
   a) $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ b) $w(x, y, z) = x^5 + 6x^3y - 2x^2yz + 3yz^2$
   c) $u(x, y, z) = e^x \ln y + z^2 \cos y$ d) $u(x, y, z) = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$

6. *Bestimmen Sie die Tangentialebene von a) $z = x^2e^{-xy}$ im Punkt $(1; -1)^T$
   b) $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ im Punkt $(3; 2)^T$.

7. Von einem Zylinder wurden folgende Messwerte aufgenommen: $m = (89 \pm 0,3)g$, $h = (8,9 \pm 0,01)cm$, $r = (4,5 \pm 0,01)cm$. Bestimmen Sie eine näherungsweise Abschätzung für den absoluten und relativen Fehler der Dichte des Zylinders.

8. Bestimmen Sie eine näherungsweise Abschätzung für den absoluten und relativen Fehler des Trägheitsmomentes einer Kugel über das totale Differential, wenn folgende Messwerte und Formeln bekannt sind:
   $m = (7,25 \pm 0,01)kg$, $r = (0,06 \pm 0,001)m$, $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mr^2$.

9. Die Knicklast für eine runde Eisensäule wird nach der Formel
$$F_{KN} = \frac{\pi^2}{64} E \frac{d^4}{l^2}$$
berechnet. Gemessen wurde: $l = (3 \pm 0,01)m$, $d = (10 \pm 0,1)cm$. Da die Säule schon sehr alt ist, kann der Elastizitätsmodul nur näherungsweise angegeben werden: $E = (210000 \pm 1000)\frac{N}{mm^2}$. Bestimmen Sie eine näherungsweise Abschätzung für den absoluten und relativen Fehler der Knicklast.

10. *Bestimmen Sie den relativen Fehler des Trägheitsmomentes eines Würfels
$$I = \frac{ma^2}{6},$$
wenn Ihnen die relativen Fehler der Messgrößen bekannt sind: $\left|\frac{\triangle a}{a}\right| \leq 1\%$, $\left|\frac{\triangle m}{m}\right| \leq 0,1\%$

11. Bestimmen Sie alle relativen Extrema folgender Funktionen $z = z(x, y)$:
a) $z = 2x^2 + 2y^2 + 3xy - 5x - 2y + 5$ b) $z = 2xy - 4x - 2y$
c) $z = e^x - xe^y$ d) $z = e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}$
e) $z = e^{x^2-y^2}$ f) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$
g)$z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$

C) Hausaufgaben

1. *Ermitteln Sie D_f, W_f und zeichnen Sie eine Skizze von
a) $z = \sqrt{xy}$ b) $z = \frac{4}{x+y}$

2. Geben Sie die Stetigkeitspunkte an von: a) $z = \frac{y}{\sqrt{x}}$ b) $z = \frac{7x}{2x-y}$

3. Zeigen Sie, dass für $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die Gleichung
$(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z})^2 = 1$ gilt.

4. Bilden Sie alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von
a) $f(x, y, z) = \ln(\frac{x}{y})z^x$ b) $f(x, y, z) = z^y + e^{z^2 x}$.

5. Bestimmen Sie alle relativen Extrema der Funktionen:
a) $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$ b) $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} - 8x + y + 8$ c) $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$

6. Aus der Spannung $U = (220 \pm 2)V$ und der Stromstärke $I = (20 \pm 0,5)A$ soll der Widerstand $R = \frac{U}{I}$ berechnet werden.
Bestimmen Sie Abschätzungen für den Betrag des absoluten und relativen Fehlers von E.

7. *Um wieviel Prozent kann das errechnete Volumen eines Kegels fehlerhaft sein, wenn der Radius mit 0.5% und die Höhe mit 1% fehlerhaft gemessen wurden?

8. *Bestimmen Sie die Tangentialebene an $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ im Punkt $(1, 2)^T$.

Lösungen zu A)

1. a) Parallelebene zur x-y-Ebene, $D_f = \mathbb{R}^2, \quad W_f = \{c\}$
   b) Ebene durch die Punkte $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$, $(0,0,1)^T$

2. a) überall stetig
   b) unstetig für $x = y$

3. (a) $f_x = x; \quad f_y = y; \quad f_{xx} = f_{yy} = 1; \quad f_{xy} = f_{yx} = 0$
   (b) $f_x = 3x^2 + 2xy; \quad f_y = x^2 + 3y^2; \quad f_{xx} = 6x + 2y; \quad f_{yy} = 6y; \quad f_{xy} = f_{yx} = 2x$
   (c) $f_x = (1 - xy)e^{-yx}, \quad f_y = -x^2 e^{-xy} \quad f_{xx} = (-2y + xy^2)e^{-xy}; \quad f_{yy} = x^3 e^{-xy}; \quad f_{xy} = f_{yx} = (-2x + yx^2)e^{-xy}$

4. (a) $df = xdx + ydy$
   (b) $df = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$

5. Minimum in $(-2, -6, -44)^T$

Lösungen zu B)

1. (a) $D_f = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 | y \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 1\}, \quad W_f = [0,1]$, "Tunnel" mit halbkreisförmigem Querschnitt
   (b) $D_f = \mathbb{R}^2, \quad W_f = [-1,1]$, "Wellpappe"
   (c) $D_f = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad W_f = [0,1]$, obere Hälfte der Einheitskugel
   (d) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}, \quad W_f = (0, \infty)$, Hyperboloid ("Kühlturm")

2. (a) unstetig für $xy = 0$, d.h. $x = 0 \vee y = 0$
   (b) unstetig auf dem Rand des Einheitskreises
   (c) unstetig für x=$\frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$

3. (a) $f_u = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad f_v = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$
   (b) $f_x = \frac{-y}{(x-y)^2}, \quad f_y = \frac{x}{(x-y)^2}$
   (c) $f_x = \frac{y}{2\sqrt{xy}}, \quad f_y = \frac{x}{2\sqrt{xy}}$
   (d) $f_x = yz - \frac{y-z}{x^2}, \quad f_y = xz + \frac{1}{x}, \quad f_z = xy - \frac{1}{x}$
   (e) $f_u = \frac{-u^2x+xv^2+xw^2}{(u^2+v^2+w^2)^2}, \quad f_v = \frac{-2uvx}{(u^2+v^2+w^2)^2}, \quad f_w = \frac{-2uwx}{(u^2+v^2+w^2)^2}$
   (f) $f_s = e^{\sin(st)} \cos(st) \cdot t, \quad f_t = e^{\sin(st)} \cos(st) \cdot s$

4. (a) $f_x = 2x + ye^x + 2xe^y - 3\ln y, \quad f_y = e^x + x^2 e^y - \frac{3x}{y}, \quad f_{xy} = f_{yx} = e^x + 2xe^y - \frac{3}{y},$
   (b) $f_x = y^x \ln y, \quad f_y = xy^{x-1}, \quad f_{xy} = f_{yx} = y^{x-1} + xy^{x-1}\ln y, \quad f_{xx} = y^x(\ln y)^2,$
   $f_{yy} = x(x-1)y^{x-2}$
   (c) $f_x = \frac{-8x}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y = \frac{-8y}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{xy} = f_{yx} = \frac{32xy}{(x^2+y^2)^3}, \quad f_{xx} = -\frac{8(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3}, \quad f_{yy} = -\frac{8(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$

(d) $f_x = \frac{-y}{(x-y)^2}$, $\quad f_y = \frac{x}{(x-y)^2}$, $\quad f_{xy} = f_{yx} = \frac{-y-x}{(x-y)^3}$, $\quad f_{xx} = \frac{2y}{(x-y)^3}$, $\quad f_{yy} = \frac{2x}{(x-y)^3}$

5. (a) $df = -\frac{2y}{(x-y)^2}dx + \frac{2x}{(x-y)^2}dy$
   (b) $dw = (5x^4 + 18x^2y - 4xyz)dx + (6x^3 - 2x^2z + 3z^2)dy + (-2x^2y + 6yz)dz$
   (c) $du = e^x \ln y dx + (\frac{e^x}{y} - z^2 \sin y)dy + 2z \cos y dz$
   (d) $du = -\frac{yz+x^2}{x^2z}dx + \frac{y^2-xz}{xy^2}dy + \frac{z^2+xy}{yz^2}dz$

6. a) $3ex - ey - z = 3e$, $\qquad$ b) $z + 4x - 6y = 5$

7. $|\triangle\rho| \lesssim 0.001405\frac{g}{cm^3}$, $\qquad \frac{|\triangle\rho|}{|\rho|} \lesssim 0.894\%$

8. $|\triangle J_x| \lesssim 0.000362kgm^2$, $\qquad \frac{|\triangle J_x|}{|J_x|} \lesssim 3.5\%$

9. $|\triangle F_{KN}| \lesssim 18505,3N$; $\qquad \frac{|\triangle F_{KN}|}{|F_{KN}|} \lesssim 5.1\%$

10. $\frac{|\triangle I|}{|I|} \lesssim 2.1\%$

11. (a) Minimum in $(2,-1,1)^T$
    (b) Sattelpunkt
    (c) Sattelpunkt
    (d) Maximum in $(0,0,1)^T$
    (e) Sattelpunkt
    (f) Minimum in $(1,0.5,0)^T$
    (g) Maximum in $(4,4,12)^T$

Lösungen zu C)

1. (a) $D_f = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 | (x \leq 0 \wedge y \leq 0) \vee (x \geq 0 \wedge y \geq 0)\right\}$; $\qquad W_f = [0;\infty)$
   (b) $D_f = \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 | x \neq -y\right\}$; $\qquad W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2. (a) stetig für $\left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 |\ x > 0, y \in \mathbb{R},\ \text{beliebig}\right\}$
   (b) stetig für $\left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 |\ y \neq 2x\right\}$

3. $u_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\qquad \mathrm{u}_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\qquad \mathrm{u}_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
   $\Longrightarrow (u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1$

4. (a) $f_x = z^x(\frac{1}{x} + \ln\frac{x}{y} \cdot \ln z)$
   (b) $f_z = yz^{y-1} + e^{z^2x} \cdot 2zx$

5. (a) Maximum in $(0;3;9)^T$
   (b) Minimum in $(2;4;0)^T$

(c) Minimum in $(-2; 0; -0,735)^T$

6. $|\triangle\ R| \precapprox 0.375$ Ohm; $\qquad \left|\frac{\triangle R}{R}\right| \precapprox 0.034 = 3,4\%$

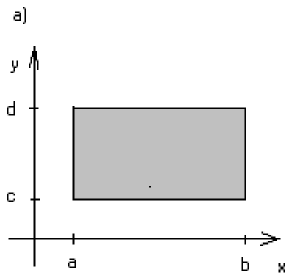
7. $\left|\frac{\triangle V}{V}\right| \precapprox 0.02$

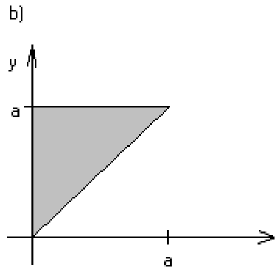
8. $x + 2y - z = 2.5$

Übung Doppelntegrale

A) Vorbereitung der Übungsvorlesung

1. Stellen Sie folgende Bereiche als Normalbereiche bezüglich x und y dar:





2. Skizzieren Sie den Bereich B und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge: $I = \int_0^2 \int_x^{2x} f(x,y)dydx$

3. Berechnen Sie $\int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1} e^{x+y} dxdy$

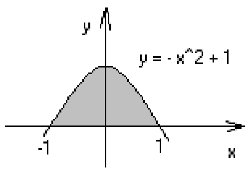
4. Erarbeiten Sie sich eine Zusammenstellung über die Anwendungen der Doppelintegrale.

5. Berechnen Sie den Flächeninhalt von B:
   a) $B = \left\{(x,y)^T \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, x+y \leq 1, y \geq 0\right\}$;
   b) $B = \left\{(x,y)^T \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2-x^2\right\}$;

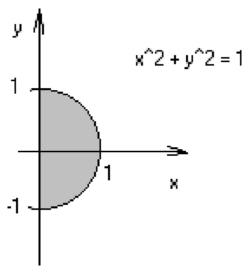
B) Seminaraufgaben

1. Stellen Sie folgende Bereiche als Normalbereiche bezüglich x und y dar:

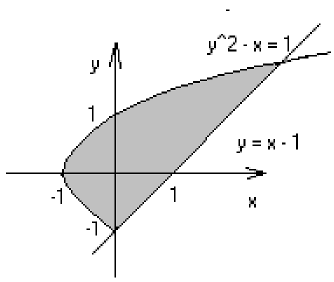
a)



b)



c)



2. Skizzieren Sie den Bereich B und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge:

   a) $\int_{x=0}^{1} \int_{y=x^3}^{x^2} f(x,y)dydx$ b) $\int_{y=0}^{4} \int_{x=y}^{10-y} f(x,y)dxdy$ c) $\int_{y=0}^{1} \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dxdy$

3. Berechnen Sie folgende Doppelintegrale:

   a) $\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{3} (1-r^2)r\, drd\phi$ b) $\int_{x=0}^{\pi} \int_{y=0}^{x} \cos(x+y)dydx$ c). $\int_{x=0.5}^{1} \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) dydx$

4. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der B als Grundfläche und $f(x,y)$ als Deckfläche benutzt. (Seitenflächen parallel zu den Koordinatenebenen.)
   a) $B = \left\{(x,y)^T \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, x+y \leq 1, y \geq 0\right\}$; $f(x,y) = xy$
   b) $B = \left\{(x,y)^T \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2-x^2\right\}$; $f(x,y) = x+y$

5. Berechnen Sie die Masse des Flächenstücks B, wenn B mit der Flächendichte ρ belegt ist:
   a) $B = \left\{(x,y)^T \in R^2 : 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \sin x\right\}; \quad \rho = 1 + x + 4y$.
   b) B ist begrenzt durch $x = 0;\ x = 1;\ y = x + 2;\ x + y = 1; \quad \rho = e^{x+y}$
   c) $*B = \left\{(x,y)^T \in R^2 : 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\right\}; \quad \rho = e^{-y^2}$

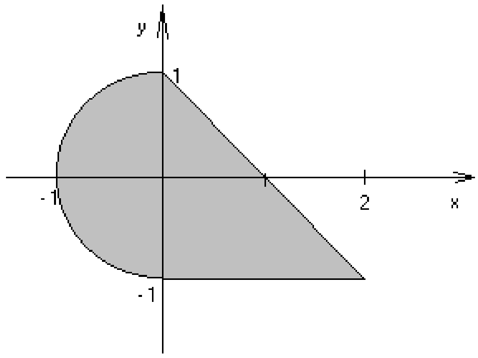
6. Berechnen Sie die Koordinaten des geometrischen Schwerpunktes von B:
   $B = \triangle P_1P_2P_3$ mit $P_1 = \binom{0}{0}, P_2 = \binom{2}{2}, P_3 = \binom{2}{4}$

C) Hausaufgaben

1. Skizzieren Sie den Bereich B,und berechnen Sie das Doppelintegral $\iint\limits_B f(x,y)dB$
   a) $B = \left\{(x,y)^T \in R^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 3 - 2x\right\}; \quad f(x,y) = xy^2$
   b) $B = \left\{(x,y)^T \in R^2 : \text{Begrenzungen sind } x = \frac{y^2}{4} \text{ und } y = 2x - 12\right\}; \quad f(x,y) = x + y^2$

2. Skizzieren Sie den Grundriss des Körpers und berechnen Sie sein Volumen, wenn er begrenzt wird von
   $z = 0,\ z = 1 + xy$ und $x^2 + y^2 = 1$

3. Berechnen Sie die Koordinaten des geometrischen Schwerpunktes von B:



4. Berechnen Sie die Masse des Bereiches B, seine Fläche und seinen Schwerpunkt.
   Massendichte: $\rho = xy^2$; Grenzen von $B : x = y^2; x = 3 - 2y^2$.

Lösungen zu A)

1. a) $NB_X = NB_Y = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b; c \le y \le d\}$
   b) $NB_X = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le a; x \le y \le a\}; \quad NB_Y = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le a; 0 \le x \le y\}$

2. $I = \int\limits_0^2 \int\limits_{y/2}^{y} f(x,y)dxdy + \int\limits_2^4 \int\limits_{y/2}^{2} f(x,y)dxdy$

3. $(e-1)^2$

4. siehe Skript

5. a) $B = 0,5(FE)$
   b) $B = \frac{7}{6}(FE)$

Lösungen zu B)

1. a) $NB_X = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1; 0 \le y \le -x^2+1\};$

   $NB_Y = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1; -\sqrt{1-y} \le x \le \sqrt{1-y}\}$

   b) $NB_X = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1; -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\};$

   $NB_Y = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le y \le 1; 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}\}$

   c) $NB_X = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 0; -\sqrt{x+1} \le y \le \sqrt{x+1}\} \cup$
   $\cup \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 3; x-1 \le y \le \sqrt{x+1}\};$

   $NB_Y = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le y \le 2; y^2-1 \le x \le y+1\}$

2. a) $I = \int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dxdy$

   b) $I = \int\limits_0^4 \int\limits_0^x f(x,y)dydx + \int\limits_4^6 \int\limits_0^4 f(x,y)dydx + \int\limits_6^{10} \int\limits_0^{10-x} f(x,y)dydx$

   c) $I = \int\limits_{-1}^0 \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx + \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} f(x,y)dydx$

3. a) $-\frac{63}{2}\pi$ b) -2 c).$\frac{3}{8}$

4. a) $\frac{1}{24} \approx 0.0417$ b) $\frac{101}{60} \approx 1.683$

5. a) $\frac{1}{2}\left(e^4 - e^2 - 2e\right) \approx 20.89$ b) $2\pi + 2 \approx 8.28$ c) $\frac{e-1}{2e} \approx 0.316;$

6. $A = 2;\quad x_s = \frac{4}{3}\,;\quad y_s = 2$

Lösungen zu C)

1. a) $\frac{29}{30}$ b) $\frac{1250}{3}$

2. $\pi(VE)$

3. $A = 2 + \frac{\pi}{2} \approx 3.57;\quad x_s \approx 0.1867\,;\quad y_s = -0.1867$

4. $m = \frac{36}{35} \approx 1.0286;\quad x_s = \frac{41}{27} \approx 1.52;\quad y_s = 0$