Definition 1 *Uneigentliche Integrale mit unendlichen Grenzen:*
Sei $f(x)$ auf beliebigen Intervallen $[a,b]$ integrierbar.

a) $\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$

b) $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$

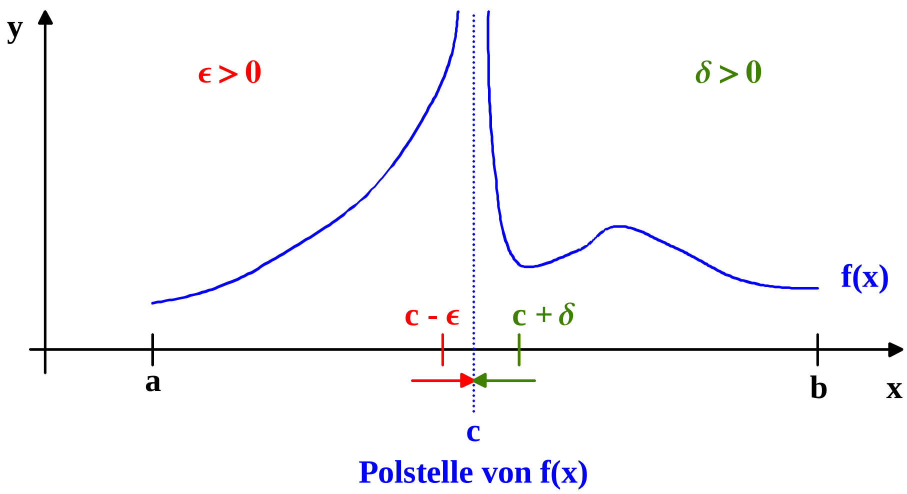
c) $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^c f(x)dx + \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_c^b f(x)dx; \qquad c \in \mathbb{R}$

Definition 2 *Uneigentliche Integrale mit nichtbeschränkten Funktionen:*
Sei $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty, \quad a \le c \le b$. (Eventuell werden nur einseitige Grenzwerte benötigt!)

a) $\int\limits_a^c f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$

b) $\int\limits_c^b f(x)dx = \lim\limits_{\delta\to 0+0} \int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx$

c) $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim\limits_{\delta\to 0+0} \int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx$



Bei einer jährlichen Verzinsung mit 6.2% werden 10 Jahre lang vorschüssig jeweils 2500 Euro auf ein Konto eingezahlt. Wie hoch ist der Kontostand nach 10 Jahren?

Anfang 1. Jahr: 2500

Anfang 2. Jahr: $2500 \cdot 1.062 \quad + 2500$

Anfang 3. Jahr: $2500 \cdot 1.062^2 \quad + 2500 \cdot 1.062 \ + \ 2500$

....

Anfang 10.Jahr: $2500 \cdot 1.062^9 \ + 2500 \cdot 1.062^8 + \ldots + 2500$

Ende 10. Jahr: $2500 \cdot 1.062^{10} + 2500 \cdot 1.062^9 + \ldots + 2500 \cdot 1.062$

$$= 2500 \cdot q \cdot (q^9 + \ldots + q^2 + q + 1) = 35\,325.44€$$

mit $q = 1.062$: Aufzinsungsfaktor

Gauß als Schüler: $S = 1 + 2 + 3 + \ldots. + 59 + 60$

$= (1 + 60) + (2 + 59) + \ldots. \ +(30 + 31)$

$= 30 \cdot 61 = 1830$

$$R_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2 : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} : \text{geometrische Reihe: } \begin{matrix} a = 1 \\ q = 0.5 \end{matrix}$$

$$R_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = ? : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} : \text{harmonische Reihe}$$

Achilles und die Schildkröte:

Schildkröte: $s_1 = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \ldots$

Achilles: $s_2 = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots$

Integralkriterium

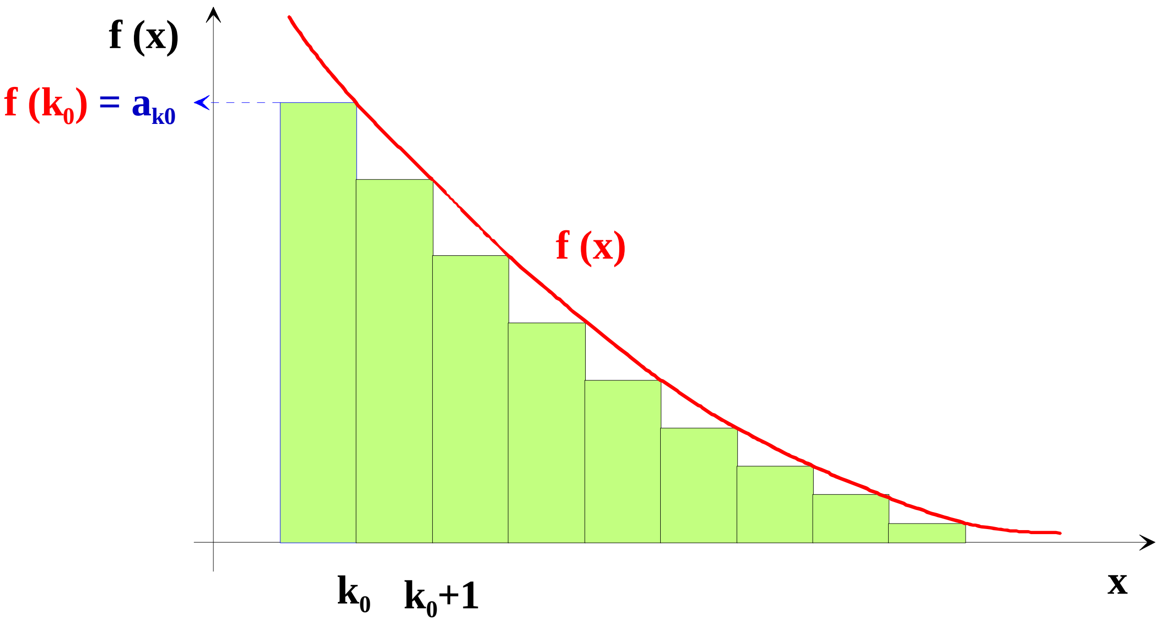
Wir betrachten $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0$.

Gilt für $k \geq k_0$: $a_k = f(k)$ | $f = f(x)$, f stetig, monoton fallend, so folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent} \Leftrightarrow \int_{k_0}^{\infty} f(x)dx \text{ existiert.}$$

Interpretation:

Die Reihe wird als uneigentliches Integral über eine Treppenfunktion gedeutet. Das Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale liefert dann die Aussage des obigen Satzes:



Die grüne Fläche repräsentiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Sie kann offensichtlich durch die Fläche $\int_{k_0}^{\infty} f(x)dx$ unter der Kurve f(x) nach oben abgeschätzt werden. Existiert das Integral muss folglich auch die Summe der Reihe einen endlichen Wert liefern.

Eigenschaften konvergenter Reihen

Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = B$. Weiter seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha A + \beta B$

2. Absolut konvergente Reihen können multipliziert werden:

   $$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) = AB$$

3. In konvergenten Reihen können benachbarte Glieder zusammengefasst werden, aber nicht in divergenten.

4. Nur in absolut konvergenten Reihen kann man beliebig gruppieren.

5. Konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihen heißen bedingt konvergent.

6. Konvergenz oder Divergenz einer Reihe bleiben erhalten, wenn endlich viele Glieder verändert, gestrichen oder hinzugenommen werden.

Ziel: Entwicklung einer periodischen Funktion f(t) in eine trigonometrische Reihe der Form

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \phi_k) \qquad 1.\,Art$$

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \qquad 2.\,Art$$

d.h. Ermittlung des Frequenzspektrums dieser Funktion f(t)

Definition: Funktionenreihen der 1. bzw. 2. Art heißen

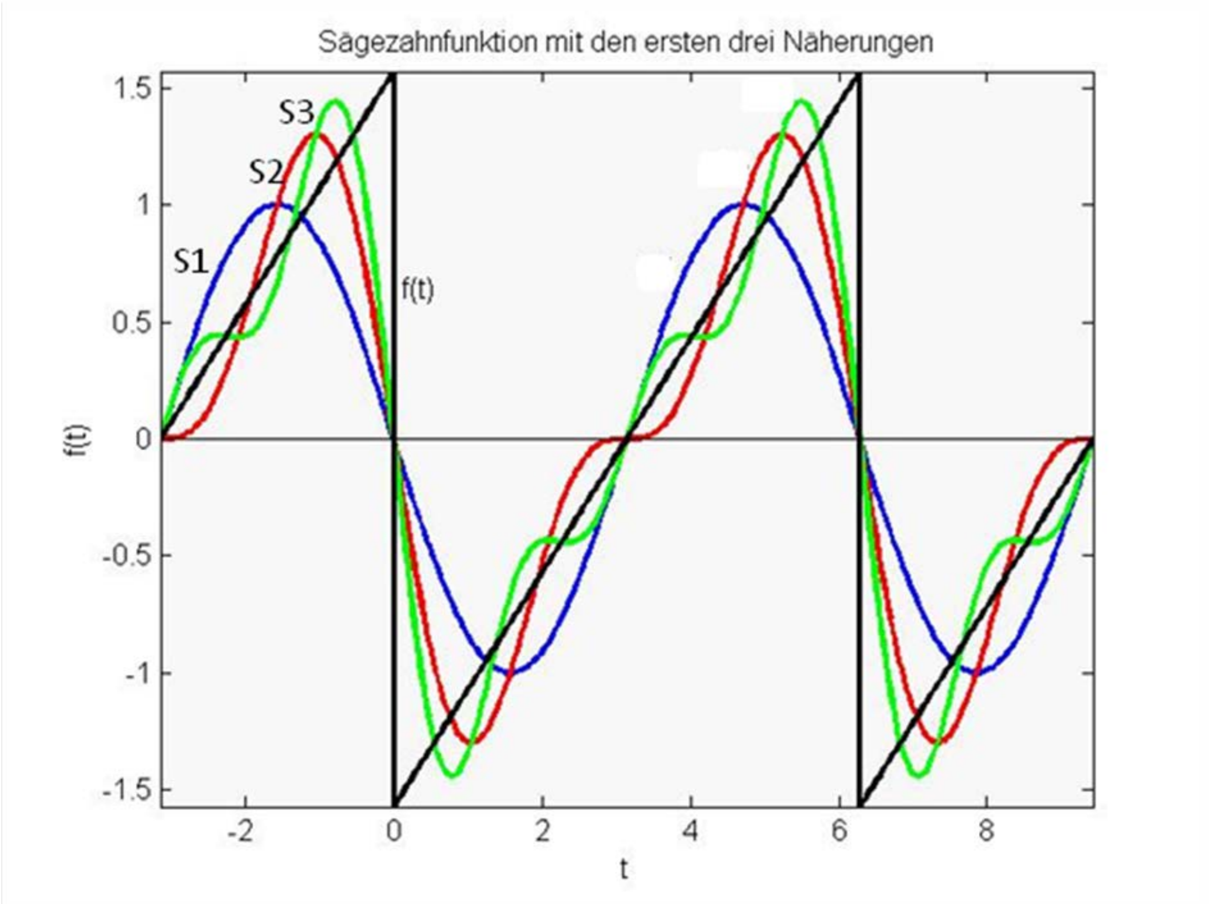
Fourierreihen.

Anwendungen:

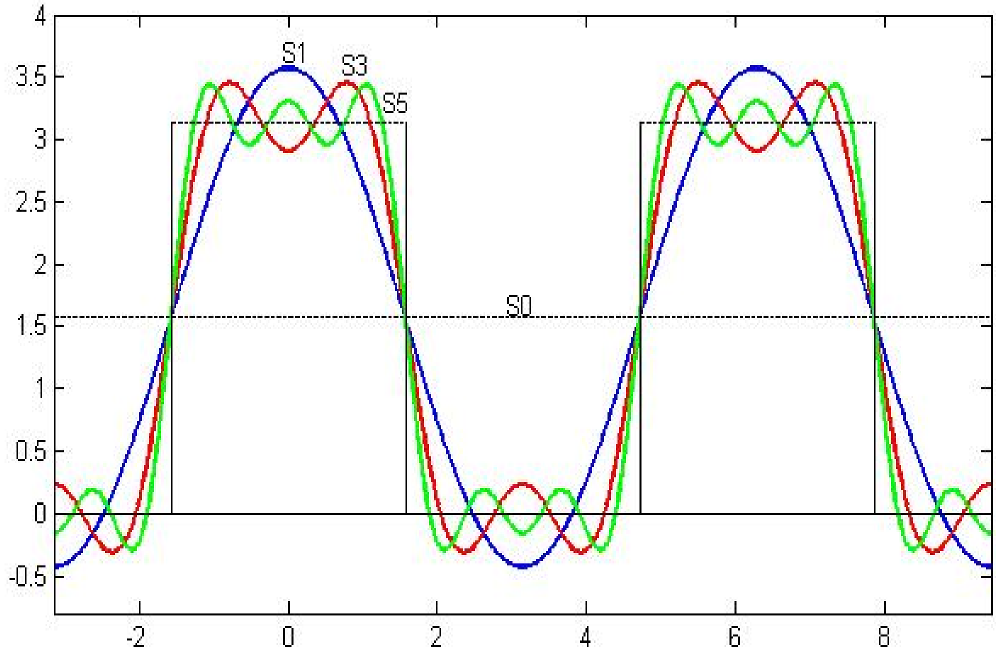
- Untersuchung von Schwingungsverläufen (insbesondere von Spannungen und Strömen) bei nichtsinusförmiger Erregung, da viele Vorgänge erst mit nichtsinusförmigen Schwingungen realisierbar sind,
  z.B. sägezahnförmige Spannungen bei der Ablenkung in Bildröhren, Rechteckimpulse als Takt- und Synchronsignale, ...

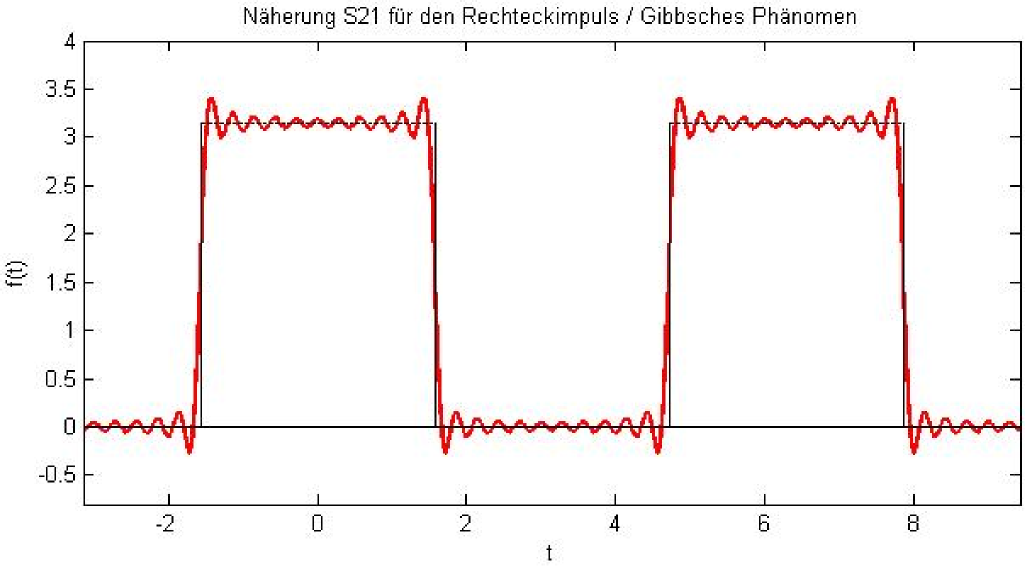
- Dimensionierung von Filtern, z.B. von Bandpass-, Hochpass-, Tiefpassfiltern, Mehrwegboxen, ...

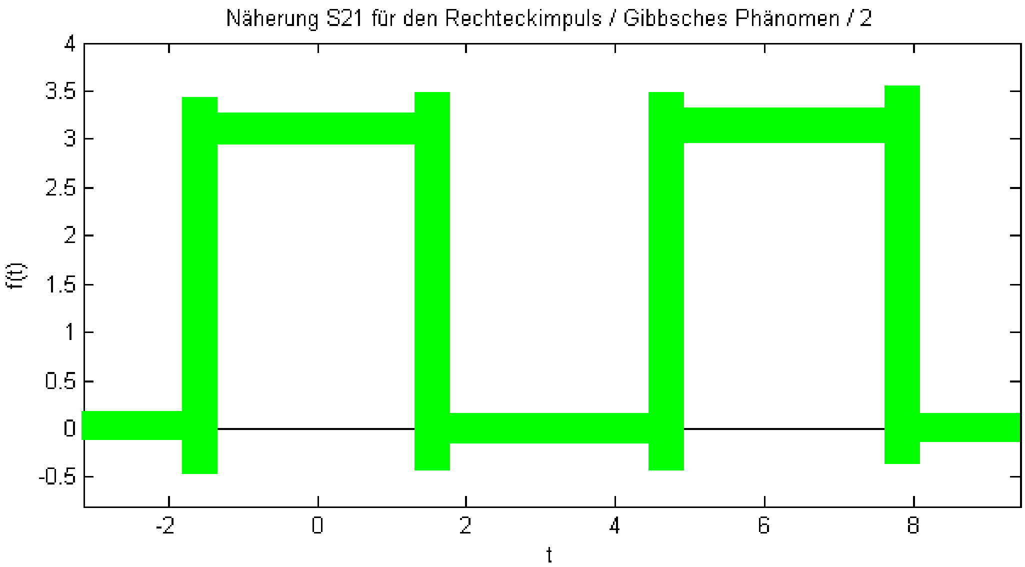
- Hilfsmittel in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, z.B. zur Lösung von Wärmeleitproblemen oder der Lösung der Gleichung der schwingenden Saite,...



Rechteckimpuls mit den ersten drei Näherungen



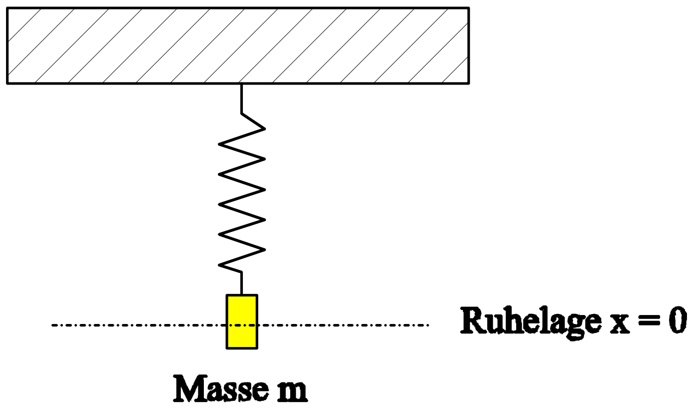

Näherung S21 für den Rechteckimpuls / Gibbsches Phänomen
f(t)
t
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-2
0
2
4
6
8


Näherung S21 für den Rechteckimpuls / Gibbsches Phänomen / 2
f(t)
t
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-2
0
2
4
6
8

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Einleitung und Grundbegriffe

Beispiel 1: Betrachten Federschwinger mit der Federkonstanten k>0:



Gesucht: Gleichung zur Berechnung der Auslenkung x=x(t) der Masse m aus der Ruhelage:

Zum Zeitpunkt t=0 gilt: Anfangsauslenkung: $x(0) = x_0$
Anfangsgeschwindigkeit: $x(0) = v_0$

Beschleunigung der Masse: $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$

Rücktreibende Federkraft : $-kx = F = ma = m\ddot{x}$ (NEWTON)

$$\Rightarrow \text{ A) } m\ddot{x} + kx = 0$$

Wenn die Schwingung nicht im Vakuum stattfindet, kommt die Reibungskraft hinzu: $F = r \cdot \dot{x}$. Sie wirkt der Schwingung entgegen: $-kx - r \cdot \dot{x} = m\ddot{x}$

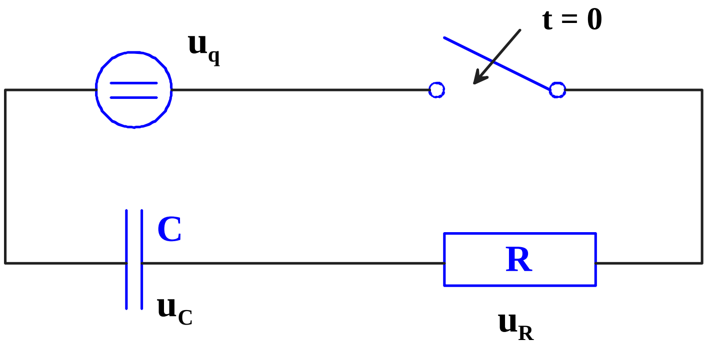
$$\Rightarrow \text{ B) } m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

Die Schwingung kann von außen durch eine aufgeprägte Kraft F(t) beeinflusst werden:

$$\Rightarrow \text{ C) } m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t)$$

Weitere Beispiele für gewöhnliche Differentialgleichungen in Naturwissenschaft und Technik:

2) Beschreibung von elektrischen Stromkreisen:



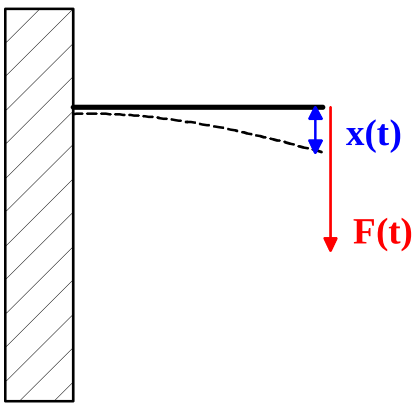
$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=u_q$$

3) Beschreibung von organischem Wachstum und Zerfall:

$$-\frac{dx}{dt}=kx$$

mit x: Masse des zerfallenden (radioaktiven) Stoffes und
k: Zerfallskonstante, k>0

4) Beschreibung eines einseitig eingespannten Stabes:



$$x^{(4)}+\sqrt{\frac{F}{\alpha}}\ddot{x}=0,$$

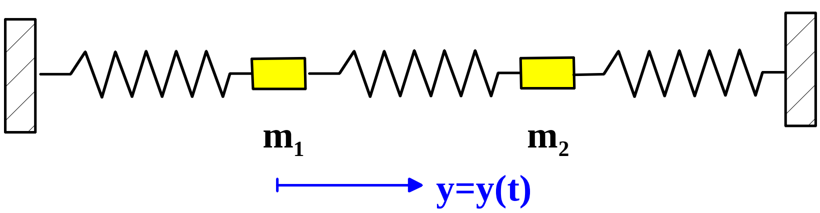
wobei α ein Materialparameter ist.

5) Beschreibung eines mathematischen Pendels:

$$mg\sin\varphi(t)=ml\ddot{\varphi}(t)$$

mit φ: Ausschlagswinkel, g: Erdbeschleunigung, m: Masse

6) Beschreibung von gekoppelten Federschwingern:

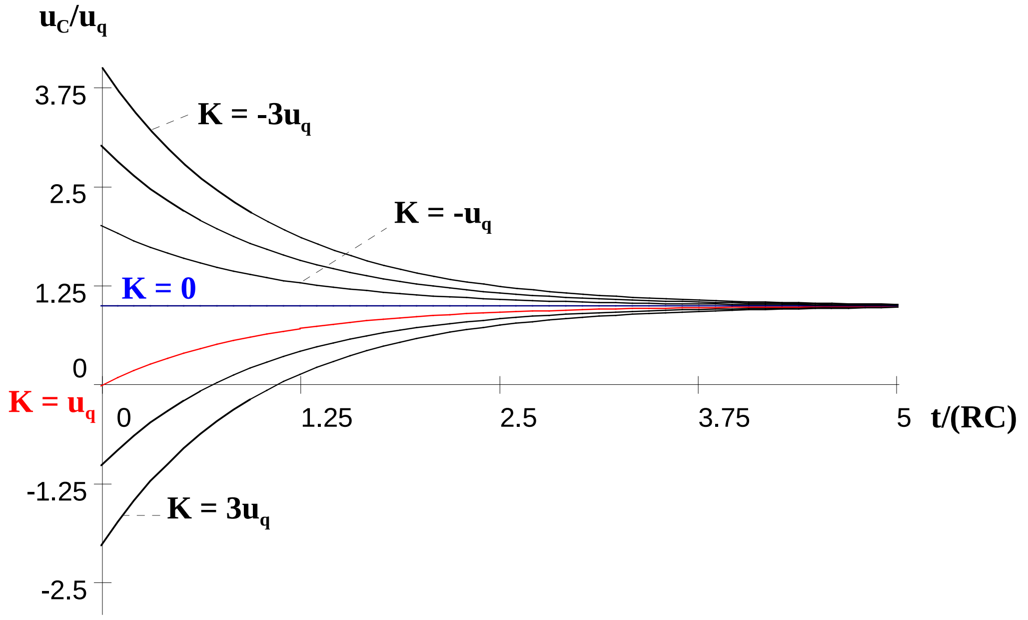


$$ay^{(4)}+b\ddot{y}=cy,$$
$$a,b,c\in\mathbb{R}$$

Beispiel 1: allgemeine Lösung: $u_C = u_q - K e^{-\frac{t}{RC}}; \quad K \in \mathbb{R}$

Partikuläre Lösung mit der Anfangsbedingung $u_C(0) = 0$:

$$u_C = u_q (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

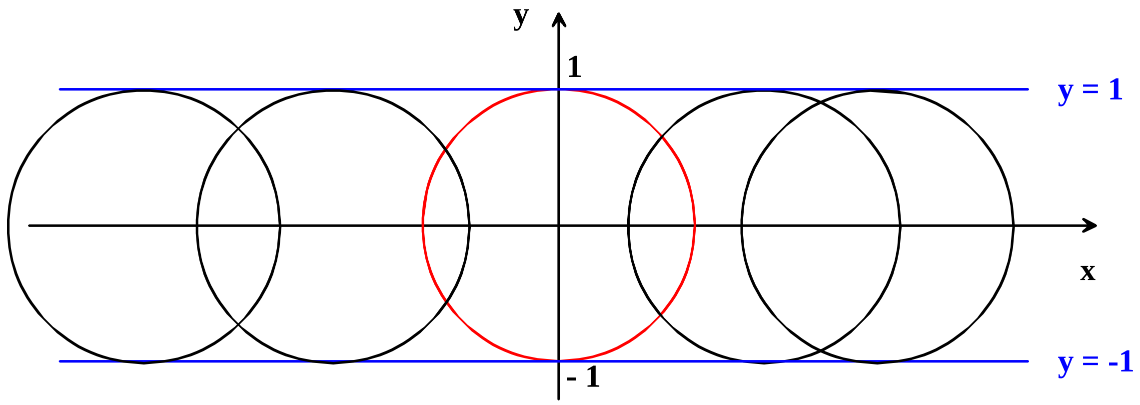


Beispiel 2: $y^2((y')^2 + 1) - 1 = 0$

Allgemeine Lösung: $(x - C)^2 + y^2 = 1$

Partikuläre Lösung mit C = 0: $x^2 + y^2 = 1$

Singuläre Lösungen: y = 1; y = -1



Ansatzmethode zur Bestimmung der partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung:

Störfunktion f(x)	Ansatzfunktion $y_p(x)$
$e^{\alpha x}(b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m)$	$x^r e^{\alpha x}(B_0 + B_1 x + \ldots + B_m x^m)$
$e^{\alpha x}(k_1 \cos \beta x + k_2 \sin \beta x)$	$x^r e^{\alpha x}(K_1 \cos \beta x + K_2 \sin \beta x)$
$e^{\alpha x}[(k_{10} + k_{11} x + \ldots + k_{1m} x^m)\cos \beta x + {} + (k_{20} + k_{21} x + \ldots + k_{2m} x^m)\sin \beta x]$	$x^r e^{\alpha x}[(K_{10} + K_{11} x + \ldots + K_{1m} x^m)\cos \beta x + {} + (K_{20} + K_{21} x + \ldots + K_{2m} x^m)\sin \beta x]$

Dabei bedeuten:

die Konstanten α, β, b_i, k_i, und k_{ij} : fest vorgegebene Zahlenwerte aus der Aufgabenstellung,

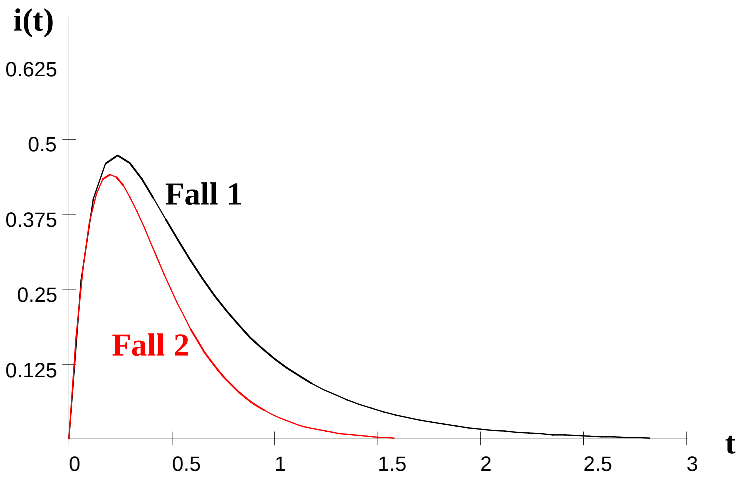
die Konstanten B_i, K_i, und K_{ij} : unbestimmte Koeffizienten, die im Laufe der weiteren Rechnung ausgerechnet werden müssen.

$r = 0$, wenn die Zahl $\nu = \alpha \pm i\beta$ keine Lösung der zugehörigen charakteristischen Gleichung der entsprechenden homogenen Gleichung ist, anderenfalls gilt:

r = der Vielfachheit dieser Lösung (Resonanz).

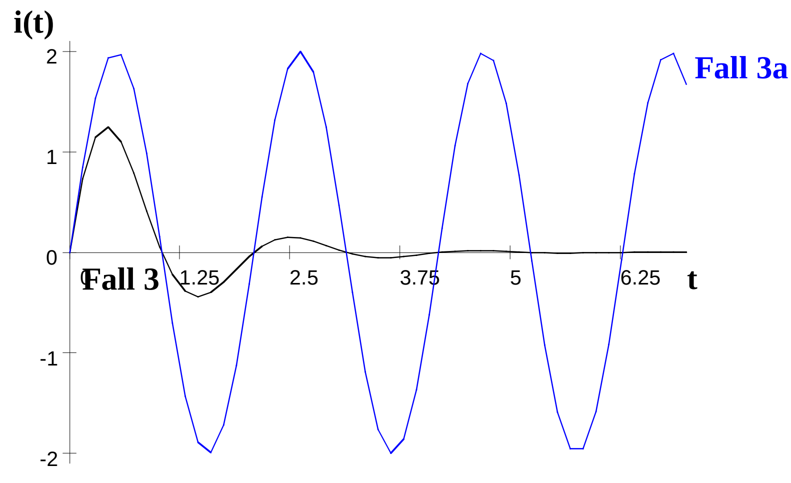
Der Ansatz wird in die Differentialgleichung eingesetzt, und die unbestimmten Koeffizienten aus dem Ansatz werden über einen Koeffizientenvergleich bestimmt.

Illustrationen zur Schwingungsdifferentialgleichung



Fall 1: große Reibung, aperiodischer Fall, 2 negative reelle Werte λ, abklingende Kurve, keine Schwingung

Fall 2: aperiodischer Grenzfall, 2 negative gleiche reelle Werte λ, abklingende Kurve, keine Schwingung



Fall 3: geringe Reibung, 2 konjugiert komplexe Werte λ, abklingende harmonische Schwingung

Fall 3a: keine Reibung, 2 konjugiert komplexe Werte λ (rein imaginär), konstante harmonische Schwingung

Beispiel 3:

Integrodifferentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Für die freie gedämpfte Schwingung erhält man die Gleichung

$$L\dot{i}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = 0$$

mit den Anfangswerten

$$i\,(0) = 0; \quad \dot{i}\,(0) = \frac{1}{L}u_0,$$

die mittels Laplacetransformation gelöst werden kann.

Beispiel 4:

System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Es sei $i\,(t)$ der Ankerstrom beim Einschalten eines Gleichstrommotors und $\omega\,(t)$ die Ankerwinkelgeschwindigkeit. Dann gilt

$$\begin{array}{lllll} L\dot{i}(t)+ & & Ri(t) & +a\omega(t) & = u_0 \\ & \theta\dot{\omega}\,(t) & +ai\,(t) & & = -M \end{array}$$

$$i\,(0) = 0; \qquad \omega\,(0) = 0$$

$L,\ R,\ a,\ \theta$ sind dabei Konstanten.

Beispiel 5:

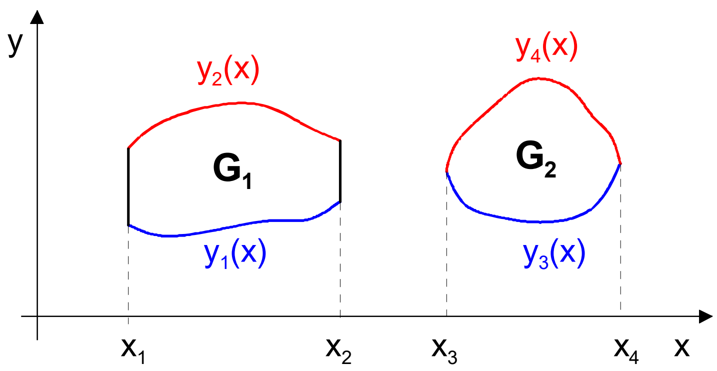
Potentialgleichung

Die Laplacetransformation kann auch für Funktionen mehrerer Veränderlicher angewendet werden und ist damit z. B. für die Potentialgleichung mit Anfangswerten anwendbar:

$u = u\,(x, y)\,, \quad -\infty < x, y < \infty;$

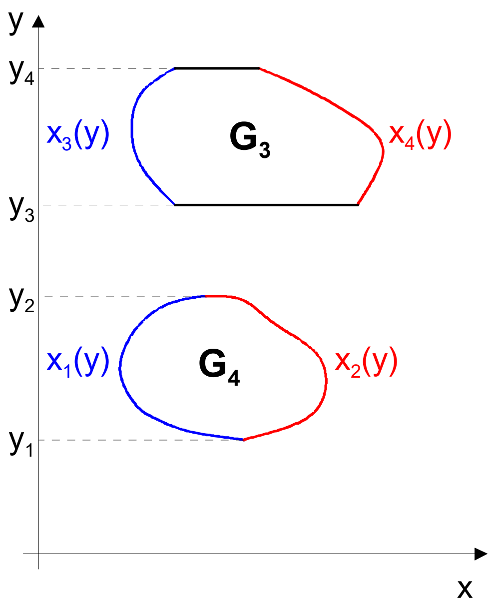
$$\begin{array}{rcl} u_{xx} + u_{yy} & = & 0 \\ u(x, 0) & = & u_1(x), \quad u(x, l) = u_2(x) \\ u\,(0, y) & = & u_3\,(y)\,, \quad u(p, y) = u_3(y) \end{array}$$

Normalbereich bezüglich der x-Achse:



a) Projektion von G auf die x-Achse $\Longrightarrow$ x_1, x_2, x_3, x_4
b) Ermittelung der unteren/oberen Funktionen $\Longrightarrow$ $y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x)$
$G_1 = \{(x, y) \quad | \quad x_1 \leq x \leq x_2; \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$
$G_2 = \{(x, y) \quad | \quad x_3 \leq x \leq x_4; \quad y_3(x) \leq y \leq y_4(x)\}$

Normalbereich bezüglich der y-Achse:



a) Projektion von G auf die y-Achse $\Longrightarrow$ y_1, y_2, y_3, y_4
b) Ermittelung der „linken/rechten” Funktionen $\Longrightarrow$ $x_1(y), x_2(y)$
$G_4 = \{(x, y) \quad | \quad y_1 \leq y \leq y_2; \quad x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$
$G_3 = \{(x, y) \quad | \quad y_3 \leq y \leq y_4; \quad x_3(y) \leq x \leq x_4(y)\}$

Anwendungen der Flächenintegrale

1. **Volumenberechnung:** Es sei $f_1(x,y)$ die Grundfläche des Körpers,$f_2(x,y)$ die Deckfläche über B, dann gilt

$$V = \iint_B [f_2(x,y) - f_1(x,y)]dB$$

Gilt $f(x,y) = const. = 1$, so ergibt das Integral den Flächeninhalt A_B von B:

$$A_B = \iint_B 1dB$$

2. Sei B mit einer Massenbelegung versehen. Dann kann jedem Punkt $P = (x,y)^T \in B$ eine stetige Flächendichte $\rho(x,y)$ zugeordnet werden. Für die Masse des Flächenstückes B gilt dann:

$$m = \iint_B \rho(x,y)dB$$

3. Berechnung des Flächenschwerpunktes eines ebenen Bereiches B mit der Flächendichte $\rho(x,y)$:

$$x_s = \frac{1}{m}\iint_B x\rho(x,y)dB, \qquad y_s = \frac{1}{m}\iint_B y\rho(x,y)dB.$$

Ist die Dichte $\rho = \rho_0 = const.$, so kann in den obigen Formeln der Faktor ρ_0 vor das Integral gezogen werden. Mit $\frac{\rho_0}{m} = \frac{\rho_0}{B\rho_0} = \frac{1}{B}$ entstehen dann die Formeln für den **geometrischen Schwerpunkt**:

$$x_0 = \frac{1}{B}\iint_B xdB, \qquad y_0 = \frac{1}{B}\iint_B ydB.$$

4. Berechnung der Flächenträgheitsmomente eines ebenen Bereiches B mit der Flächendichte $\rho(x,y)$:
a) bezüglich der x- bzw. y-Achse:

$$I_x = \iint_B y^2\rho(x,y)dB$$
$$I_y = \iint_B x^2\rho(x,y)dB$$

b) Polares Trägheitsmoment bzw. Trägheitsmoment bzgl. des Koordinatenursprunges

$$I_0 = \iint_B r^2\rho(x,y)dB = \iint_B (x^2+y^2)\rho(x,y)dB$$