Höhere Mathematik / Teil 1

Cordula Bernert

Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] MINÖL: ,Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, BG Teubner Verlagsgesellschaft Band 1, 13 ,2 und 3, Ü1, Ü3

[2] STINGL: Mathematik für Fachhochschulen, Carl-Hanser-Verlag

[3] Papula: Mathematik für Ingenieure Band 1 und 2, Vieweg-Verlag

1 Grundlagen: Mengen und Zahlen

1.1 Grundlagen der Mengenlehre

1.1.1 Mengenbegriff und Bezeichnungen

Definition 1.1 *Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten (Elementen) zu einem Ganzen.*

Schreibweise:
für Mengen: große lateinische Buchstaben
für Elemente: kleine lateinische Buchstaben
$M_1 = \{x|A\}$: *Menge aller x, für die die Aussage A wahr ist*
$M_2 = \{1, 3, 5, 7\} : \quad 1 \in M_2, \quad 2 \notin M_2$

Beispiel 1.1 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$: *Menge der natürlichen Zahlen*

Beispiel 1.2 $\mathbb{Z}$: *Menge der ganzen Zahlen*

Beispiel 1.3 $\mathbb{Q}$: *Menge der rationalen Zahlen*

Beispiel 1.4 $\mathbb{R}$: *Menge der reellen Zahlen*

Beispiel 1.5 $\mathbb{C}$: *Menge der komplexen Zahlen*

Beispiel 1.6 $M_1 = \{x|x^2 - 2 = 0\}$

Definition 1.2 *Eine Menge heißt leer, wenn sie keine Elemente enthält. Symbol:* $\varnothing$

1.1.2 Relationen zwischen Mengen

Definition 1.3 *Eine Menge A heißt Teilmenge der Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.*

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow \forall x : x \in A \Longrightarrow x \in B$$

$\forall$: *Allquantor;* $\forall x$: *"für alle x "*

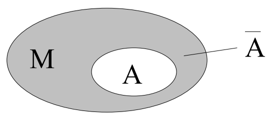
Definition 1.4 *Zwei Mengen A und B heißen gleich, wenn jedes Element der Menge A auch Element der Menge B ist und umgekehrt.*
$A = B \Longleftrightarrow \forall x : x \in A \Longleftrightarrow x \in B$

Daraus folgt: $A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
$\wedge$: logisches „und"

Definition 1.5 *Echte Teilmenge:* $A \subset B \Longleftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

Beispiel 1.7 *Spezielle (echte) Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind die Intervalle.*
$[a, b]$*: abgeschlossenes Intervall*
(a, b)*: offenes Intervall*

Definition 1.6 *Es sei $A \subseteq M$. $\overline{A}$ heißt Komplementärmenge bezüglich M, wenn gilt:*
$\overline{A} = \{x | x \in M \wedge x \notin A\}$

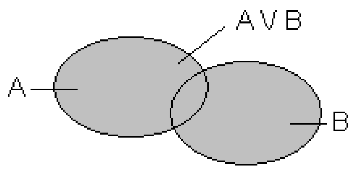


Beispiel 1.8 $C = \{1, 3, 5, 6, 7\}$; $\quad D = \{1, 3, 5\}$; $\quad E = \{3, 5, 1\}$
Es gilt: $\left.\begin{array}{ll} D \subseteq C, & D \subset C, \\ E \subseteq C, & E \subset C, \end{array}\right\} \quad D = E, \quad \overline{D} = \{6, 7\}.$

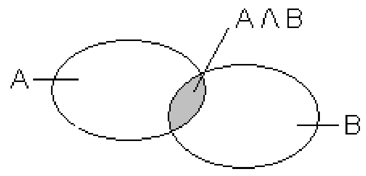
1.1.3 Mengenoperationen

Definition 1.7 *Unter der Vereinigung zweier Mengen A und B verstehen wir die Menge aller Elemente, die mindestens einer der beiden Mengen angehören:*
$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$.

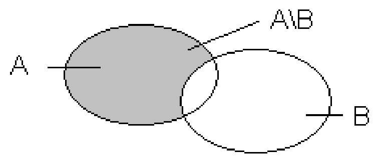
" $\vee$ " : logisches „oder", nicht ausschließend



Definition 1.8 *Unter dem Durchschnitt zweier Mengen A und B verstehen wir die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind:*
$A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$.



Definition 1.9 *Unter der Differenz zweier Mengen A und B verstehen wir die Menge aller Elemente von A, die nicht zu B gehören:*
$A \backslash B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$



Beispiel 1.9 $A = \{1, 2\}; \quad B = \{2, 3, 4\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} = B \cup A$
$A \cap B = \{2\} = B \cap A$
$A \backslash B = \{1\}; \quad B \backslash A = \{3, 4\}$
$(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = \{1, 3, 4\}$
$(A \cup B) \backslash (A \cap B) = \{1, 3, 4\}$

1.1.4 Rechenregeln für Mengen

1. Kommutativgesetze: $A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A$
2. Assoziativgesetze: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. Distributivgesetze: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   Seien im Folgenden $A, B \subseteq M$:
4. $A \cup M = M; \quad A \cap M = A$
5. $\overline{\overline{A}} = A; \quad A \cup \overline{A} = M; \quad A \cap \overline{A} = \varnothing$

6. $A \cup \varnothing = A; \quad A \cap \varnothing = \varnothing$

7. De Morgan'sche Gesetze
   $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Definition 1.10 *Zwei Mengen A,B heißen disjunkt (elementefremd), wenn gilt* $A \cap B = \varnothing$.

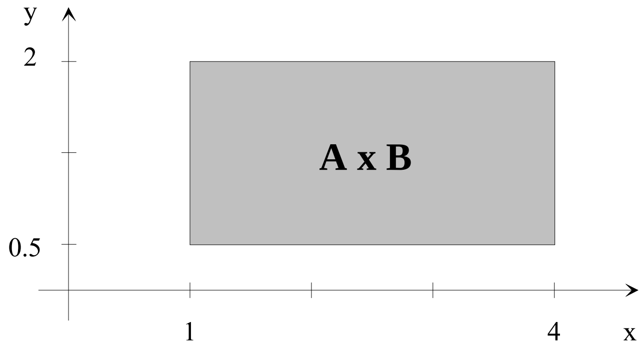
Definition 1.11 *Produktmenge:* $A \times B = \{(a,b) |\ a \in A \wedge b \in B\}$

Sie enthält als Elemente alle geordneten Paare (a, b), die sich nach der Vorschrift $a \in A \wedge b \in B$ bilden lassen.

Beispiel 1.10 $A = \{a, b, c\};\ B = \{1, 7\}$

Beispiel 1.11 $A \times B = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 7), (b, 7), (c, 7)\}$

Beispiel 1.12 $A = \{x |\ 1 \leq x \leq 4\};\ B = \{y |\ 0.5 \leq y \leq 2\}$



Beispiel 1.13 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: *Menge der Punkte der x-y-Ebene*

1.1.5 Verallgemeinerungen

M_1, M_2, ..., M_n, ... seien Mengen.

1. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} M_i \quad \left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i\right)$: Vereinigung (Durchschnitt) der ersten n Mengen M_i

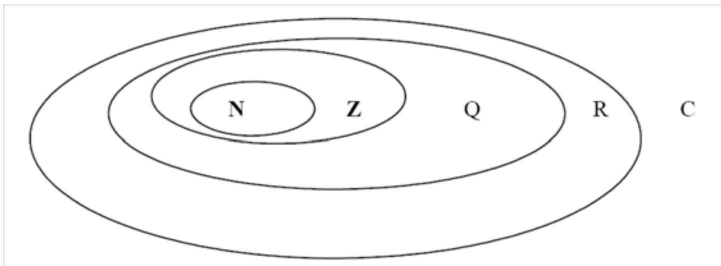
2. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i \quad \left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} M_i\right)$: Vereinigung (Durchschnitt) aller Mengen M_i

3. $(m_1, m_2, ...m_n)$: geordnetes n-Tupel, $n = 2$: Paar, $n = 3$: Tripel

4. $M_1 \times M_2 \times\ ... \times M_n = \{(m_1, m_2, ...m_n)\ |\ m_1 \in M_1,\ ...\ , m_n \in M_n\}$: Produkt der Mengen M_1, bis M_n

   Schreibweise: $A \times A \times .... \times A = A^n$ bei n Faktoren A. Folglich gilt: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$.

1.1.6 Aufbau der Zahlbereiche



Zahlbereiche	Zeichen und Definition	Operationen (ohne Einschränkungen)
Natürliche Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$	$+, *$
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$	$+, *, -$
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \{\frac{u}{v} \vert u, v \in \mathbb{Z}, \text{teilerfremd}, v \neq 0\}$	$+, *, -, /$
Reelle Zahlen	$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{x \vert x \text{ ist irrational}\}$	$+, *, -, /$ $\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1, x \geq 0$ Logarithmen aus $x > 0$
Komplexe Zahlen	$\mathbb{C} = \{z \vert \text{ Def. s. nächster Abschnitt}\}$	$+, *, -, /$ $\sqrt[n]{z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1, x \geq 0$ Logarithmen aus $z \neq 0$

1.2 Komplexe Zahlen

1.2.1 Definition und Eigenschaften

Einleitung:

$x^2 = 2 \Longrightarrow \nexists$ rationale Zahl als Lösung $\Longrightarrow$ Einführung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$

$x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \nexists$ reelle Zahl als Lösung $\Longrightarrow$ Einführung der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ (Euler, Gauß)

Es gibt zahlreiche Anwendungen in Physik und Technik, z.B. bei der Berechnung von Wechselstromkreisen.

Definition 1.12 *Imaginäre Einheit $i(j)$:* $i^2 = -1$

Damit wird die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ durch die imaginäre Einheit gelöst.

Definition 1.13 *Das Produkt* bi, $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ *heißt rein imaginäre Zahl.*

Bemerkung 1.1 *Es gelten die Rechengesetze der reellen Zahlen. Es sei* $a, b \in \mathbb{R}$, *dann gilt:*

1. $ai < bi$ für $a < b$
2. $0i = 0$
3. $ai \pm bi = (a \pm b)i$
4. $ai \cdot bi = (a \cdot b)i \cdot i = -ab$
5. $\frac{a}{i} = \frac{a \cdot i}{i \cdot i} = -ai$
6. $i^1 = i; \quad i^2 = -1; \quad i^3 = -i; \quad i^4 = 1$
   $i^{4n+1} = i; \quad i^{4n+2} = -1; \quad i^{4n+3} = -i; \quad i^{4n+4} = 1; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beispiel 1.14 $6i + 13i - 5i = 14i$

$$4i \cdot 9i = -36$$

$$\frac{17.3}{i} = -17.3i$$

Definition 1.14 *Die Summe einer reellen und einer rein imaginären Zahl heißt komplexe Zahl* $z : z = a + bi;\ a, b \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 1.2 a : *Realteil:* $a = \mathrm{Re}(z)$
b : *Imaginärteil:* $b = \mathrm{Im}(z)$
$\overline{z} = a - bi$: *konjugiert komplexe Zahl*

Bemerkung 1.3 *Die Rechengesetze der reellen Zahlen gelten mit Ausnahme der Regeln für Ordnung und Monotonie.*

Es sei $z_1 = a_1 + b_1 i \in \mathbb{C}$ und $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
z_1 \pm z_2 &= (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i \\
z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} \\
&= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2}; \quad z_2 \neq 0
\end{aligned}$$

Beispiel 1.15

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 1+7i; \quad z_2 = 1-3i \quad \overline{z_1} = 1-7i; \quad \overline{z_2} = 1+3i \\
z_1 + z_2 &= 1+7i+1-3i = 2+4i \\
z_1 - z_2 &= 1+7i-(1-3i) = 0+10i = 10i \\
z_1 \cdot z_2 &= (1+7i)(1-3i) = 1-3i+7i-21i^2 = 22+4i \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1+7i}{1-3i} \cdot \frac{1+3i}{1+3i} = \frac{1+3i+7i+21i^2}{1+9} = -\frac{20}{10} + \frac{10}{10}i = -2+i
\end{aligned}
$$

Rechenregeln für komplexe Zahlen:

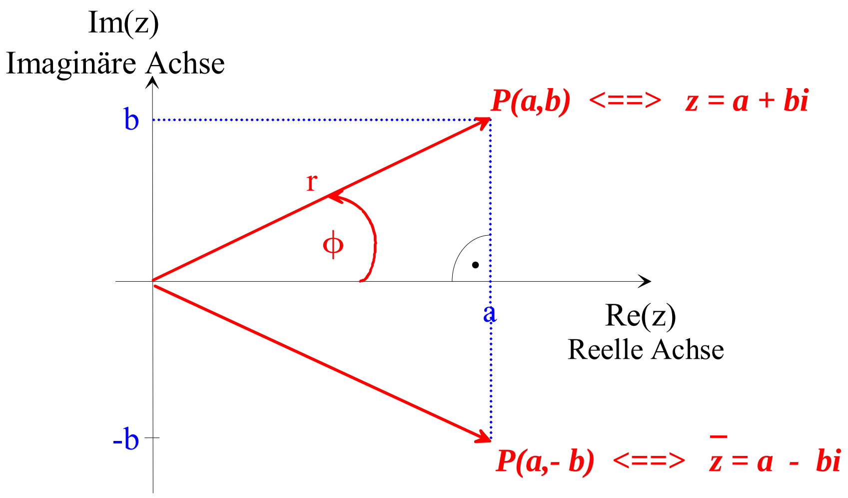
Es seien $z_1 = a_1 + b_1 i \in \mathbb{C}$, $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$ und $z_3 \in \mathbb{C}$.

1. Gleichheit: $z_1 = z_2 \Longleftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$
2. Kommutativgesetz der Addition: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
3. Kommutativgesetz der Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
4. Assioziativgesetz der Addition: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
5. Assioziativgesetz der Multiplikation: $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
6. Distributivgesetz: $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$
7. $\alpha z = \alpha(a+bi) = \alpha a + \alpha bi$ für $\alpha \in \mathbb{R}$
8. $z + (-z) = a + bi - (a+bi) = 0$
9. $z^0 = 1; \quad z^1 = z; \quad z^2 = z^1 \cdot z; \quad ... \quad z^n = z^{n-1} \cdot z; \quad n \in \mathbb{N}$

Bemerkung 1.4 *$\mathbb{R} \subset \mathbb{Z}$, d.h. die reellen Zahlen sind ein Spezialfall der komplexen Zahlen $z = a + bi$ mit $b = 0$.*

1.2.2 Darstellungsarten für komplexe Zahlen

- Arithmetische Darstellung - Darstellung der komplexen Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene



$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$: Betrag der komplexen Zahl z
($\widehat{=}$ Scheinwiderstand im Wechselstromkreis)

$z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$

- Trigonometrische Form der komplexen Zahlen

  Es sei $z \neq 0 \Longrightarrow |z| \neq 0$.

  $z = a + bi = |z|(\frac{a}{|z|} + \frac{b}{|z|}i)$

  $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{|z|}; \qquad \cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{|z|}; \qquad \tan\varphi = \frac{b}{|z|} : \frac{a}{|z|} = \frac{b}{a}$

  $\Longrightarrow z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$

  Es gilt damit $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\varphi = \arctan\frac{b}{a}$.

  Wegen der unterschiedlichen Periodizität der Sinus-/Cosinusfunktionen und des Tangens sowie wegen des Wertebereichs der entsprechenden Umkehrfunktionen müssen bei einer Zahl mit negativem Realteil a zum Winkel φ, der über die Arcustangensfunktion ermittelt wird, 180^o addiert werden.

- Exponentielle oder Eulersche Darstellung

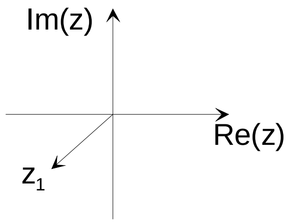
  Mit Hilfe der Eulerschen Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ergibt sich

  $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi}$.

  $\varphi = \arg(z)$ heißt Argument von z. Diese Darstellung ist wichtig für die Berechnung von Phasenverschiebungen im Wechselstromkreis.

Beispiel 1.16 ***Beispiel 1.17***

$$\begin{aligned} z_1 &= -2\sqrt{3} - 2i; \qquad z_2 = 2e^{\frac{2}{3}\pi i} \\ r_1 &= \sqrt{4 \cdot 3 + 4} = 4; \\ \tan\varphi_1 &= \frac{-2}{-2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_{1H} = 30^o \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} a_1 &< 0; \qquad b_1 < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{3. Quadrant} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_1 = \varphi_{1H} + 180^o = 210^o \\ z_1 &= 4(\cos 210^o + i \sin 210^o) = 4(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi) = 4e^{\frac{7}{6}\pi i} = 4e^{i210^o} \\ z_2 &= 2e^{\frac{2}{3}\pi i} = 2(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi) = 2(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}i \end{aligned}$$

1.2.3 Produkt und Quotient in der trigonometrischen bzw. Eulerschen Darstellung

Es sei $z_1 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1); \qquad z_2 = |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

Produkt:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot |z_2|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \left((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right) \\ &= |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = |z_1| \cdot |z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{aligned}$$

Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen in trigonometrischer Darstellung werden die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.

Verallgemeinerung: $z_k = |z_k| \cdot (\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k); \qquad k = 1, 2, ...n$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n = |z_1| \cdot |z_2| \cdot ... \cdot |z_n|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n))$$

Potenzierung: $z_1 = z_2 = ... = z_n = z$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n = z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = |z|^n e^{in\varphi}; \qquad n \in \mathbb{N}$$

Diese Formel heißt **Satz von MOIVRE**

Quotient:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|z_2|\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} \\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)) = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}
\end{aligned}$$

Bei der Division zweier komplexer Zahlen in trigonometrischer Darstellung werden die Beträge dividiert und die Argumente subtrahiert.

Beispiel 1.18 $z_1 = 4e^{\frac{7}{6}\pi i} \qquad z_2 = 2e^{\frac{2}{3}\pi i} \qquad (s.oben)$

$z_1\cdot z_2 = 4\cdot 2e^{(\frac{7}{6}\pi+\frac{2}{3}\pi)i} = 8e^{\frac{11}{6}\pi i} = 8(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi) = 8(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = 4\sqrt{3} - 4i$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2}e^{(\frac{7}{6}\pi-\frac{2}{3}\pi)i} = 2e^{\frac{3}{6}\pi i} = 2e^{\frac{1}{2}\pi i} = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2(0+i) = 2i$

Hausaufgabe: Führen Sie diese Berechnungen in der arithmetischen Darstellung durch.

1.2.4 Wurzelziehen im Bereich der komplexen Zahlen

Es sei $z^* = |z^*|\cdot(\cos\varphi^* + i\sin\varphi^*) \in \mathbb{C}$ gegeben und fest gewählt.
Gesucht ist eine Zahl $u \in \mathbb{C}$, für die gilt:

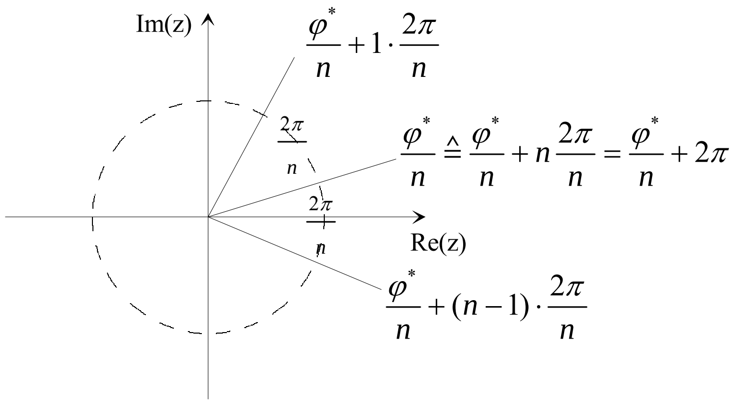
$u = |u|(\cos\psi + i\sin\psi) \qquad \wedge \qquad u^n = z^*$

Falls u existiert, heißt u die **n-te Wurzel aus** z^*.

$u^n = z^*$
$|u|^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = |z^*|\cdot(\cos\varphi^* + i\sin\varphi^*)$
$\Longrightarrow |u| = \sqrt[n]{|z^*|}$,
$\cos n\psi = \cos\varphi^* \qquad \wedge \qquad \sin n\psi = \sin\varphi^*$
$\Longrightarrow n\psi = \varphi^* + k2\pi; \qquad k \in \mathbb{Z}$

$$u_k = \sqrt[n]{|z^*|}(\cos\frac{\varphi^* + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi^* + k2\pi}{n}) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Es gibt unendlich viele komplexe Zahlen u_k. Da aber die Sinus- und die Cosinusfunktion periodisch sind, gibt es nur endlich viele verschiedene Lösungen der obigen Gleichung:



$$u_k = \sqrt[n]{|z^*|}(\cos\frac{\varphi^* + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi^* + k2\pi}{n}) \qquad k = 0, 1, ...n-1$$

Die Gleichung $u^n = z^*$ besitzt die n Lösungen u_k, $k = 0, 1, ...n-1$. Alle weiteren u_k sind Wiederholungen der ersten n Wurzeln. Die Wurzel u_0 heißt **Hauptwert.**

Bemerkung 1.5 *Jede reelle Zahl, interpretiert als komplexe Zahl, besitzt im Bereich der komplexen Zahlen genau n n-te Wurzeln.*

Beispiel 1.19 *Gesucht ist* $\sqrt[4]{-\sqrt{3}+i}$.

$\Longrightarrow z^* = -\sqrt{3} + i = \sqrt{3+1} \cdot e^{i(-30^o+180^o)} = 2e^{i150^o}$,

da $\varphi^*_H = \arctan\frac{1}{-\sqrt{3}} = -30^o$ *und* z^* *im 2. Quadranten liegt.*

$u_k = \sqrt[n]{|z^*|}(\cos\frac{\varphi^*+k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi^*+k2\pi}{n}) \qquad k = 0, 1, ...n-1$

$u_k = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{150^o+k360^o}{4} + i\sin\frac{150^o+k360^o}{4}) \qquad k = 0, 1, 2, 3$

$u_0 = \sqrt[4]{2}(\cos 37.5^o + i\sin 37.5^o) \simeq 0.94330 + 0.72382i$

$u_1 = \sqrt[4]{2}(\cos 127.5^o + i\sin 127.5^o) \simeq -0.72382 + 0.94330i$

$u_2 = \sqrt[4]{2}(\cos 217.5^o + i\sin 217.5^o) \simeq -0.94330 - 0.72382i$

$u_3 = \sqrt[4]{2}(\cos 307.5^o + i\sin 307.5^o) \simeq 0.72382 - 0.94330i$

$(u_4 = \sqrt[4]{2}(\cos 397.5^o + i\sin 397.5^o) \simeq 0.94330 + 0.72382i = u_0)$

1.2.5 Rechnen mit Beträgen im Bereich $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \\
||z_1| - |z_2|| &\leq |z_1 - z_2| \\
|z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \\
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|}
\end{aligned}$$

Beweisskizzen:

zu 1. $z_1 = a + bi; \qquad z_2 = c + di$

zeige im 1. Schritt: $|ac + bd| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$

zeige im 2. Schritt: $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$

zu 2. $z_1 = z_2 + (z_1 - z_2) \implies |z_1| \leq |z_2| + |z_1 - z_2| \implies |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \quad (*)$

$z_2 = z_1 + (z_2 - z_1) \implies |z_2| \leq |z_1| + |z_2 - z_1| \implies |z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1|$

$\implies -(|z_1| - |z_2|) \leq |z_1 - z_2| \quad (**)$

$(*), (**)$, Definition des Betrages $\implies ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

1.2.6 Die Anwendung der komplexen Zahlen in der Elektrotechnik

Die Symbolische Methode in der Wechselstromtechnik bedeutet, dass

- Probleme der Wechselstromtechnik in Analogie zur Gleichstromlehre behandelt werden können.
- Der Grundgedanke besteht darin, dass
  - die Zeitabhängigkeit nicht betrachtet wird,
  - die Wechselstromgröße einem Zeiger in der Gauß'schen Zahlenebene zugeordnet wird, bei dem
  - die Länge der Amplitude der Wechselstromgröße und
  - der Winkel der Phasenlage der Wechselstromgröße entspricht.

Beispiel 1.20 *Wechselspannung:*
$u = \widehat{u}\cos(\omega t + \phi_u) \implies U = \widetilde{U}e^{j\phi_u}[\cdot e^{j\omega t}] \implies U = \widetilde{U}e^{j\phi_u} = \widetilde{U}(\cos\phi_u + j\sin\phi_u)$
Wirkkomponente: $Re(u) = \widetilde{U}\cos\phi_u = U_W$
Blindkomponente: $Im(U) = \widetilde{U}\sin\phi_u = U_B$
Effektivwert: $\widetilde{U} = \sqrt{U_W^2 + U_B^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\widehat{u}$

Beispiel 1.21 *Stromstärke im Wechselstromkreis analog*
$i = \widehat{i}\cos(\omega t + \phi_i) \implies I = \widetilde{I}e^{j\phi_i}[\cdot e^{j\omega t}] \implies I = \widetilde{I}e^{j\phi_i} = \widetilde{I}(\cos\phi_i + j\sin\phi_i)$

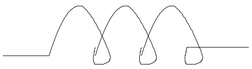
Beispiel 1.22 *Wechselstromwiderstand: Z*
Ohm'sches Gesetz: $Z = \dfrac{U}{I} = \dfrac{\widetilde{U}e^{j\phi_u}}{\widetilde{I}e^{j\phi_i}} = \dfrac{\widetilde{U}}{\widetilde{I}}e^{j(\phi_u - \phi_i)}$

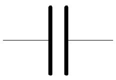
Andererseits gilt: $Z = \widetilde{Z}e^{i\phi_z} = R + jX \implies \widetilde{Z} = \dfrac{\widetilde{U}}{\widetilde{I}}; \quad \phi_z = \phi_u - \phi_i$

$\widetilde{Z} = \sqrt{R^2 + X^2}$: *Scheinwiderstand*
$R = \mathrm{Re}(Z)$: *Wirkwiderstand*
$X = \mathrm{Im}(Z)$: *Blindwiderstand*

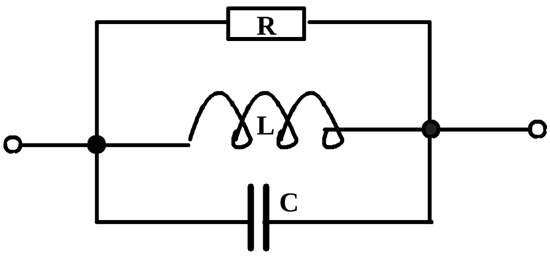
Für die unterschiedlichen Bauteile hat Z als Widerstandsoperator folgende Werte:

 : Ohmscher Widerstand: $Z_R = R$

 : Induktiver Widerstand: $Z_L = j\omega L$

 : Kapazitiver Widerstand: $Z_C = \dfrac{1}{j\omega C}$

Beispiel 1.23



Gegeben: $R = 150\Omega$; $\omega L = 100\Omega$; $\frac{1}{\omega C} = 50\Omega$

Gesucht: Z

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{j\omega L + R + Rj\omega Lj\omega C}{Rj\omega L}$$

$$Z = \frac{Rj\omega L}{j\omega L + R + Rj\omega Lj\omega C} = \frac{Rj\omega L}{j\omega L + R - R\omega L\omega C}$$

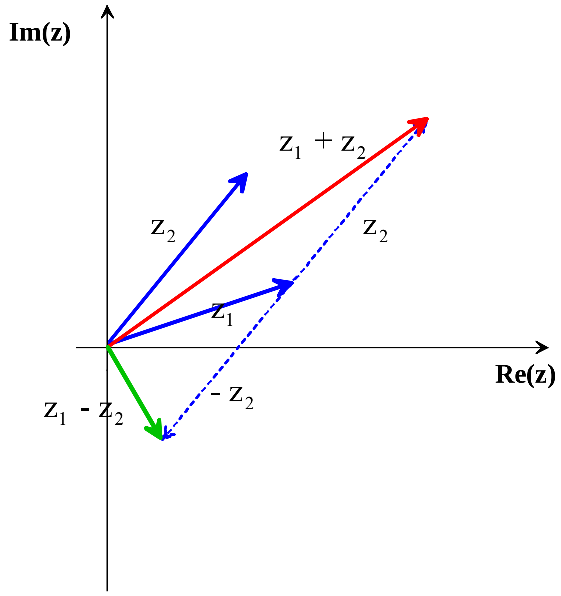
$$= \frac{150\Omega \cdot j100\Omega}{j100\Omega + 150\Omega - 150\Omega 100\Omega \dfrac{1}{50\Omega}} = \frac{15000j\Omega^2}{(150-300)\Omega + j100\Omega}$$

$$= \frac{15000j\Omega}{-150+100j} \cdot \frac{-150-100j}{-150-100j} = \frac{1500000 - 2250000j}{22500+10000}\Omega$$

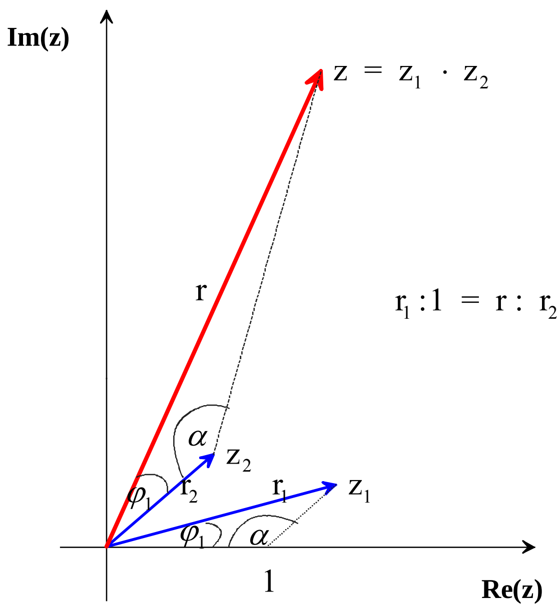
$$= \frac{15000 - 22500j}{325}\Omega = 46,15\Omega - 69,23j\Omega$$

1.2.7 Geometrische Veranschaulichung der Rechenoperationen in $\mathbb{C}$

1. Addition / Subtraktion

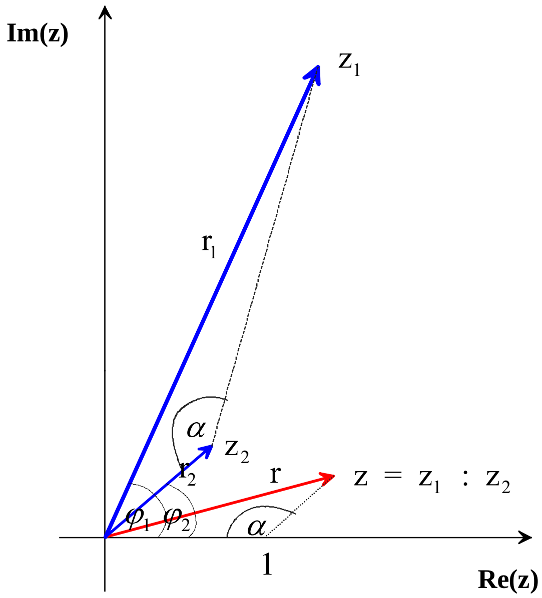


2. Multiplikation



$$r_1 : 1 = r : r_2 \Rightarrow r = r_1 \cdot r_2 \ ; \qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

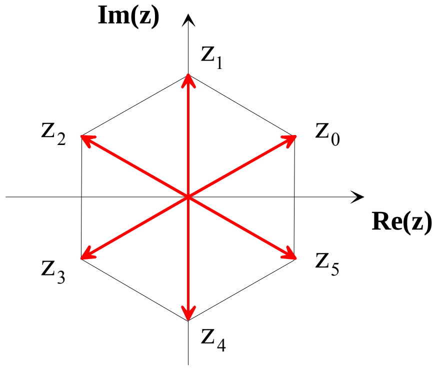
3. Division



$r : 1 = r_1 : r_2 \quad \Longrightarrow \quad r = r_1 : r_2$

$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

4. Wurzelziehen am Beispiel $\sqrt[6]{-1}$



1.2.8 Logarithmieren im Bereich $\mathbb{C}$

Es sei $z = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi+k2\pi)}$.
$==>$ $\ln z = \ln r + i(\varphi + k2\pi)\ln e = \ln r + i(\varphi + k2\pi)$

Definition 1.15 *Der natürliche Logarithmus von* $z = e^{i\varphi} \quad (z \neq 0)$ *ist*

$$\ln z = \ln r + i(\varphi + k2\pi); \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Bemerkung 1.6 $Im(z) = \varphi + k2\pi; \quad k \in \mathbb{Z}$ *ist nicht eindeutig bestimmt*

Beispiel 1.24 $\ln z_1 = \ln(5e^{i(53,13^o + k\cdot 360^o)}) \quad k \in \mathbb{Z}$
$= \ln 5 + i(0,147 \cdot 2\pi + k \cdot 2\pi)$
$= \ln 5 + i(0,294 + 2k)\pi$

Beispiel 1.25 $\ln z_2 = \ln(\sqrt{5}e^{i(153,4^o + k\cdot 360^o)}) \quad k \in \mathbb{Z}$
$= \ln 5 + i(0,426 \cdot 2\pi + k \cdot 2\pi)$
$= \ln 5 + i(0,852 + 2k)\pi$

1.3 Der Fundamentalsatz der Algebra

Zur Lösung algebraischer Gleichungen (quadratische Gleichungen, kubische Gleichungen, Gleichungen n-ten Grades) werden noch einige Begriffe, Zusammenhänge und Berechnungsverfahren benötigt.

Definition 1.16 *Unter einem Polynom vom Grade n / einer Polynomfunktion vom Grade n versteht man einen Ausdruck der Form*

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \text{ mit } a_n \neq 0$$

der eine eindeutige Abbildung (Funktion) p: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *darstellt.*

Definition 1.17 *Eine Gleichung der Form* $p_n(z) = 0$ *heißt algebraische Gleichung oder Polynomgleichung von Grade* n*. Ihre Lösungen nennt man auch Wurzeln.*

Beispiel 1.26 .
a) Polynom 1. Grades: $p(z) = 7z$
b) Polynomgleichung 3. Grades: $p(z) = -2z^3 + 5z^2 - 4z + 9 = 0$

Wir wir im Abschnitt zum Wurzelziehen in $\mathbb{C}$ schon gesehen haben, existieren für eine n-te Wurzel aus einer komplexen Zahl z genau n voneinander verschiedene Lösungen. In engem Zusammenhang steht damit der folgende Satz von C. F. Gauß:

Satz 1.1 *Fundamentalsatz der Algebra*
Jede algebraische Gleichung n-ten Grades $p_n(x) = 0$ hat im Bereich der komplexen Zahlen mindestens eine Lösung $z \in \mathbb{C}$.

Folgerung 1.1 *Nach dem Fundamentalsatz hat folglich jede algebraische Gleichung n-ten Grades genau n Wurzeln (Lösungen).*

Beweisidee:

1. Die Gleichung $p_n(z) = 0$ hat laut Fundamentalsatz mindestens eine Lösung: z_1. Mit Hilfe der Partialdivision (Polynomdivision) kann der zugehörige Linearfaktor $(z - z_1)$ abdividiert werden, also: $p_n(z) : (z - z_1) = p_{n-1}(z)$.

2. Für die Gleichung mit dem Restpolynom $p_{n-1}(z) = 0$ gilt wieder der Fundamentalsatz. Also existiert ebenfalls mindestens eine Lösung dieser Polynomgleichung. Nennen wir sie $z_2 \in \mathbb{C}$. Mit der Polynomdivision ergibt sich weiter: $p_{n-1}(z) : (z - z_2) = p_{n-2}(z)$.........

n. Dieser Prozess wir nun insgesamt n-mal durchgeführt. Man erhält die letzte Lösung $z_n \in \mathbb{C}$ und das Restpolynom $p_1(z) : (z - z_n) = a_n \neq 0$.

Bemerkung 1.7 *Die Lösungen $z_1, z_2, ..., z_n$ müssen nicht notwendigerweise verschieden sein.*

Folgerung 1.2 *Nach der obigen Folgerung kann man für das Polynom nun eine Produktdarstellung / Linearfaktorzerlegung angeben, nämlich:*

$$\begin{aligned} p_n(z) &= a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdot ... \cdot (z - z_n) \\ &= a_n(z - \widehat{z}_1)^{n_1}(z - \widehat{z}_2)^{n_2} \cdot ... \cdot (z - \widehat{z}_k)^{n_k} \ \text{mit } n_1 + n_2 ... n_k = n \end{aligned}$$

Dabei wird der Wert n_i als ***Vielfachheit der Lösung*** *$\widehat{z}_i$ bezeichnet.*

Beispiel 1.27 *Gleichung 2. Grades:* $p_2(n) = 2z^2 + 8z - 10 = 0$

$$\begin{array}{ccccc} z^2 + 4z - 5 = 0 & \Longrightarrow & z_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4+5} & \Longrightarrow & z_1 = -5; z_2 = 1 \\ p_2(z) & = & 2z^2 + 8z - 10 & = & 2(z+5)(z-1) \end{array}$$

Beispiel 1.28 *Gleichung 3. Grades:* $p_3(z) = z^3 - 3z^2 + 4 = 0 \qquad \curvearrowright$

$$p_3(z) = (z+1)(z-2)^2$$

Hier ist $z_1 = -1$ eine einfache und $z_2 = 2$ eine doppelte (zweifache) Nullstelle (Lösung) der Polynomgleichung.

Beispiel 1.29 *Gleichung 3. Grades:* $p_3(z) = z^3 - 6z^2 + 21z - 26 = 0 \qquad \curvearrowright$

$$p_3(z) = (z^2 - 4z + 13)(z - 2)$$

Das Polynom $z^2 - 4z + 13$ *hat keine reellen Nullstellen und kann deshalb in* $\mathbb{R}$ *nicht weiter in Faktoren zerlegt werden, aber in* $\mathbb{C}$*:*

$$\begin{aligned} p_3(z) &= (z^2 - 4z + 13)(z - 2) \\ &= (z - (2 - 3i))(z + (2 - 3i))(z - 2) \end{aligned}$$

Hausaufgabe: Ausmultiplizieren in den obigen 3 Beispielen zur Bestätigung der Produktdarstellung.

Bemerkung 1.8 *Hat das Polynom* p_n *nur reelle Koeffizienten* $a_k \in \mathbb{R}, \forall k = 0, 1, ...n$*, so treten komplexe Lösungen stets als Paar konjugiert komplexer Lösungen auf, d.h. mit* $z_1 = a + bi$ *ist auch* $z_1 = a - bi$ *Lösung der Gleichung* $p_n(z) = 0$.

Offen ist noch, wie man die Lösungen der Polynomgleichungen berechnen kann. Für Polynome 1. bis 3. Ordnung existieren geschlossene Lösungsformeln. Im Fall $n = 3$ sind das die CARDANOschen Lösungsformeln. Für $n > 3$ gibt es numerische Näherungsverfahren zur Lösung der Polynomgleichungen, z.B. das HORNER-Schema, die Regula falsi, das NEWTON-Verfahren, ...
Das HORNER-Schema dient eigentlich zur Berechnung von Polynomwerten $p_n(z)$ an einer festen Stelle $z = \widetilde{z}$. Es kann aber auch zur (näherungsweisen) Ermittlung von Wurzeln der Polynomgleichung $p_n(z) = 0$ benutzt werden:

$p_n(z) =$	$a_n z^n$ +	$a_{n-1} z^{n-1}$ +	$\cdots$ +	$a_1 z$ +	a_0
	a_n	a_{n-1}	$\cdots$	a_1	a_0
		$b_{n-1} \cdot \widetilde{z}$	$\cdots$	$b_1 \cdot \widetilde{z}$	$b_0 \cdot \widetilde{z}$
$z = \widetilde{z}$	b_{n-1}	b_{n-2}	$\cdots$	b_0	$r_0 = p_n(\widetilde{z})$

mit

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-k} &= a_{n-k+1} + b_{n-k+1} \cdot \widetilde{z}, \qquad \forall k = 2, ..., n \\ r_0 &= a_0 + b_0 \cdot \widetilde{z}. \end{aligned}$$

Beispiel 1.30 *Bestimmen Sie für das Polynom* $p_3 = z^3 - 3z^2 + 4$ *die Polynomwerte an den Stellen* $z_1 = -5$ *und* $z_2 = 4$ *unter Nutzung des Hornerschemas:*

$p_3(z) =$	$z^3 -$	$3z^2 +$	$0z +$	4
	1	-3	0	4
		-5	40	-200
$z_1 = -5$	1	-8	40	-196

$p_3(z) =$	$z^3 -$	$3z^2 +$	$0z +$	4
	1	-3	0	4
		4	4	16
$z_1 = 4$	1	1	4	20

Für die Polynomgleichung $p_3(z) = z^3 - 3z^2 + 4 = 0$ *kann man mit Hilfe des Arbeitsblattes zur Lösung algebraischer Gleichungen folgende Aussagen bezüglich der Lösungen treffen:*

- *Nach Regel R7 kann man aus dem Hornerschema für* $z = 4$ *ablesen, dass die Polynomgleichung keine Lösungen für* $z > 4$ *besitzt, da in der 3. Zeile des Hornerschemas nur noch positive Werte auftreten.*
- *Nach Regel R8 kann man aus dem Hornerschema für* $z = -5$ *ablesen, dass die Polynomgleichung ebenfalls keine weiteren Lösungen für* $z < -5$ *besitzt, da in der 3. Zeile des Hornerschemas Werte mit abwechselndem Vorzeichen auftreten.*

Beispiel 1.31 *Lösen Sie die Gleichung* $p_3(z) = z^3 - 6z^2 + 21z - 26 = 0$ *unter Nutzung des Hornerschemas.*
Nach Regel R4 bilden die Teiler von $a_0 = -26$, *also* $\pm 1, \pm 2, \pm 13, \pm 26$ *mögliche Lösungen. Sie werden mit dem Hornerschema überprüft:*

$p_3(z) =$	$z^3 - 6z^2 + 21z - 26$			
	1	-6	21	-26
		2	-8	26
$z_1 = 2$	1	-4	13	0

Damit gilt $p_3\,(2) = 0$, *d.h. die erste Lösung lautet* $z_1 = 2$. *Die 3. Zeile des Hornerschemas enthält dann die Koeffizienten des abdividierten Polynoms:*

$$\begin{aligned} \left(z^3 - 6z^2 + 21z - 26\right) &: (z-2) = \mathbf{1}z^2 - \mathbf{4}z + \mathbf{13}, \text{ d.h.} \\ z^3 - 6z^2 + 21z - 26 &= (z-2)\left(z^2 - 4z + 13\right) = 0. \end{aligned}$$

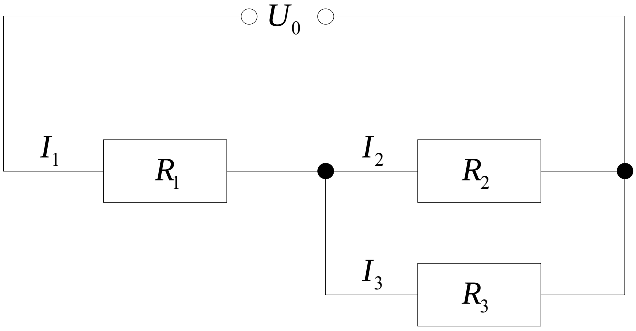
Dementsprechend ist nun nur noch die Polynomgleichung $z^2 - 4z + 13 = 0$ *zu lösen. Es ergeben sich die Lösungen*

$$z_{2/3} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i.$$

2 Matrizen

2.1 Definition

Wir betrachten die Schaltung:



Aus den Kirchhoffschen Gesetzen folgt das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccc} I_1 & - & I_2 & - & I_3 & = & 0 \\ R_1 I_1 & + & R_2 I_2 & & & = & U_0 \\ & & R_2 I_2 & - & R_3 I_3 & = & 0 \end{array}$$

Die wesentliche Information zur Berechnung der Stromstärken ist im folgenden Tableau enthalten:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & 0 & U_0 \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 \end{array}$$

Definition 2.1 *Eine rechteckige Anordnung von $m \cdot n$ Elementen a_{ij} in m Zeilen und n Spalten heißt **Matrix** vom Typ (m, n).*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bezeichnungen: für Matrizen: lateinische Großbuchstaben: A, B,...
für Elemente von Matrizen: lateinische Kleinbuchstaben: a_{ij},
wobei i der Zeilenindex und j der Spaltenindex ist
$Typ(A) = (m, n)$

Definition 2.2 ***Hauptdiagonale*** $= \{ \ a_{ij} \quad | \quad i = j \ \}$

2.2 Spezielle Matrizen

Zeilenvektor: Matrix vom Typ $(1, n) : A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \end{pmatrix}$

Beispiel 2.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Spaltenvektor: Matrix vom Typ $(m, 1) : A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$

Beispiel 2.2 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \underline{a}$

Spaltenvektoren werden i. Allg. noch speziell gekennzeichnet: hier durch Kleinbuchstaben mit Unterstreichung.

Obere (rechte) Dreiecksmatrix: $a_{ij} = 0$ für $i > j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{bzw. } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{nn} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

bei $m < n$ bei $m > n$

Untere (linke) Dreiecksmatrix: $a_{ij} = 0$ für $i < j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw. } A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

bei $m < n$ bei $m > n$

Quadratische Matrizen: $m = n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit den Spezialfällen:}$$

Diagonalmatrix und **Einheitsmatrix.**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Blockmatrizen:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{m1} & \cdots & B_{mn} \end{pmatrix}; \qquad B_{ij} \text{ sind selbst Matrizen.}$$

2.3 Operationen mit Matrizen

Die **transponierte Matrix** A^T entsteht durch Vertauschen der Zeilen und Spalten.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (A^T)^T = A$$

Beispiel 2.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

Beispiel 2.4 $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Die **konjugierte Matrix** $\overline{A}$ enthält die jeweiligen konjugiert komplexen Elemente.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \cdots & \overline{a}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a}_{m1} & \cdots & \overline{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

Für die **adjungierte Matrix** A^* gilt: $A^* = \overline{A}^T$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \cdots & \overline{a}_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a}_{1n} & \cdots & \overline{a}_{mn} \end{pmatrix} \qquad (A^*)^* = A$$

Beispiel 2.5 $A = \begin{pmatrix} 2+4i & 7-6i \\ 3-2i & 10+4i \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2-4i & 3+2i \\ 7+6i & 10-4i \end{pmatrix}$

Definition 2.3 *Es sei* $A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{m\ \ n}, \quad B = (b_{ij})_{i=1,j=1}^{m\ \ n}, \quad a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}.$

1. ***Gleichheit von Matrizen:***

   $A = B \quad \Leftrightarrow \quad Typ(A) = Typ(B) \quad \wedge \quad a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, ...m; \quad j = 1, ...n$

2. ***Summe von Matrizen:***

   Es sei $Typ(A) = Typ(B)$. $\qquad A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$

3. ***Produkt Zahl · Matrix:***

   $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{C}.$

Bemerkung 2.1

1. $-A = (-1) \cdot A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$

2. $A - B = A + (-B)$

3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T \quad \lambda \in \mathbb{C}$
   $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^* \quad \lambda \in \mathbb{C}$

4. $(A + B)^T = A^T + B^T$
   $(A + B)^* = A^* + B^*$

5. $\exists$ ***Nullmatrix:*** $\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad Typ(\mathbf{O}) = (m, n)$
   $\Longrightarrow \quad A + \mathbf{O} = A$ *für beliebige Matrizen* A

6. *Aus* $\lambda A = \mathbf{O} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0 \quad \vee A = \mathbf{O}$

Es gelten folgende **Rechengesetze:**
Es sei: $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad C = (c_{ij}), \quad Typ(A) = Typ(B) = Typ(C)$

1. $\alpha(\beta A) = \beta(\alpha A) = (\alpha \cdot \beta)A$
2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
4. $0 \cdot A = \mathbf{O}, \quad \alpha \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O}$
5. $A + B = B + A$
6. $A + (B + C) = (A + B) + C$

Beispiel 2.6 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$

$A + B, B + C$: *nicht definiert aufgrund unterschiedlichen Typs*

$A + C = \begin{pmatrix} 1+2 & 0+1 \\ 2-1 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$5B = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 & 5 \cdot 1 \\ 5 \cdot 2 & 5 \cdot 4 \\ 5 \cdot (-1) & 5 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 10 & 20 \\ -5 & 25 \end{pmatrix}$$

Matrizengleichung für X : $\quad A + \frac{1}{2}X = C \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}X = C - A$

$$X = 2(C - A) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2-1 & 1-0 \\ -1-2 & 4-1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

Definition 2.4 ***Produkt von Matrizen***

Es sei $A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad Typ(A) = (m, n), \quad Typ(B) = (n, p).$

$C = (c_{ij}) = A \cdot B$ *ist eine Matrix vom Typ* (m, p) *mit den Elementen*

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + ... + a_{in} b_{nk} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rk}.$$

Bemerkung 2.2
$$\begin{array}{ccccccccc} A(& m & , & n &) \cdot B(& n & , & p &) \\ & \searrow & & |\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_| & & \swarrow & \\ & & \searrow & & & & \swarrow & & \\ & C(& m & & , & & p &) & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... \,Zeile\ i & a_{in} \\ & & & \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix} \begin{array}{c} Spalte\ k \\ \begin{pmatrix} \vdots & b_{1k} & \vdots \\ \vdots & b_{2k} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{nk} & \vdots \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} & \vdots & & \\ ... & c_{ik} & ... & ... \\ & \vdots & & \\ & \vdots & & \end{pmatrix}$$

$$A \qquad \cdot \qquad B \qquad = \qquad C$$

Beispiel 2.7 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$

$$\begin{array}{lll} & Typ(A) = (2,3), & Typ(B) = (3,2) \\ \Longrightarrow & Typ(A \cdot B) = (2,2), & Typ(B \cdot A) = (3,3) \end{array}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 19 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 3 & 0 & -5 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix} \qquad \textit{Falksches Schema}: \begin{pmatrix} B \cdot A & & | & 1 & 2 & 3 \\ & & | & 2 & 1 & -1 \\ -- & -- & | & -- & -- & -- \\ 4 & 0 & | & 4 & 8 & 12 \\ -1 & 2 & | & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & | & 10 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Produktes:

1. $A \cdot B \neq B \cdot A$ im Allgemeinen
   - $Typ(A) = (m, n); Typ(B) = (n, p) \Longrightarrow AB$ ist definiert, $Typ(AB) = (m, p)$
   - falls $m = p \Longrightarrow$ auch BA ist definiert,
     $Typ(AB) = (m, m), Typ(BA) = (n, n)$
   - falls $m = p = n \Longrightarrow Typ(AB) = Typ(BA) = (n, n)$,
     AB und BA sind vergleichbar, aber $AB = BA$ muss trotzdem nicht gelten
2. $(AB)C = A(BC)$ für $Typ(A) = (m, n); Typ(B) = (n, l)$; $Typ(C) = (l, k)$
3. $A(B + C) = AB + AC$ für $Typ(A) = (m, n); Typ(B) = Typ(C) = (n, l)$
   $(A + B)C = AC + BC$ für $Typ(A) = Typ(B) = (m, n)$; $Typ(C) = (n, l)$
4. $A\mathbf{O} = \mathbf{O}; \mathbf{O}A = \mathbf{O}$; mit verschiedenen Nullmatrizen!

   Bemerkung 2.3 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
   d.h. $AB = \mathbf{O}$, *wobei gilt* $A \neq \mathbf{O}$ *und* $B \neq \mathbf{O}$; A *und* B *heißen Nullteiler.*
5. $(AB)^T = B^T A^T$
   $(AB)^* = B^* A^*$
6. $EA = AE = A$ für alle Matrizen A und E in der dazu passenden Größe

2.4 Quadratische Matrizen

Betrachten $A = (a_{ij})$; $\quad Typ(A) = (n, n)$

Definition 2.5 *A heißt symmetrisch* $\Longleftrightarrow \quad A^T = A$

Definition 2.6 *A heißt hermitesch* $\Longleftrightarrow \quad A^* = A$

Definition 2.7 *Eine Matrix B vom Typ (n, n) heißt inverse Matrix zu A, wenn gilt:*

$$BA = AB = E.$$

Bezeichnung: $B = A^{-1}$: *inverse Matrix*

Eigenschaften der inversen Matrix:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5. $E^{-1} = E^T = E$

Definition 2.8 *Existiert zur Matrix A die inverse A^{-1} , so heißt A regulär, anderenfalls singulär.*

Beispiel 2.8 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *Gesucht:* $A^{-1} = \begin{pmatrix} u & v \\ x & z \end{pmatrix}$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ x & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u+x & 2v+z \\ 3x & 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} 2u + x &=& 1 \\ 3x &=& 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2v + z &=& 0 \\ 3z &=& 1 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad x = 0; \quad u = 0.5 \qquad z = \tfrac{1}{3}; \quad v = -\tfrac{1}{6}$$

$$\Longrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Etwas allgemeiner gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Herleitung: Hausaufgabe (mindestens durch Ausrechnen nachprüfen)

Bemerkung 2.4 *Mit A^{-1} können Matrizengleichungen gelöst werden, in denen die gesuchte Matrix X multiplikativ mit anderen Matrizen verknüpft ist.*

Z.B.: $AX = B \quad \Longrightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Longrightarrow \quad X = A^{-1}B$

D.h. die Inversion entspricht der Umkehrung der Matrixmultiplikation.

Bemerkung 2.5 *Offene Probleme:*

- *Für welche A existiert A^{-1}?*
- *Berechnung von A^{-1}*

2.5 Vektoren

2.5.1 Vektoren im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$

Vektoren im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ sind, wie im Kapitel Spezielle Matrizen dargestellt, vom mathematischen Standpunkt aus Zeilenvektoren oder Spaltenvektoren mit jeweils 3 Komponenten.
Symbole: $\overrightarrow{x}$, $\underline{x}$ oder $\mathbf{x}$. (Um die Vektoren im $\mathbb{R}^3$ besonders hervorzuheben, wird im Folgenden meist $\overrightarrow{x}$ verwendet.)

Beispiel 2.9 *D.h. ein* ***Zeilenvektor*** *im* $\mathbb{R}^3$ *ist eine Matrix vom Typ* $(1, 3)$:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2.10 *Ein* ***Spaltenvektor*** *im* $\mathbb{R}^3$ *ist eine Matrix vom Typ* $(3, 1)$ *:*

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 92 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Damit gelten für Vektoren im Prinzip die gleichen Rechenregeln wie für Matrizen.

Beispiel 2.11 *Summe/Differenz und skalare Multiplikation werden komponentenweise ausgeführt:* $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

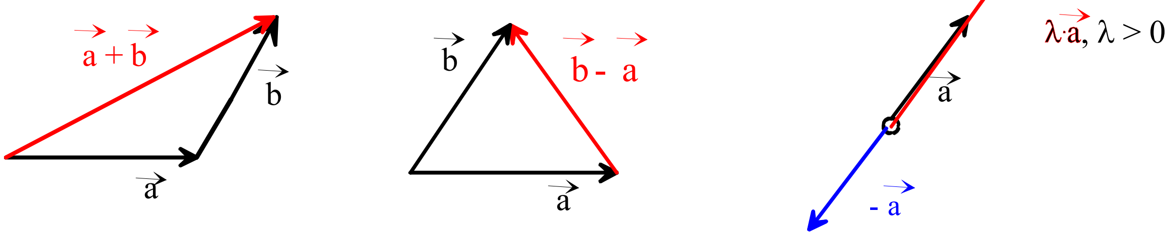
$$\Longrightarrow \qquad \overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Bemerkung 2.6 *Vektoren im* $\mathbb{R}^3$ *können geometrisch als gerichtete Strecken interpretiert werden. Man unterscheidet:*

Definition 2.9 ***<u>freie Vektoren:</u>***
Klasse parallel zu sich selbst verschiebbarer gerichteter Strecken

Definition 2.10 ***<u>Ortsvektoren</u>*** $\underline{\overrightarrow{\mathbf{0P}}}$***:***
vom Nullpunkt $\overrightarrow{0}$ *ausgehender Vektor zum Punkt P*
(= Repräsentant der entsprechenden Klasse freier Vektoren).

Beispiel 2.12
Geometrische Interpretation von Summe/Differenz und skalarer Multiplikation:
a) Summe *b) Differenz* *c) skalare Multiplikation*



Addition	$\Longrightarrow$	*Aneinandersetzen gerichteter Strecken*
skalare Multiplikation	$\Longrightarrow$	*Streckung auf das λ-fache, $\lambda < 0$ $\curvearrowright$ Richtungumkehr*

Bemerkung 2.7 *In der technischen Interpretation versteht man unter einem Vektor eine Größe, die durch die Angabe von Maßzahl und Richtung vollständig beschrieben ist.*

Definition 2.11 Norm (Betrag) eines Vektors $\vec{x}$
Unter der Norm eines Vektors versteht man die Maßzahl seiner Länge. Sie wird durch das Symbol $\|\vec{x}\|$ gekennzeichnet (manchmal auch mit $|\vec{x}|$).

Beispiel 2.13 *Im $\mathbb{R}^3$ benutzt man häufig die Euklidische Norm einer Vektors, auch Länge des Vektors genannt:*

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{(\vec{a})^T\,\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Definition 2.12 Einheitsvektor

Der Vektor $\vec{e_a} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ heißt Einheitsvektor oder Einsvektor in Richtung $\vec{a}$.

Bemerkung 2.8 *Die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen des kartesischen $x-y-z-$Koordinatensystems bezeichnet man oft mit*

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 2.9 *Fasst man diese drei Vektoren in der angegebenen Reihenfolge in einer Matrix zusammen, so entsteht die dreireihige Einheitsmatrix*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 2.10 *Ist $P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Punkt, so lautet sein Ortsvektor*

$$\overrightarrow{\mathbf{0P}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Folglich besteht eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten des $\mathbb{R}^3$ und den Ortsvektoren.

Bemerkung 2.11 *Ist $\overrightarrow{AB}$ ein beliebiger Vektor, der vom Punkt A zum Punkt B zeigt, so gilt*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\mathbf{0B}} - \overrightarrow{\mathbf{0A}} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}.$$

Definition 2.13 ***Skalarprodukt***
Unter dem Skalarprodukt zweier Vektoren versteht man den Ausdruck

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \left(\overrightarrow{a}\right)^T \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \in \mathbb{R}.$$

Folgerung 2.1 *Damit gilt für die Norm des Vektors:* $\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}}$.

Beispiel 2.14 $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 5 \cdot 2 + 3 \cdot (-7) + (-4) \cdot (-6) = 13$$

<u>Eigenschaften des Skalarproduktes:</u> Mit $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{array}{lccccc}
i) & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} & = & \|\overrightarrow{a}\|^2 & \geq & 0 \\
ii) & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} & = & 0 & \Leftrightarrow & \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} \\
iii) & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} & = & \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} & & \\
iv) & (\lambda \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} & = & \overrightarrow{a} \cdot \left(\lambda \overrightarrow{b}\right) & = & \lambda \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right) \\
v) & \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \cdot \overrightarrow{c} & = & \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} & + & \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}
\end{array}$$

(Nachweis: ausrechnen)

Folgerung 2.2 *Mit Hilfe der vektoriellen Schreibweise des aus der Trigonometrie bekannten Cosinussatzes*

$$\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2 - 2\,\|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\|\cos(\measuredangle(\vec{a},\vec{b}))$$

und der Verwendung der Skalarproduktschreibweise der Norm

$$\begin{aligned}\left\|\vec{a}-\vec{b}\right\|^2 &= \left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\\ &= \vec{a}\cdot\vec{a} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b}\\ &= \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \left\|\vec{b}\right\|^2\end{aligned}$$

ergibt sich eine zweite Berechnungsformel für das Skalarprodukt:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\|\cos(\measuredangle(\vec{a},\vec{b})).$$

Folgerung 2.3 *Stellt man die obige Formel um, so erhält man zur Berechnung des Winkels zwischen den beiden Vektoren:*

$$\cos(\measuredangle(\vec{a},\vec{b})) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\|}.$$

Beispiel 2.15 ***Mechanische Arbeit****,*
die verrichtet wird, wenn die Kraft $\vec{F}$ entlang des Weges $\vec{s}$ wirkt:

$$W = \vec{F}\cdot\vec{s} = \left\|\vec{F}\right\|\|\vec{s}\|\cos(\measuredangle(\vec{F},\vec{s})).$$

Beispiel 2.16 ***Winkel zwischen den beiden Vektoren*** *aus dem obigen Beispiel:*

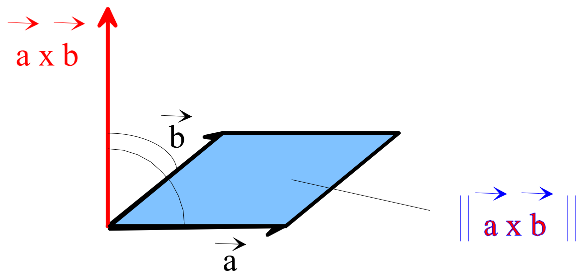
$$\begin{aligned}\cos(\measuredangle(\vec{a},\vec{b})) &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\left\|\vec{b}\right\|} = \frac{13}{\sqrt{50}\sqrt{89}} = 0.1948\\ \measuredangle(\vec{a},\vec{b}) &= \alpha \simeq 78.76^o\end{aligned}$$

Folgerung 2.4 *Gilt $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, dann stehen wegen $\cos\alpha = 0 \iff a = \pm 90^o$ die Vektoren senkrecht aufeinander, sie sind orthogonal. (Symbol: $\vec{a}\perp\vec{b}$)*

Neben dem Skalarprodukt gibt es noch zwei weitere Vektorprodukte, die im Rahmen der Vektorrechnung, insbesondere der analytischen Geometrie, Verwendung finden: das Kreuzprodukt und das Spatprodukt.

Definition 2.14 ***Kreuzprodukt***

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 & - & a_3b_2 \\ a_3b_1 & - & a_1b_3 \\ a_1b_2 & - & a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3$$



(Der Term $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ *heißt Determinante und wird im nächsten Kapitel genauer erläutert.)*

Beispiel 2.17 *Kreuzprodukt der Vektoren aus den obigen Beispielen:*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-6) & - & (-4)(-7) \\ (-4) \cdot 2 & - & 5 \cdot (-6) \\ 5 \cdot (-7) & - & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -46 \\ 22 \\ -41 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Kreuzproduktes:

1. Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf Vektor $\vec{a}$ und auf Vektor $\vec{b}$. $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

2. $\left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\| = \|\vec{a}\| \left\| \vec{b} \right\| \left| \sin(\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})) \right|$ ist die Maßzahl der Fläche des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

3. Ist $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, so sind die beiden Vektoren kollinear, d.h. sie liegen auf einer Geraden.

4. Die Reihenfolge der Faktoren hat Einfluss auf das Vorzeichen.
   Es gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Definition 2.15 ***Spatprodukt dreier Vektoren:***

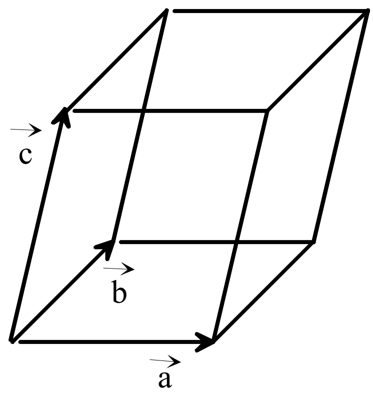
$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \in \mathbb{R}$$

Beispiel 2.18 *Spatprodukt* $\left[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]$ *von* $\overrightarrow{c} = (1,2,3)^T$ *mit* $\overrightarrow{a}$ *und* $\overrightarrow{b}$ *von oben:*

$$\left[\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \overrightarrow{c} \cdot \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -46 \\ 22 \\ -41 \end{pmatrix} = -46 + 44 - 123 = -125$$

Eigenschaften des Spatproduktes:

1. Sein Betrag $abs\left(\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right]\right) = abs\left(\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\right)$ ist die Maßzahl des Volumens desjenigen Spats, das durch die drei Vektoren aufgespannt wird:



2. Ist $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right] = \overrightarrow{0}$, so liegen die drei Vektoren in einer Ebene, sie sind komplanar.

Im folgenden Abschnitt werden die Eigenschaften der dreidimensionalen Vektoren auf n Dimensionen verallgemeinert. Damit ist es möglich, eine mathematische Struktur in die lineare Algebra einzuführen, die es uns gestattet, Manipulationen für die Steuerung von Kameras, Robotern, mechanischen Übergabeeinrichtungen u.ä. gut zu beschreiben.

2.5.2 Der n-dimensionale Vektorraum

Definition 2.16 *Die Menge aller $n-$Tupel* $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix}$*,..., für die Folgendes definiert ist, heißt* ***Vektorraum*** $\mathbb{R}^n$.

Die x_i, y_i, z_i, $i = 1, ..., n$ heißen ***Koordinaten (Komponenten)*** *der Vektoren:*

1. *Gleichheit:* $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} \Longleftrightarrow x_i = y_i, \forall i = 1, ...n$

2. *Summe:* $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \cdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

3. *Es existiert ein Nullvektor $\overrightarrow{0} \in \mathbb{R}^n$, so dass die Gleichung $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ die eindeutig bestimmte Lösung $\overrightarrow{x} = -\overrightarrow{a}$ (entgegengesetztes Element) besitzt.*

4. *Skalare Multiplikation:* $\lambda \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \cdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R};$ *insbesondere* $1\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$

5. *Für $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z} \in \mathbb{R}^n$, α, $\beta \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Gesetze:*

Kommutativgesetz der Addition	$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}$
Assoziativgesetz der Addition	$\overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z}$
Assoziativgesetz der skalaren Multiplikation	$(\alpha\beta)\overrightarrow{x} = \alpha(\beta\overrightarrow{x}) = \beta(\alpha\overrightarrow{x})$
Distributivgesetze	$\alpha(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \alpha\overrightarrow{x} + \alpha\overrightarrow{y}$ $(\alpha + \beta)\overrightarrow{x} = \alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{x}$.

Die Euklidische Norm kann auf den $\mathbb{R}^n$ erweitert werden:

$$\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$$

Für die Norm gelten allgemein folgende Axiome mit $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

Nichtnegativität	$\|\overrightarrow{x}\| \geq 0,$ $\|\overrightarrow{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$
Homogenität	$\|\alpha\overrightarrow{x}\| = \lvert\alpha\rvert\, \|\overrightarrow{x}\|$
Dreiecksungleichung	$\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leq \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$

Auch das Skalarprodukt kann auf den $\mathbb{R}^n$ so erweitert werden, dass die Beziehung $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}}$ zwischen Norm und Skalarprodukt erhalten bleibt:

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{x})^T \overrightarrow{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n \in \mathbb{R}.$$

Es gelten dann allgemein folgende Axiome mit $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z} \in \mathbb{R}^n$; α, $\beta \in \mathbb{R}$:

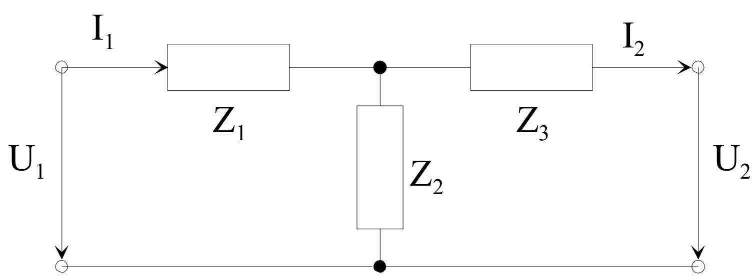
Nichtnegativität	$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) \geq 0$, $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$
Symmetrie	$(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \overline{(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})}$
Linearität in der 1. Komponente	$(\alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) = \alpha(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}) + \beta(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$

(Die bisherigen Verallgemeinerungen können auch für komplexwertige Vektoren aus $\mathbb{C}^n$ und skalare Größen aus $\mathbb{C}$ analog durchgeführt werden.)

2.6 Beispiele aus der Praxis

Beispiel 2.19 *Ein Vierpol ist ein elektrisches Netzwerk mit 4 Anschlüssen: 2 Eingängen und 2 Ausgängen:*

Wir betrachten folgendes Netzwerk:



Die Maschenstromanalyse ergibt:

$$
\begin{aligned}
0 &= -U_1 + (Z_1 + Z_2)I_1 - Z_2 I_2 \\
0 &= U_2 - Z_2 I_1 + (Z_2 + Z_3)I_2
\end{aligned}
$$

daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= (Z_1 + Z_2)I_1 \qquad - Z_2 I_2 \\
U_2 &= \qquad Z_2 I_1 - (Z_2 + Z_3) I_2
\end{aligned}
$$

Allgemein gilt mit der Widerstandsmatrix Z:

$$
U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = Z \cdot I
$$

2. Beschreibungsmöglichkeit: Angabe der Ausgangsgrößen in Abhängigkeit von den Eingangsgrößen durch Auflösen der 2. Gleichung nach I_1 und Einsetzen in die 1. Gleichung:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \frac{(Z_1 + Z_2)}{Z_2} U_2 + \left(\frac{(Z_1 + Z_2)(Z_2 + Z_3)}{Z_2} - Z_2 \right) I_2 \\
I_1 &= \frac{1}{Z_2} U_2 \qquad + \frac{(Z_2 + Z_3)}{Z_2} I_2
\end{aligned}
$$

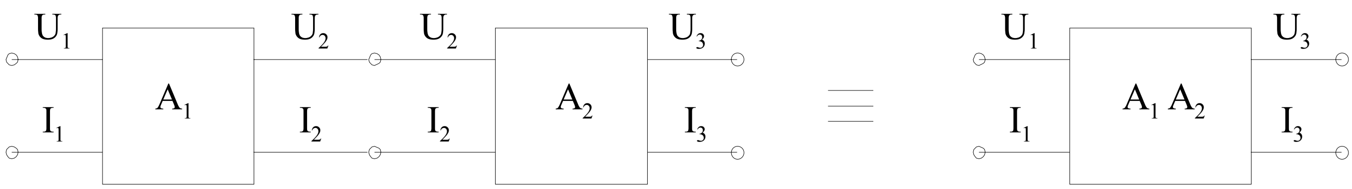
Allgemein gilt mit der Kettenmatrix A :

$$
\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix}
$$

Für eine Reihenschaltung von Vierpolen erhält man mit:

$$
\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} U_3 \\ I_3 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = A_1 A_2 \begin{pmatrix} U_3 \\ I_3 \end{pmatrix}
$$



D.h. die Reihenschaltung entspricht der Multiplikation der Kettenmatrizen.

Beispiel 2.20 *Eine Elektronik-GmbH stellt 3 Typen von Leiterplatten her. Diese sind entsprechend dem angegebenen Schema bestückt:*

	L_1	L_2	L_3
Kondensatoren	2	5	5
Widerstände	1	1	3
Transistoren	3	2	2

In der Endmontage werden die Leiterplatten in den folgenden Stückzahlen in Geräte G_1, G_2, G_3, und G_4 eingebaut:

	G_1	G_2	G_3	G_4
L_1	1	0	1	4
L_2	0	2	1	2
L_3	1	1	1	0

Man bestimme die Anzahl der Kondensatoren, Widerstände und Transistoren für einen Auftrag von 500 Geräten G_1, 100 Geräten G_2, 300 Geräten G_3 und 100 Geräten G_4.

Die Lösung erfolgt mit den Mitteln der Matrizenmultiplikation:

$$L = A(Bauteile, Leiterplatten) \cdot B(Leiterplatten, Geräte) \cdot C(Anzahl\ der\ Geräte)$$

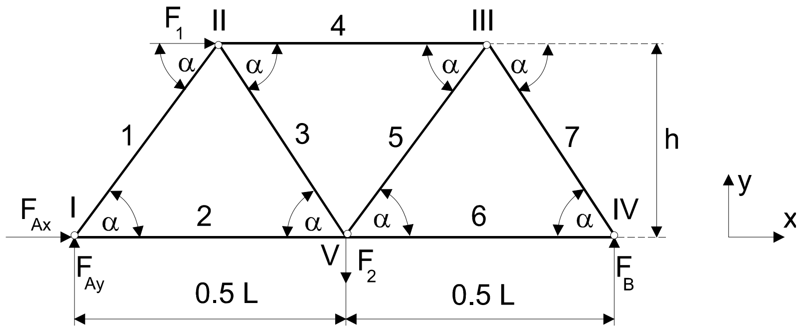
$$= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}$$

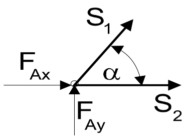
$$= \begin{pmatrix} 7 & 15 & 12 & 18 \\ 4 & 5 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ 100 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 35+15+36+18 \\ 20+5+15+6 \\ 25+6+21+16 \end{pmatrix} \cdot 100 = \begin{pmatrix} 10400 \\ 4600 \\ 6800 \end{pmatrix}$$

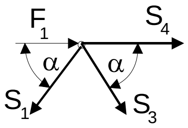
Beispiel 2.21 *Kraftberechnung in Fachwerken*

Zu berechnen sind die Auflagerkräfte F_{Ax}, F_{Ay}, F_B und die Stabkräfte S_1, . . . , S_7.

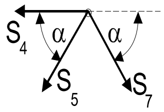




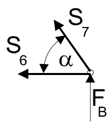
$$\mathbf{I}\quad \begin{cases} S_1\cos\alpha + S_2 + F_{Ax} = 0 & (1)\\ S_1\sin\alpha + F_{Ay} = 0 & (2)\end{cases}$$



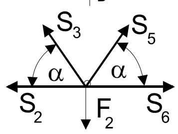
$$\mathbf{II}\quad \begin{cases} -S_1\cos\alpha + S_3\cos\alpha + S_4 + F_1 = 0 & (3)\\ -S_1\sin\alpha - S_3\sin\alpha = 0 \Rightarrow S_1 + S_3 = 0 & (4)\end{cases}$$



$$\mathbf{III}\quad \begin{cases} -S_4 - S_5\cos\alpha + S_7\cos\alpha = 0 & (5)\\ -S_5\sin\alpha - S_7\sin\alpha = 0 \Rightarrow S_5 + S_7 = 0 & (6)\end{cases}$$



$$\mathbf{IV}\quad \begin{cases} -S_6 - S_7\cos\alpha = 0 & (7)\\ S_7\sin\alpha + F_B = 0 & (8)\end{cases}$$



$$\mathbf{V}\quad \begin{cases} -S_2 - S_3\cos\alpha + S_5\cos\alpha + S_6 = 0 & (9)\\ S_3\sin\alpha + S_5\sin\alpha - F_2 = 0 & (10)\end{cases}$$

$$\curvearrowright \begin{pmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -\cos a & 0 & \cos\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\cos\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\cos\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -\cos\alpha & 0 & \cos\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sin\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1\\ S_2\\ S_3\\ S_4\\ S_5\\ S_6\\ S_7\\ F_{Ax}\\ F_{Ay}\\ F_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ -F_1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ F_2 \end{pmatrix}$$

3 Determinanten

3.1 Definition und Eigenschaften

Definition 3.1 *A sei eine (n, n) - Matrix. Als Determinante von A ($\det A$ oder $|A|$) bezeichnet man eine reelle Zahl, die sich als Funktion der Matrixelemente wie folgt berechnen lässt:*

1. *Für $n = 1$ gilt:* $\qquad A = (a), \quad \det A = a.$
2. *Für $n > 1$ gilt:*
   $\det A = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| - ... + (-1)^{1+n} a_{1n}|A_{1n}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}|A_{1j}|,$
   dabei ist $|A_{ij}|$ die Determinante der $(n-1, n-1)$-Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.
   Die vorzeichenbehaftete Unterdeterminante $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ heißt Adjunkte.

Beispiel 3.1 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad |A| = a\,|d| - b\,|c| = ad - bc$

Beispiel 3.2 $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$

$$detB = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = aei - ahf - bdi + bgf + cdh - cge$$
$$= aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Hinweis: Berechnung mit der Sarrusschen Regel:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & a & & b & & c & & a & & b & \\ & & \times & & \times & & \times & & \times & & \\ & d & & e & & f & & d & & e & \\ & & \times & & \times & & \times & & \times & & \\ & g & & h & & i & & g & & h & \\ - & & - & & - & & + & & + & & + \end{array}$$

Beispiel 3.3 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & k & b & c \\ d & l & e & f \\ g & m & h & i \end{pmatrix}, \qquad \det C = -\det B$

Beispiel 3.4 $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$,

$$\det D = d_1 \left| D_{11} \right| = d_1 \begin{vmatrix} d_2 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \begin{vmatrix} d_3 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 ... d_{n-1} \left| d_n \right|$$
$$= \prod_{i=1}^{n} d_i$$

Beispiel 3.5 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$, $\quad \det E = 1$

Beispiel 3.6 $F = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\quad \det F = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

Eigenschaften der Determinante

1. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = \det(B \cdot A)$, sofern beide Produkte existieren.
2. Falls A^{-1} existiert, gilt $\left| A^{-1} \right| = \left| A \right|^{-1}$.(Folgerung aus 1.)
3. Der Wert der Determinante ändert sich <u>nicht</u>, wenn man das $\lambda-$fache einer Zeile (elementweise) zu einer anderen Zeile addiert ($\lambda \in \mathbb{R}$),

   z.B. gilt: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.
4. Die Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man zwei Zeilen vertauscht,

   z.B. gilt: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.
5. Einen Faktor aus einer Zeile kann man vor die Determinante ziehen und umgekehrt einen Faktor vor der Determinante kann man in eine Zeile hineinmultiplizieren,

   z.B. gilt: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\qquad \left| \lambda A \right| = \lambda^n \left| A \right|$.

6. Der Wert einer Determinanten ist null, wenn
   - eine Zeile nur Nullen enthält
   - zwei Zeilen gleiche oder proportionale Elemente haben,

$$\text{z.B. gilt:} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 7 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2-2\cdot 1 & 4-2\cdot 2 & 6-2\cdot 3 \\ 7 & 7 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

7. Summationsregel für Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+d_1 & b_2+d_2 & b_3+d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

   die Summation erfolgt nur in einer Zeile !

8. $\det A = \det A^T$

   $\Longrightarrow$ Die Zeileneigenschaften von 3. bis 7. gelten analog auch für die Spalten.

   $\Longrightarrow$ Die Entwicklung entsprechend Definition ist auch nach den Spalten möglich.

Satz 3.1 *Entwicklungssatz:*
Nach 2. und 6. kann jede Zeile oder Spalte bei der Berechnung der Determinante die Funktion der ersten Zeile in der Definition übernehmen.

$$\Longrightarrow \quad |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \, |A_{kj}| : \qquad \textit{Entwicklung nach der k-ten Zeile}$$

$$\Longrightarrow \quad |A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \, |A_{ik}| : \qquad \textit{Entwicklung nach der k-ten Spalte}$$

Hinweis: Die Vorzeichen werden nach dem Prinzip des Schachbrettes vergeben, ausgehend von der linken oberen Ecke:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3.7 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{cc} \longleftarrow + & . \\ \uparrow & . \\ (\cdot 2)\uparrow & (\cdot 3)\downarrow \\ . & \leftarrow + \end{array} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 11 & 0 & 10 & 1 \end{vmatrix}$

$$= -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 11 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 165 + 180 - 66 - 250 - 9 = 25$$

3.2 Die Cramersche Regel

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$, das aus n Gleichungen mit n Unbekannten besteht:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \quad ... \quad + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x_1\underline{S}_1 + x_2\underline{S}_2 + \quad ... \quad + x_n\underline{S}_n = \underline{b}$$

<u>Berechnung von x_1 :</u> Offenbar gilt

$$\begin{aligned} &\det(\underline{b}\,|\,\underline{S}_2\ \ \underline{S}_3 \ldots \underline{S}_n) = \det(x_1\underline{S}_1 + x_2\underline{S}_2 + \quad ... \quad + x_n\underline{S}_n\,|\,\underline{S}_2\ \ \underline{S}_3 \ldots \underline{S}_n) \\ &= \det(x_1\underline{S}_1|\,\underline{S}_2\ \ \underline{S}_3 \ldots \underline{S}_n) + \det(x_2\underline{S}_2|\,\underline{S}_2\ \ \underline{S}_3 \ldots \underline{S}_n) + \ ... \ + \det(x_n\underline{S}_n|\,\underline{S}_2\ \ \underline{S}_3 \ldots \underline{S}_n) \\ &= \det(x_1\underline{S}_1|\,\underline{S}_2\ \ \underline{S}_3 \ldots \underline{S}_n) + 0 + \ ... \ + 0 \\ &= x_1 \det(\underline{S}_1|\,\underline{S}_2\ \ \underline{S}_3 \ldots \underline{S}_n) \\ &= x_1 \det A \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$x_1 = \frac{\det(\underline{b}\,|\,\underline{S}_2\ \ \underline{S}_3 \ldots \underline{S}_n)}{\det A} = \frac{\det A_1}{\det A}.$$

Analog können x_2, x_3, ... x_n berechnet werden, wobei im Zähler die Spalten $\underline{S}_2$, $\underline{S}_3$, ... $\underline{S}_n$ der Matrix A durch die rechte Seite zu ersetzen sind:

$$x_i = \frac{\det(\underline{S}_1\underline{S}_2 \dots \underline{S}_{i-1} \,|\, \underline{b} \,|\, \underline{S}_i \dots \underline{S}_n)}{\det A} = \frac{\det A_i}{\det A} \qquad i = 2, 3 \dots n.$$

Beispiel für die Cramersche Regel:

Das Gleichungssystem aus 2.1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

geht mit den Werten $R_1 = 200\Omega$, $\quad R_2 = 100\Omega$, $R_3 = 500\Omega$ und $U_0 = 220V$ über in

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 200\Omega & 100\Omega & 0 \\ 0 & 100\Omega & -500\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 220V \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Struktur $Ax = \underline{b}$. Die Determinante von A wird wie folgt berechnet:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 200\Omega & 100\Omega & 0 \\ 0 & 100\Omega & -500\Omega \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 200\Omega & 100\Omega \\ 0 & 100\Omega \end{matrix}$$

$$= -50000\Omega^2 - 20000\Omega^2 - 100000\Omega^2 = -170000\Omega^2 = -17 \cdot 10^4\Omega^2$$

Nach der Cramerschen Regel gilt:

$$I_1 = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 220V & 100\Omega & 0 \\ 0 & 100\Omega & -500\Omega \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-17 \cdot 10^4\Omega^2} \cdot (-220V) \cdot (500\Omega + 100\Omega) = \frac{13.2 \cdot 10^4 V\Omega}{17 \cdot 10^4\Omega^2} \simeq 0.776A$$

$$I_2 = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 200\Omega & 220V & 0 \\ 0 & 0 & -500\Omega \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-17 \cdot 10^4\Omega^2} \cdot (220V) \cdot (-500\Omega) = \frac{11 \cdot 10^4 V\Omega}{17 \cdot 10^4\Omega^2} \simeq 0.647A$$

$$I_3 = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 200\Omega & 100\Omega & 220V \\ 0 & 100\Omega & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{-17 \cdot 10^4 \Omega^2} \cdot (-220V) \cdot (100\Omega) = \frac{2.2 \cdot 10^4 V\Omega}{17 \cdot 10^4 \Omega^2} \simeq 0.129A$$

Bemerkung 3.1 *Für $n > 3$ ist die Cramersche Regel i. Allg. vom Rechenaufwand her nicht effektiv.*

Bemerkung 3.2 *Sie ist geeignet für Gleichungssysteme, in denen die gesuchten Größen Funktionen sind (s. Kapitel Differentialgleichungen).*

3.3 Berechnung der inversen Matrix

Das Problem der Bestimmung der inversen Matrix kann als Gleichungssystem mit mehreren Lösungsvektoren und mehreren rechten Seiten aufgefasst werden:

$$A \cdot A^{-1} = E \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a_{ij})(\widehat{a}_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow \qquad A\,(\widehat{\underline{A}}_1\,\widehat{\underline{A}}_2 \ldots \widehat{\underline{A}}_n) = (\underline{E}_1\,\underline{E}_2 \ldots \underline{E}_n)$$
$$\Longleftrightarrow \qquad A\widehat{\underline{A}}_1 = \underline{E}_1; \quad A\widehat{\underline{A}}_2 = \underline{E}_2; \quad \ldots \quad A\widehat{\underline{A}}_n = \underline{E}_n.$$

Die Berechnung der $\widehat{a}_{ij}$ erfolgt über die Cramersche Regel. Im Zähler wird die Spalte $\underline{E}_j$ an die Stelle der i-ten Spalte von A eingesetzt, da das i-te Element der Lösung des j-ten Gleichungssystems gesucht ist:

$$\widehat{a}_{ij} = \det(\underline{A}_1 \ldots \underline{A}_{i-1} |\ \underline{E}_j\,|\,\underline{A}_{i+1} \ldots\ \underline{A}_n)\ /\ \det A$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \det \begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad\text{Spalte i} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & \\ \underline{A}_1 & \cdots & \underline{A}_{i-1} & 0 & \underline{A}_{i+1} & \cdots & \underline{A}_n \\ & & & 1(\text{Zeile j}) & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{array}\right) \end{array} = (-1)^{i+j} \frac{|\underline{A}_{ji}|}{\det A}$$

Folgerung 3.1 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| \end{pmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Folgerung 3.2 $\exists A^{-1} \Longleftrightarrow \det A \neq 0$

3.4 Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Definition 3.2 ***Lineare Unabhängigkeit von Vektoren***
Die Vektoren $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n} \in \mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig, wenn aus

$$\begin{aligned} \alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{x_2} + ...\alpha_n\overrightarrow{x_n} &= \overrightarrow{0} \text{ mit } \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n \text{ folgt,} \\ \text{dass } \alpha_1 &= \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0 \text{ gilt.} \end{aligned}$$

Anderenfalls heißen sie linear abhängig.

Definition 3.3 ***Linearkombination***
Der Term

$$\alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{x_2} + ...\alpha_n\overrightarrow{x_n}$$

heißt Linearkombination der Vektoren $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n} \in \mathbb{R}^n$.

Satz 3.2 *n Vektoren des $\mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig, wenn die mit ihnen gebildete Determinante von Null verschieden ist, anderenfalls sind sie linear abhängig (o. B.).*

Beispiel 3.8 *Sind die Vektoren $\overrightarrow{a} = \binom{1}{2}$ und $\overrightarrow{b} = \binom{2}{3}$ linear abhängig?*

Schreibt man die Gleichung $\alpha_1\overrightarrow{a} + \alpha_2\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ komponenetenweise auf, so entsteht das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & = & 0 \\ 2\alpha_1 & + & 3\alpha_2 & = & 0 \end{array}$$

Subtrahiert man das Doppelte der 1. Gleichung von der 2. Gleichung, so ergibt sich

$$\alpha_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha_1 = 0.$$

Damit sind $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ linear unabhängig. Weiterhin gilt:

$$\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0.$$

Auch daraus kann man auf die Unabhängigkeit von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$ schließen.

Satz 3.3 *Die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren im $\mathbb{R}^n$ ist gleich n.*

Definition 3.4 ***Dimension/Basis eines Raumes***
Die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren eines Raumes heißt Dimension des Raumes. Ist n die Dimension eines Raumes, so bilden n linear unabhängige Vektoren eine Basis.

Beispiel 3.9 *Die Einheitsvektoren* $\overrightarrow{e_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \longleftarrow$ *Zeile i $(i = 1, 2, ..., n)$*

bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$, da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det E = 1 \neq 0 \textit{ gilt.}$$

Beispiel 3.10 *Die drei Vektoren* $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -14 \\ -12 \end{pmatrix}$

bilden keine Basis im $\mathbb{R}^3$, da

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & -7 & -14 \\ -4 & -6 & -12 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & -7 & 0 \\ -4 & -6 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Satz 3.4 *Sei $\{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}\}$ eine Basis im $\mathbb{R}^n$. Dann lässt sich jeder Vektor auf eindeutige Weise als Linearkombination von $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2}, ..., \overrightarrow{x_n}$ darstellen:*

$$\overrightarrow{a} = \alpha_1 \overrightarrow{x_1} + \alpha_2 \overrightarrow{x_2} + ... \alpha_n \overrightarrow{x_n} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overrightarrow{x_k}.$$

Bemerkung 3.3 *Stehen die Basisvektoren senkrecht aufeinander, so spricht man von einer Orthogonalbasis. Haben die Vektoren überdies die Länge 1, so handelt es sich um eine Orthonormalbasis. Jede Basis kann man mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens in eine Orthonormalbasis umwandeln.*

4 Lineare Gleichungssysteme

4.1 Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

Wir betrachten Gleichungssysteme der Art:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
& \quad \dots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n &= b_k
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Beispiel 4.1 *s. Beispiel aus Kapitel 3.2.*

Beispiel 4.2

$$\begin{aligned}
4u + 0v - 5w + 0z &= 3 \\
2u + 0v + 0w + 1z &= -1 \\
0u + 2v - 1w + 0z &= 1
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dabei gelten folgende Bezeichnungen:

A: Koeffizientenmatrix (Systemmatrix), $\underline{x}$: Vektor der Unbekannten
$\underline{b}$: rechte Seite
$\underline{b} = \underline{0}$: homogenes Gleichungssystem, $\underline{b} \neq 0$: inhomogenes Gleichungssystem
$(A|\underline{b})$: erweiterte Koeffizientenmatrix (erweiterte Systemmatrix)
n: Anzahl der Unbekannten

In der erweiterten Systemmatrix steckt die gesamte Information des linearen Gleichungssystems.

Satz 4.1 *Die Lösung eines linearen Gleichungssystems ändert sich nicht, wenn in der erweiterten Koeffizientenmatrix die nachfolgenden Zeilenumformungen ausgeführt werden:*

- *Vertauschen zweier Zeilen*
- *Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$
- *Addition zweier Zeilen.*

Anwendung: $(A|\underline{b})$ wird mit Hilfe dieser Operationen so umgeformt, dass an der Stelle von A eine obere Dreiecksmatrix mit der folgenden Struktur entsteht:

$$\begin{pmatrix}
1 & \widetilde{a}_{12} & \cdots & \widetilde{a}_{1r} & \widetilde{a}_{1,r+1} & \cdots & \widetilde{a}_{1n} & | & \widetilde{b}_1 \\
0 & 1 & \cdots & \widetilde{a}_{2r} & \widetilde{a}_{2,r+1} & \cdots & \widetilde{a}_{2n} & | & \widetilde{b}_2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & \widetilde{a}_{r,r+1} & \cdots & \widetilde{a}_{rn} & | & \widetilde{b}_r \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & & 0 & | & \widetilde{b}_{r+1} \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0
\end{pmatrix}$$

Definition 4.1 *Die Anzahl der nichtverschwindenden Zeilen in einer gemäß Satz 1 umgeformten Matrix heißt* ***Rang der Matrix.***

Folgerung 4.1 $Rang(A) = r$

Folgerung 4.2 $Rang(A|\underline{b}) = \begin{cases} r & bei \quad \widetilde{b}_{r+1} = 0 \\ r+1 & bei \quad \widetilde{b}_{r+1} \neq 0 \end{cases}$

<u>**Lösbarkeit des Gleichungssystems**</u>:

Fall 1: $\widetilde{b}_{r+1} \neq 0 \implies r = rang(A) < rang(A|\underline{b}) = r+1$

Betrachten Zeile $r+1$ des umgeformten Gleichungssystems:

$0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = \widetilde{b}_{r+1} \neq 0 \qquad Widerspruch!$

$\Longrightarrow$ Das lineare Gleichungssystem ist **unlösbar**.

Fall 2: $\widetilde{b}_{r+1} = 0 \implies r = rang(A) = rang(A|\underline{b}) = r$

Das lineare Gleichungssystem ist **lösbar**.

Die Lösung erfolgt mittels der umgeformten erweiterten Systemmatrix.

4.2 Der Gauß'sche Algorithmus

Problem: Wie kann die vereinfachte Form (*) der erweiterten Systemmatrix $(A|\underline{b})$ auf systematische Weise (im Rechner) erzeugt werden?

Forderungen:

- **Allgemeinheit** für eine bestimmte Aufgabenklasse
- **Determiniertheit:** Schritte und Reihenfolge sind eindeutig bestimmt
- **Endlichkeit:** nach einer bestimmten, endlichen Zahl von Schritten ist Schluss

Der **Gauß'sche Algorithmus** besteht aus folgenden Schritten:

1. Betrachte die gesamte Matrix $(A|\underline{b})$ als Arbeitsblock.

	Allgemeine Rechnung				
	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\underline{b}$
	$\widehat{a}_{11}$	$\widehat{a}_{12}$	$\cdots$	$\widehat{a}_{1n}$	$\widehat{b}_1$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	$\widehat{a}_{k1}$	$\widehat{a}_{k2}$	$\cdots$	$\widehat{a}_{kn}$	$\widehat{b}_k$

	Beispiel			
	x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
	0	3	6	3
	2	4	6	2
	−4	−8	−12	12

2. Tausche im Arbeitsblock die Zeilen so, dass das linke obere Eckelement (Pivotelement) von Null verschieden ist. Sollte das unmöglich sein, versuche es mit den Spalten von A und merke die neue Reihenfolge der Variablen. Wird kein von Null verschiedenes Pivotelement gefunden $\Longrightarrow$ Stopp.

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\underline{b}$
	$a_{11} \neq 0$	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	a_{k1}	a_{k2}	$\cdots$	a_{kn}	b_k

	x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
	2	4	6	2
	0	3	6	3
	−4	−8	−12	12

3. Teile die Elemente der 1. Zeile des Arbeitsblockes durch das Pivotelement.

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\underline{b}$
	1	$\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$\cdots$	$\frac{a_{1n}}{a_{11}}$	$\frac{b_1}{a_{11}}$
a_{21}	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
a_{k1}	a_{k1}	a_{k2}	$\cdots$	a_{kn}	b_k

	x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
	1	2	3	1
0	0	3	6	3
−4	−4	−8	−12	12

4. Multipliziere die 1. Zeile des Arbeitsblockes jeweils mit den ersten Elementen der anderen Zeilen des Arbeitsblockes und subtrahiere sie von diesen anderen Zeilen.

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\underline{b}$
	1	$\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$\cdots$	$\frac{a_{1n}}{a_{11}}$	$\frac{b_1}{a_{11}}$
	0	$\widetilde{a}_{22}$		$\widetilde{a}_{2n}$	$\widetilde{b}_2$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	0	$\widetilde{a}_{k2}$	$\cdots$	$\widetilde{a}_{kn}$	$\widetilde{b}_k$

	x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
	1	2	3	1
	0	3	6	3
	0	0	0	16

5. Verkleinere den Arbeitsblock um je eine Zeile und Spalte von oben bzw. von links.

6. Wiederhole die Vorschrift ab Punkt 2 bis die gesamte Matrix abgearbeitet oder ein Abbruch bei Punkt 2 eingetreten ist.

	x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
	1	2	3	1
	0	1	2	1
0	0	0	0	16

Allgemeiner Formelsatz im 1. Schritt:

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_{ij} &= a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot a_{1j} \qquad &&für\ i = 2, ...k \\ \widetilde{b}_i &= b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot b_1 \qquad &&und\ j = 2, ...n \end{aligned}$$

D.h., die Nullen werden nicht berechnet.

Rangbestimmung für das obige Beispiel: $Rang A = 2 < Rang(A|b) = 3$
$\Longrightarrow$ Das Gleichungssystem ist unlösbar.

Beispiel 4.3

	x_1	x_2	$\underline{b}$
	1	2	0
-1	-1	3	4
	1	2	0
	0	5	4
	1	2	0
	0	1	$\frac{4}{5}$

$Rang A = 2 = Rang(A|\underline{b}) \Longrightarrow$ *Das Gleichungssystem ist lösbar.*

Beispiel 4.4

	x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
	0	3	0	-3
	2	-2	2	0
	4	-4	4	0
	1	-1	1	0
0	0	3	0	-3
4	4	-4	4	0
	1	-1	1	0
	0	1	0	-1
	0	0	0	0

$Rang A = 2 = Rang(A|\underline{b}) \Longrightarrow$ *Das Gleichungssystem ist lösbar.*

4.3 Lösung des Gleichungssystems

Die Lösung des Gleichungssystems ist nur sinnvoll für den Fall, dass gilt

$$Rang A = Rang(A|\underline{b}) = r.$$

Fall 2a: $r = n$
Das Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ hat dann folgende Struktur:

$$\begin{pmatrix} 1 & \widetilde{a}_{12} & \cdots & \cdots & \widetilde{a}_{1n} \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \widetilde{a}_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \widetilde{b}_{n-1} \\ \widetilde{b}_n \end{pmatrix}.$$

Es kann von unten nach oben eindeutig gelöst werden:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_n &= \widetilde{b}_n \\ 1 \cdot x_{n-1} + \widetilde{a}_{n-1,n} \cdot x_n &= \widetilde{b}_{n-1} \\ x_{n-1} &= \widetilde{b}_{n-1} - \widetilde{a}_{n-1,n} \cdot x_n \qquad usw. \end{aligned}$$

Dieser Prozess heißt Rückwärtseinsetzen. Er ist rechentechnisch wesentlich weniger aufwendig als der Gaußalgorithmus.

Zu Beispiel 4.3:
$x_2 = \frac{4}{5}; \qquad x_1 + 2x_2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = -2x_2 = -\frac{8}{5}$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Fall 2b: $r < n$
Das Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ hat nach dem Gauß-Algorithmus dann folgende Struktur:

$$\begin{pmatrix} 1 & \widetilde{a}_{12} & \cdots & \widetilde{a}_{1r} & \widetilde{a}_{1,r+1} & \cdots & \widetilde{a}_{1n} \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \widetilde{a}_{r-1,r} & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \widetilde{a}_{r,r+1} & \cdots & \widetilde{a}_{r,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \widetilde{b}_r \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \widetilde{a}_{12} & \cdots & \widetilde{a}_{1r} \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \widetilde{a}_{r-1,r} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \widetilde{b}_r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{1,r+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \widetilde{a}_{r,r+1} \end{pmatrix} x_{r+1} - \ldots - \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{1n} \\ \vdots \\ \vdots \\ \widetilde{a}_{r,n} \end{pmatrix} x_n$$

$$D \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \underline{\widetilde{b}} - x_{r+1}\underline{\widetilde{S}}_{r+1} - \ldots - x_n\underline{\widetilde{S}}_n,$$

wobei $\underline{\widetilde{S}}_{r+1}, \ldots, \underline{\widetilde{S}}_n$ die umgeformten Spalten von A sind. Offenbar gibt es bei beliebiger Wahl von $x_{r+1}, \ldots, x_n$ eine Lösung. $x_{r+1}, \ldots, x_n$ sind freie Parameter der Lösung.

$\Longrightarrow x_{r+1} = t_1 \in \mathbb{R} \qquad \ldots \qquad x_n = t_{n-r} \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ Die Lösung enthält $n - r$ freie Parameter. Sie ist nicht eindeutig bestimmt und wird wie im Fall 2a durch Rückwärtseinsetzen berechnet.

Zu Beispiel 4.4:

$n = 3; \qquad r = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad n - r = 1$ Parameter ist nötig: $x_3 = t \in \mathbb{R}$

$x_2 = -1; \qquad x_1 - x_2 + x_3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_2 - x_3 = -1 - t$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.5 *Für Fall 1:*

$2 = Rang A \neq Rang(A|\underline{b}) = 3 \qquad \Longrightarrow$ *Das Gleichungssystem ist nicht lösbar:*

	x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
	1	1	1	3
-7	-7	7	7	-7
0	0	1	1	4
	1	1	1	3
	0	14	14	14
	0	1	1	4
0	1	1	1	3
0	0	1	1	1
1	0	1	1	4
	1	1	1	3
	0	1	1	1
	0	0	0	3

Beispiel 4.6 *Für Fall 2a:*

	x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
	2	4	2	4
	3	0	-3	-6
	-1	-1	2	6
	1	2	1	2
1	1	0	-1	-2
-1	-1	-1	2	6
	1	2	1	2
	0	-2	-2	-4
	0	1	3	8
	1	2	1	2
	0	1	1	2
1	0	1	3	8
	1	2	1	2
	0	1	1	2
	0	0	2	6

$3 = Rang A = Rang(A|\underline{b}) = 3 \quad \Longrightarrow$ *Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar:*

$2x_3 = 6 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = 3$
$x_2 + x_3 = 2 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 2 - x_3 = -1$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 2 - 2x_2 - x_3 = 2 - 2(-1) - 3 = 1$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.7 *Für Fall 2b:*

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\underline{b}$
	4	0	−8	0	4
	2	0	0	2	−2
	0	2	−2	0	2
	1	0	−2	0	1
1	1	0	0	1	−1
0	0	1	−1	0	1
	1	0	−2	0	1
	0	0	2	1	−2
	0	1	−1	0	1
	1	0	−2	0	1
	0	1	−1	0	1
	0	0	2	1	−2
	1	0	−2	0	1
	0	1	−1	0	1
	0	0	1	$\frac{1}{2}$	−1

$3 = Rang A = r = Rang(A|\underline{b}) = 3 < n = 4 \Longrightarrow n - r = 1$
Das Gleichungssystem ist mit einem Parameter lösbar: Setze $x_4 = t \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{array}{lcl}
x_3 + \frac{t}{2} = -1 & \Longrightarrow & x_3 = -1 - \frac{t}{2} \\
x_2 - x_3 = 1 & \Longrightarrow & x_2 = 1 + x_3 = 1 - 1 - \frac{t}{2} = -\frac{t}{2} \\
x_1 - 2x_3 = 1 & \Longrightarrow & x_1 = 1 + 2x_3 = 1 + 2(-1 - \frac{t}{2}) = -1 - t
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Beispiel 4.8 *Aufgabe mit Parametern in der Systemmatrix:* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

	x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
	1	4	α	β
	2	-1	4	5
	1	1	1	1
	1	1	1	1
2	2	-1	4	5
1	1	4	α	β
	1	1	1	1
	0	-3	2	3
-1	0	3	$\alpha-1$	$\beta-1$
	1	1	1	1
	0	-3	2	3
	0	0	$\alpha+1$	$\beta+2$

Zur Rangbestimmung ist eine Fallunterscheidung nötig:

Fall A:
$\alpha+1 \neq 0,\ \beta \in \mathbb{R} \quad\Longrightarrow\quad Rang A = 3 = Rang(A|\underline{b}) = n$
$\Longrightarrow$ *GLS ist eindeutig lösbar.*

$$(\alpha+1)x_3 = \beta+2 \quad\Longrightarrow\quad x_3 = \tfrac{\beta+2}{\alpha+1}$$

$$-3x_2 + 2x_3 = 3 \quad\Longrightarrow\quad x_2 = (-\tfrac{1}{3})(3 - 2\tfrac{\beta+2}{\alpha+1}) = -1 + \tfrac{2}{3}\tfrac{\beta+2}{\alpha+1}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = 1 - (-1 + \tfrac{2}{3}\tfrac{\beta+2}{\alpha+1}) - \tfrac{\beta+2}{\alpha+1} = 2 - \tfrac{5}{3}\tfrac{\beta+2}{\alpha+1}$$

Fall B:
$\alpha+1 = 0,\ \beta+2 \neq 0 \quad\Longrightarrow\quad Rang A = 2 < Rang(A|\underline{b}) = 3$
$\Longrightarrow$ *GLS ist nicht lösbar.*

Fall C:
$\alpha+1 = 0,\ \beta+2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad Rang A = 2 = Rang(A|\underline{b}) < n$
$\Longrightarrow$ *GLS ist lösbar mit* $n - r = 1$ *Parameter:* $x_3 = t \in \mathbb{R}$

$$-3x_2 + 2x_3 = 3 \quad\Longrightarrow\quad x_2 = (-\tfrac{1}{3})(3 - 2t) = \tfrac{2}{3}t - 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = 1 - (\tfrac{2}{3}t - 1) - t = 2 - \tfrac{5}{3}t$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.4 Das Verfahren von Gauß-Jordan

Das Verfahren von Gauß-Jordan ist eine Alternative zum Rückwärtseinsetzen. Dabei wird beim Gaußalgorithmus $D = E$ angestrebt, d.h. es werden nicht nur die Zeilen unterhalb des Pivotelementes umgeformt, sondern auch die überhalb. Das Rückwärtseinsetzen wird damit in der Umformung mit erledigt. Dieses Verfahren ist aufwendiger als die übliche Gaußelimination und das anschließende Rückwärtseinsetzen.
Im Fall 2a mit $r = n$ ergibt sich dann:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \widetilde{b}_n \end{pmatrix}.$$

Im Fall 2b mit $r < n$ erhält man:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \widetilde{b}_r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{1,r+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \widetilde{a}_{r,r+1} \end{pmatrix} x_{r+1} - \ldots - \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{1n} \\ \vdots \\ \vdots \\ \widetilde{a}_{r,n} \end{pmatrix} x_n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \underline{\widetilde{b}} - t_1 \underline{\widetilde{S}}_{r+1} - \ldots - t_{n-r} \underline{\widetilde{S}}_n$$

Beispiel 4.9 *Lösung des Beispiels 4.6. mittels Gauß-Jordan-Verfahren:*

	x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
	2	4	2	4
	3	0	−3	−6
	−1	−1	2	6
	1	2	1	2
1	1	0	−1	−2
−1	−1	−1	2	6
	1	2	1	2
	0	−2	−2	−4
	0	1	3	8
2	1	2	1	2
	0	1	1	2
1	0	1	3	8

	1	0	−1	−2
	0	1	1	2
	0	0	2	6
	1	0	−1	−2
−1	0	1	1	2
1	0	0	1	3
	1	0	0	1
	0	1	0	−1
	0	0	1	3

Bemerkung 4.1 *Das Verfahren von Gauß-Jordan kann zur Bestimmung der inversen Matrix benutzt werden.*

Bemerkung 4.2 *Es gilt einerseits:*

$$\begin{aligned} AX &= E \quad \Longleftrightarrow \quad X = A^{-1} \\ &\textit{und andererseits} \\ AX &= E \quad \Longleftrightarrow \quad A\underline{X}_1 = \underline{E}_1,\ A\underline{X}_2 = \underline{E}_2, \quad \dots \quad A\underline{X}_n = \underline{E}_n. \end{aligned}$$

Das entspricht der n-maligen Lösung des linearen Gleichungssystems mit der gleichen Systemmatrix A und den Spalten von E als rechten Seiten. Diese können in das Schema des Algorithmus von Gauß-Jordan mit auf die rechte Seite geschrieben werden, so dass nur <u>eine</u> Abarbeitung des Algorithmus gleichzeitig für alle rechten Seiten notwendig ist. Geht man von dem Schema in der Form $A|E$ aus, so ist das Ende erreicht, wenn links die Einheitsmatrix steht. Dann erscheint auf der rechten Seite die Inverse von A: $E|A^{-1}$.

Beispiel 4.10 *zur Inversion*

	x_1	x_2	x_3	$\underline{E}_1$	$\underline{E}_2$	$\underline{E}_3$
	1	1	1	1	0	0
2	2	4	3	0	1	0
0	0	4	4	0	0	1
	1	1	1	1	0	0
2	0	2	1	-2	1	0
0	0	4	4	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0
	0	1	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0
4	0	4	4	0	0	1
	1	0	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	0
	0	1	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0
	0	0	2	4	-2	1
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0
	0	0	1	2	-1	$\frac{1}{2}$
	1	0	0	1	0	$-\frac{1}{4}$
	0	1	0	-2	1	$-\frac{1}{4}$
	0	0	1	2	-1	$\frac{1}{2}$

Bemerkung 4.3 *Zeilentausch während der Rechnung verändert die Inverse nicht.*

	x_1	x_2	x_3	$\underline{E}_1$	$\underline{E}_2$	$\underline{E}_3$
	1	1	1	1	0	0
2	2	4	3	0	1	0
0	0	4	4	0	0	1
	1	1	1	1	0	0
2	0	2	1	-2	1	0
0	0	4	4	0	0	1
	1	1	1	1	0	0
	0	4	4	0	0	1
	0	2	1	-2	1	0
1	1	1	1	1	0	0
	0	1	1	0	0	$\frac{1}{4}$
2	0	2	1	-2	1	0
0	1	0	0	1	0	$-\frac{1}{4}$
1	0	1	1	0	0	$\frac{1}{4}$
	0	0	-1	-2	1	$-\frac{1}{2}$
	1	0	0	1	0	$-\frac{1}{4}$
	0	1	0	-2	1	$-\frac{1}{4}$
	0	0	1	2	-1	$\frac{1}{2}$

Bemerkung 4.4 *Spaltentausch ergibt in der Inversen den entsprechenden Zeilentausch. Er ist zu vermeiden.*

	x_1	x_2	x_3	$\underline{E}_1$	$\underline{E}_2$	$\underline{E}_3$
	1	1	1	1	0	0
	2	4	3	0	1	0
	0	4	4	0	0	1
	x_2	x_1	x_3	$\underline{E}_1$	$\underline{E}_2$	$\underline{E}_3$
	1	1	1	1	0	0
4	4	2	3	0	1	0
4	4	0	4	0	0	1
	1	1	1	0	0	0
2	0	-2	-1	-4	1	0
0	0	-4	0	-4	0	1
1	1	1	1	1	0	0
	0	1	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	0
1	0	1	0	1	0	$-\frac{1}{4}$
	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0
	0	1	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	0
	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	0
	0	0	1	2	-1	$\frac{1}{2}$
	1	0	0	-2	1	$-\frac{1}{4}$
	0	1	0	1	0	$-\frac{1}{4}$
	0	0	1	2	-1	$\frac{1}{2}$

4.5 Zusammenfassung

Satz 4.2 *Gilt für das lineare Gleichungssystem* $A\underline{x} = \underline{b}$ $\quad rang A = rang(A|\underline{b})$, *so ist das System lösbar, anderenfalls unlösbar*

Satz 4.3 *Das lineare Gleichungssystem* $A\underline{x} = \underline{b}$ *sei lösbar,* r *sei der Rang von* A, n *die Anzahl der Unbekannten.*

· *Gilt* $r = n$, *so ist* $A\underline{x} = \underline{b}$ *eindeutig lösbar.*

· *Bei* $r < n$ *enthält die Lösung* $(n-r)$ *Parameter. Sie ist ein* $(n-r)$*-parametrischer verschobener Unterraum der Form:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ -- \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\underline{b}} \\ \\ \\ -- \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + t_{r+1} \begin{pmatrix} \widetilde{\underline{S}}_{r+1} \\ \\ \\ -- \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + t_n \begin{pmatrix} \widetilde{\underline{S}}_{n} \\ \\ \\ -- \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

spezielle Lösung des inhomogenen Problems + *allgemeine Lösung des homogenen Problems (Unterraum)*

Bemerkung 4.5 *Ein homogenes lineares Gleichungssystem mit Vollrang (r=n) hat nur die triviale Lösung:* $A\underline{x} = \underline{\mathbf{0}}, \quad A \neq \underline{\mathbf{0}} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{x} = \underline{\mathbf{0}}$.

Bemerkung 4.6 *Äquivalenz der Aussagen:*

$r = n$

$\Updownarrow$ *Bei der Umformung von in gilt entweder*
1. $det A \neq 0 \iff \det \widetilde{A} \neq 0 \iff r = n$
2. $det A = 0 \iff \det \widetilde{A} = 0 \iff r < n$

$det A \neq 0$

$\Updownarrow$ *Darstellungssatz für* A^{-1}

$\exists A^{-1}$

$\Updownarrow$ *Multiplikation von* $A\underline{x} = \underline{b}$ *von links mit* A^{-1}

$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}$

Bemerkung 4.7 *zur Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen*

	$A\underline{x} = \underline{b}$ m Gleichungen n Unbekannte	$A\underline{x} = \mathbf{0}$ $\widehat{=}$ Spezialfall $\underline{b} = \mathbf{0}$ $\widehat{=}$ homogenes System
$rang A \neq rang(A\|\underline{b})$	System ist unlösbar	Dieser Fall kann nicht eintreten, da $\underline{b}$ keine Nichtnullelemente enthält. D.h. homogene Systeme sind stets lösbar
$rang A = rang(A\|\underline{b}) = r$	System ist lösbar	
a) $r = n$	Lösung ist eindeutig	System hat triviale Lösung: $\underline{x} = \mathbf{0}$
b) $r < n$	Lösung ist nicht eindeutig	System besitzt nichttriviale Lösungen

4.6 Eigenwerte und Eigenvektoren

Es sei A eine Matrix vom Typ (n, n), x ein Spaltenvektor vom Typ $(n, 1)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.
Problem: Gibt es Vektoren $\underline{x}$, $\underline{x} \neq \mathbf{0}$ derart, dass sich die Multiplikation $A\underline{x}$ auf die einfachere Operation $\lambda\underline{x}$ reduziert?

Definition 4.2 *Existiert ein Vektor $\underline{x}$, $\underline{x} \neq \mathbf{0}$, so dass die Gleichung $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ gilt, so heißt λ Eigenwert und $\underline{x}$ der zugehörige Eigenvektor.*

Bemerkung 4.8 $\alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad A(\alpha\underline{x}) = \alpha A\underline{x} = \alpha\lambda\underline{x} = \lambda(\alpha\underline{x})$
Neben $\underline{x}$ ist auch $\alpha\underline{x}$ ebenfalls Eigenvektor. D.h., Eigenvektoren sind nicht eindeutig.

<u>Berechnung von Eigenwerten:</u>

$A\underline{x} = \lambda\underline{x} \quad \Longrightarrow \quad (A - \lambda E)\underline{x} = \mathbf{0}$
<u>Fall 1:</u> $rang(A - \lambda E) = n \quad \Longrightarrow \quad \underline{x} = \mathbf{0}$
$\underline{x}$ ist aber dann entsprechend Definition kein Eigenvektor.

<u>Fall 2:</u> $rang(A - \lambda E) < n \quad \Longrightarrow \quad \exists$ nichttriviale Lösungen $\underline{x}$
Forderung für deren Existenz:

$\det(A - \lambda E) = 0$: Charakteristische Gleichung der Matrix A.

$\det(A - \lambda E) = P_n(\lambda) = 0$ ist die Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte.

Satz 4.4 *Fundamentalsatz der Algebra (GAUSS)*
Jede Gleichung n-ten Grades besitzt im Bereich der komplexen Zahlen genau n Lösungen, wobei die k-fachen Lösungen k-mal zu zählen sind.

Folgerung 4.3 *Für eine (n,n)-Matrix existieren genau n Eigenwerte, wobei die k-fachen k-mal zu zählen sind.*

Folgerung 4.4 *Eigenwerte einer reellen Matrix können komplexe Zahlen sein.*

Bemerkung 4.9 *Die Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sind rell.*

Beispiel 4.11 *zur Berechnung von Eigenwerten*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda E) = \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)(-1-\lambda)(-\lambda)-(-\lambda)-(-\lambda)$$

$$= \lambda^2(-1-\lambda)+2\lambda = -\lambda(\lambda^2+\lambda-2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = 1$$

Beispiel 4.12 *zur Berechnung von Eigenwerten*

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\mu E) = \det \begin{pmatrix} 5-\mu & 4 \\ -5 & -3-\mu \end{pmatrix} = (5-\mu)(-3-\mu)+20$$

$$= -15+20-5\mu+3\mu+\mu^2 = \mu^2-2\mu+5 = 0$$

$$\mu_1 = 1+2i, \quad \mu_2 = 1-2i$$

<u>Berechnung der Eigenvektoren zum Eigenwert λ_i:</u>

1. Lösen des Gleichungssystems $(A-\lambda_i E)\underline{x} = \mathbf{0}$
2. Da $rang(A-\lambda_i E) = r < n \implies$ Lösung enthält $n-r$ Parameter.
3. Durch unterschiedliche Wahl der $n-r$ Parameter ist es möglich, $n-r$ Eigenvektoren $\underline{x}$ zu finden, die nicht durch Multiplikation mit einem Faktor ineinander überführbar sind.

Beispiel 4.13 *Sei A wie in Beispiel 4.11*

$\lambda_1 = 0,$ *löse* $(A-\lambda_1 E)\underline{x} = A\underline{x} = \mathbf{0}$:

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
0	−1	0	0
−1	−1	1	0
0	1	0	0
−1	−1	1	0
0	−1	0	0
0	1	0	0

Wähle $x_3 = t = 1, \quad x_2 = 0, \quad -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1$

$$\Longrightarrow \quad \underline{EV}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -2,$ *löse* $(A - \lambda_2 E)\underline{x} = (A + 2E)\underline{x} = \mathbf{0}$:

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
2	−1	0	0
−1	1	1	0
0	1	2	0
2	−1	0	0
0	$\frac{1}{2}$	1	0
0	1	2	0

Wähle $x_3 = t = 1, \quad x_2 = -2x_3 = -2, \quad 2x_1 - x_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -1$

$$\Longrightarrow \quad \underline{EV}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 1,$ *löse* $(A - \lambda_3 E)\underline{x} = (A - E)\underline{x} = \mathbf{0}$:

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
−1	−1	0	0
−1	−2	1	0
0	1	−1	0
1	1	0	0
0	−1	1	0
0	1	−1	0

Wähle $x_3 = t = 1, \quad x_2 = x_3 = 1, \quad x_1 + x_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -1$

$$\Longrightarrow \quad \underline{EV}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.14 *Zu der Matrix*

$$C = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -6 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ gehören die Eigenwerte: } \lambda_1 = \lambda_2 = -3 \text{ und } \lambda_3 = 5.$$

Berechne die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$:
Löse $(C - \lambda_1 E)\underline{x} = (C + 3E)\underline{x} = \mathbf{0}$

x_1	x_2	x_3	$\underline{b}$
-1	-3	3	0
2	6	-6	0
-1	-3	3	0
1	3	-3	0
0	0	0	0
0	0	0	0

$rang(C+3E) = 1 \quad \Longrightarrow \quad$ *2 Parameter, 2 Eigenvektoren*

$x_1 = 0 - 3x_2 + 3x_3$

$$\text{Wähle } x_2 = 1, \quad x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \underline{EV}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Wähle } x_2 = 0, \quad x_3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \underline{EV}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

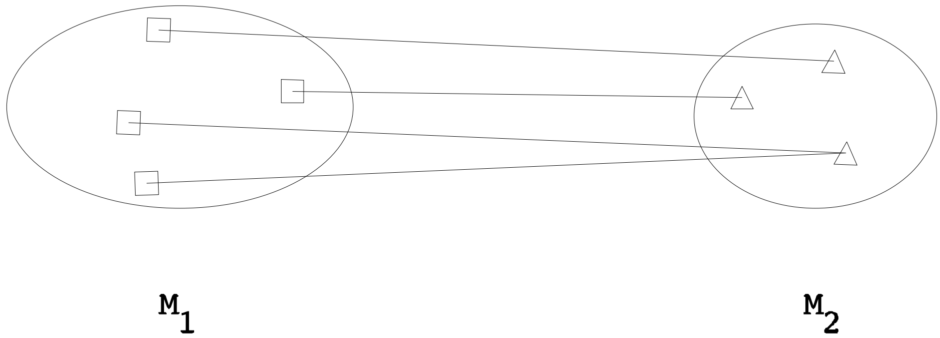
Bedeutung der Eigenwerte und Eigenvektoren:

- Resonanz bei schwingfähigen Systemen
- Lösung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen
- Dokumentation der Eigenschaften der Matrix A

5 Funktionen

5.1 Abbildungen, Funktionsbegriff

Definition 5.1 *Es seien M_1 und M_2 beliebige Mengen. Jede Teilmenge von $M_1 \times M_2$ heißt Abbildung von M_1 in M_2 .*
Schreibweise: $f: \; M_1 \longrightarrow M_2; \qquad f: x \longrightarrow y; y = f(x)$

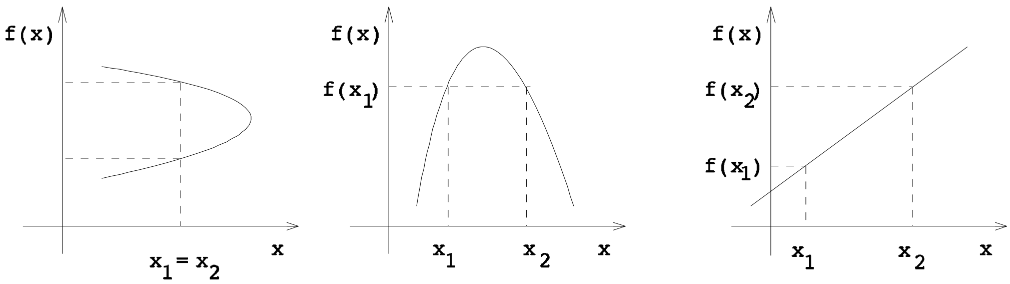


Definitionsbereich (Urbildmenge) $= \{x| \; x \in M_1, \exists \; y \in M_2 : y = f(x)\} = D_f$

Wertebereich (Bildmenge) $= \{y| \; y \in M_2, \exists \; x \in M_1 : y = f(x)\} = W_f$

Beispiel 5.1
$M_1 = \mathbb{N}; \qquad M_2 = \mathbb{N}; \qquad A = \{(1;2),(2;4),(3;6),...\}$
$D_f = \{1;2;3;...\}; \quad W_f = \{2;4;6;...\}; \qquad \Longrightarrow \qquad y = 2x$

Definition 5.2 *Eine Abbildung heißt eindeutig oder Funktion, wenn jedem Urbild genau ein Bild zugeordnet wird. Eine Abbildung heißt eineindeutig, wenn außerdem zu jedem Bild nur ein Urbild existiert.*



f nicht eindeutig
$f(x_1) \neq f(x_2)$,
aber $x_1 = x_2$

f eindeutig
$x_1 \neq x_2$,
aber $f(x_1) = f(x_2)$

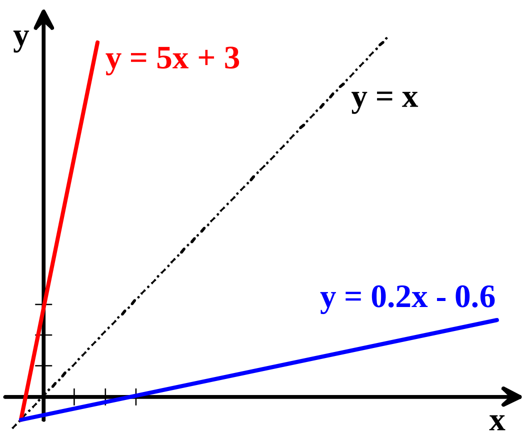
f eineindeutig

Zu jeder eineindeutigen Abbildung (Funktion) existiert eine inverse Abbildung (Funktion). Diese ordnet jedem Bild sein Urbild zu.

Ausgangsfunktion: $f \ : \ D_f \longrightarrow W_f; \qquad y = f(x)$
inverse Funktion: $f^{-1} : W_f \longrightarrow D_f; \qquad x = f^{-1}(y)$

Bestimmung von f^{-1} :

Gleichung $y = f(x)$ nach x auflösen,
x und y vertauschen (entspricht Spiegelung an der Geraden $y = x$).



Beispiel 5.2
$f: \ y = 5x + 3 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{1}{5}y - \frac{3}{5} \qquad \Rightarrow \qquad f^{-1} : y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$
$D_f = W_{f^{-1}}; \qquad W_f = D_{f^{-1}}$

Definition 5.3 *Gleichheit von Funktionen:*
$f_1 = f_2 \Leftrightarrow D_{f_1} = D_{f_2} = D_f \quad \wedge \quad f_1(x) = f_2(x) \;\; \forall x \in D_f$

Definition 5.4 *Eine mittelbare Funktion verwendet als Urbilder (Argumente) die Bilder einer zweiten Funktion.*

Beispiel 5.3 $f(x) = e^{\sin x} = h(g(x)) \qquad \Rightarrow \qquad g(x) = \sin x$: *innere Funktion*;
$h(x) = e^z$: *äußere Funktion*

5.2 Zahlenfolgen und ihre Grenzwerte

Definition 5.5 *Die Abbildung* $f:\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}; \qquad f: n \longrightarrow x_n = f(n)$
heißt (Zahlen-)Folge, die Zahl $x_n = f(n)$ *wird als* n*-tes Glied der Folge bezeichnet,* n *heißt Laufindex.*
Man schreibt: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_1, x_2, x_3, ...\} = \{x_n\}$

Interpretation: Denkt man sich in der Folge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, ...$ jede Zahl n mittels des Bildungsgesetzes $f(n)$ durch eine reelle Zahl x_n ersetzt, so erhält man die Zahlenfolge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$.
Die Bildungsvorschrift $x_n = f(n)$ kann auch in der Form $x_n = f(x_{n-1})$ auftreten. Diese Form heißt rekursive (rückbezügliche) Bildungsvorschrift. Dabei muss ein Element der Folge (x_{n-1}, n beliebig) bekannt sein.

Beispiel 5.4

	Bildungsvorschrift:	*rekursiv* $k = 1, 2, 3, ...$	*allgemein* $k \in \mathbb{N}$
a)	$\{x_k\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$	$x_1 = 1; x_{k+1} = \frac{x_k}{x_k+1}$	$x_k = \frac{1}{k}$
b)	$\{x_k\} = 1, 2, 4, 8, ...$	$x_1 = 1; x_{k+1} = 2x_k$	$x_k = 2^{k-1}$
c)	$\{x_k\} = 1, 1, 1, ...$	$x_1 = 1; x_{k+1} = x_k$	$x_k = 1$
d)	$\{x_k\} = 1, -1, 1, -1, ...$	$x_1 = 1; x_{k+1} = -x_k$	$x_k = (-1)^{k+1}$
e)	$\{x_k\} = 2, 1, \frac{3}{2}, 1, \frac{4}{3}, ...$	—	$x_k = \begin{cases} \frac{k+3}{k+1}, & k \text{ ungeragde} \\ 1, & k \text{ gerade} \end{cases}$

Definition 5.6 *Eine Zahlenfolge* $\{x_k\}$ *heißt*
nach unten beschränkt $\Leftrightarrow$ $\exists\, C = const.|\quad C \le x_k \quad \forall k \in K \subset \mathbb{N}$
nach oben beschränkt $\Leftrightarrow$ $\exists\, D = const.|\quad x_k \le D \quad \forall k \in K \subset \mathbb{N}$
beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist, d.h. $|x_k| \le M = \max\{C, D\}$.

Definition 5.7 *Eine Zahlenfolge* $\{x_k\}$ *heißt*

$$\left.\begin{array}{lcl} \textit{monoton wachsend} & \Leftrightarrow & x_k \le x_{k+1} \\ \textit{streng monoton wachsend} & \Leftrightarrow & x_k < x_{k+1} \\ \textit{monoton fallend} & \Leftrightarrow & x_k \ge x_{k+1} \\ \textit{streng monoton fallend} & \Leftrightarrow & x_k > x_{k+1} \\ \textit{konstant} & \Leftrightarrow & x_k = x_{k+1} \\ \textit{alternierend} & \Leftrightarrow & x_k \cdot x_{k+1} < 0 \end{array}\right\} \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Mit einer oberen (bzw. unteren) Schranke gibt es für die Zahlenfolge jeweils unendlich viele solcher Schranken, da dann auch alle größeren Zahlen obere (bzw. alle kleineren Zahlen untere) Schranken sind. Vielfach existiert eine kleinste obere bzw. größte untere Schranke. Sie heißt Supremum bzw. Infimum. Schranken müssen nicht Elemente der Folgen sein.

Beispiel 5.5 *Eigenschaften der Folgen aus dem vorhergehenden Beispiel*

Folge	C	D	*Infimum*	*Supremum*	*Eigenschaften*
a)	$..., -2, -1, 0$	$1, 10, ...$	0	1	*streng monoton fallend*
b)	$..., -2, -1, 0.5, 1$	*keine*	1	–	*streng monoton wachsend*
c)	$..., -2, -1, 0.5, 1$	$1, 1.5, 100, ..$	1	1	*konstante Folge*
d)	$..., -2, -1$	$1, 1.5, 100, ...$	-1	1	*alternierende Folge*
e)	$..., -2, -1, 0, 1$	$2, 2.5, 5, ...$	1	2	

Die Zahlen C und D in der Tabelle sind Beispiele für untere und obere Schranken. Es gibt entweder keine oder unendlich viele davon.

Beispiel 5.6 *Arithmetische Folge*

Charakteristikum:	*Konstante Differenz d zwischen den Gliedern:* $d = x_{k+1} - x_k$
Allgemeine Darstellung	$x_k = x_1 + (k-1)\,d,\ \ k \in \mathbb{N}$
Rekursive Darstellung	$x_k = x_{k-1} + d,\ \ k \in \mathbb{N}$
(Konvergenz gegen	$\pm\infty$*, sofern* $x_1 \neq 0$ *und* $d \neq 0$*)*
Partialsumme	$s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n = \frac{n}{2}(x_1 + x_n) = \frac{n}{2}(2x_1 + (n-1)\,d)$
Summe	$\pm\infty$*, sofern* $x_1 \neq 0$ *und* $d \neq 0$
Anwendungsbeispiele	*Folge der natürlichen Zahlen* *Folge der Volumina beim Kompressor* *Folge der Anzahl der Rohre in einer Reihe auf dem Stapel*

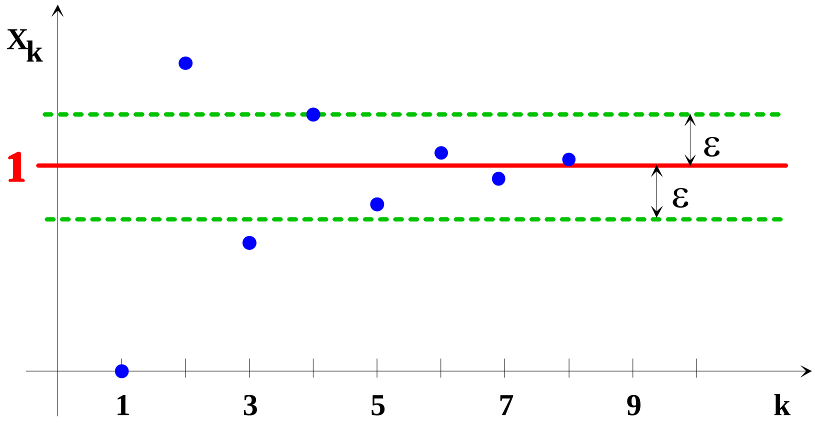
Beispiel 5.7 *Geometrische Folge*

Charakteristikum:	*Konstanter Quotient q zwischen den Gliedern:* $q = \dfrac{x_{k+1}}{x_k}$
Allgemeine Darstellung	$x_k = x_1 \cdot q^{k-1},\ k \in \mathbb{N}$
Rekursive Darstellung	$x_k = x_{k-1} \cdot q,\ k \in \mathbb{N}$
(Konvergenz	*ja für* $\lvert q\rvert < 1$*)*
Partialsumme	$s_n = x_1 + x_2 + ... + x_n = x_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{x_1 - x_{n+1}}{1-q}$
Summe	$s = \frac{x_1}{1-q}$*, sofern* $x_1 \neq 0$ *und* $\lvert q\rvert < 1$
Anwendungsbeispiele	*Verzinsung* *natürliche Wachstumsprozesse*

5.2.1 Grenzwerte von Zahlenfolgen

Bei der Betrachtung von Grenzwerten geht es um das Verhalten der Folge, das durch die unendlich vielen, „fernen" Glieder bestimmt wird. **Endlich viele Glieder haben auf dieses Verhalten der Folge keinen Einfluss.**

Beispiel 5.8 $x_k = 1 + \frac{(-1)^k}{k} \quad \Longrightarrow \quad \{x_k\} = \{0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{6}{7}, ...\}$



Definition 5.8 *Die Zahlenfolge $\{x_k\}$ hat den Grenzwert $g \in \mathbb{R}$, wenn für jede Zahl $\varepsilon > 0$ fast alle Glieder der Folge in der ε-Umgebung $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ von g liegen.*

Das ist gleichbedeutend mit folgender Formulierung:

Definition 5.9 *Die Zahlenfolge $\{x_k\}$ hat den Grenzwert $g \in \mathbb{R}$, wenn für jede Zahl $\varepsilon > 0$ ein Index $n_0(\varepsilon)$ so angeben werden kann, dass gilt:*

$$|x_n - g| < \varepsilon \quad \textit{für alle } n > n_0(\varepsilon).$$

Die zweite Formulierung lässt sich rechnerisch besser auswerten, die erste Formulierung besser interpretieren. Der Term $|x_n - g|$ beschreibt dabei den Abstand der einzelnen Glieder x_k der Folge $\{x_k\}$ vom (vermuteten) Grenzwert g.
Bezeichnungen:

- Zahlenfolgen, die einen Grenzwert $g \in \mathbb{R}$ besitzen heißen konvergent. Man schreibt:

$$\lim_{k \to \infty} x_k = g.$$

- Anderenfalls heißen sie divergent.
- Ist $g = 0$, so nennt man die Zahlenfolge eine Nullfolge.
- Divergente Zahlenfolgen, die gegen „∞" oder „$-\infty$" streben, heißen bestimmt divergent, anderenfalls unbestimmt divergent.
- Die Werte „∞" und „$-\infty$" nennt man uneigentliche Grenzwerte.
- Die Menge $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon, \ \varepsilon > 0\}$ heißt ε-Umgebung der Stelle x_0.

Beispiel 5.9 *Weiter zum obigen Beispiel* $x_k = 1 + \frac{(-1)^k}{k}$*; Es sei* $\varepsilon > 0$*, beliebig. Aus dem Bild entnehmen wir die Vermutung* $g = 1$*. Dann gilt für* $k > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$*:*

$$\begin{aligned} k-1 &> \left[\frac{1}{\varepsilon}\right], \text{ d.h.} \\ \frac{1}{k} &< \frac{1}{k-1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$|x_k - 1| = \left|1 + \frac{(-1)^k}{k} - 1\right| = \frac{1}{k} < \varepsilon,$$

und die Vermutung wurde bestätigt.

Beispiel 5.10 *für spezielle geometrische Folgen mit* $x_k = q^k$*, d.h.* $x_1 = q$*:*

1)	$q > 1$	$\Longrightarrow$	*z.B.* $x_k = 2^k$	$\Longrightarrow$	$\{x_k\} = \{2, 4, 8, ...\}$	$\Longrightarrow$	$x_k \overset{k\to\infty}{\to} \infty$
2)	$q = 1$	$\Longrightarrow$	$x_k = 1^k \equiv 1$	$\Longrightarrow$	$\{x_k\} = \{1, 1, 1, ...\}$	$\Longrightarrow$	$x_k \overset{k\to\infty}{\to} 1$
3)	$0 < q < 1$	$\Longrightarrow$	*z.B.* $x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$	$\Longrightarrow$	$\{x_k\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\}$	$\Longrightarrow$	$x_k \overset{k\to\infty}{\to} 0$
4)	$q = 0$	$\Longrightarrow$	$x_k = 0^k \equiv 0$	$\Longrightarrow$	$\{x_k\} = \{0, 0, 0, ...\}$	$\Longrightarrow$	$x_k \overset{k\to\infty}{\to} 0$
5)	$-1 < q < 0$	$\Longrightarrow$	*z.B.* $x_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^k$	$\Longrightarrow$	$\{x_k\} = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, ...\}$	$\Longrightarrow$	$x_k \overset{k\to\infty}{\to} 0$
6)	$q \leq -1$	$\Longrightarrow$	*z.B.* $x_k = \left(-2^k\right)^k$	$\Longrightarrow$	$\{x_k\} = \{-2, 4, -8, ...\}$	$\Longrightarrow$	*unbestimmt divergent*

Die Folge $\{x_k\} = \{q^k\}$ *ist konvergent für* $-1 < q \leq 1$ *mit* $\lim_{k\to\infty} q^k = \left\{\begin{array}{lll} 1 & \text{für} & q = 1 \\ 0 & \text{für} & |q| < 1 \end{array}\right\}$, *anderenfalls divergent, d.h. der Grenzwert existiert nicht. Für* $q > 1$ *ergibt sich bestimmte Divergenz gegen* ∞ *und für* $q \leq -1$ *unbestimmte Divergenz aufgrund des Alternierens der Folge.*

5.2.2 Rechnen mit Zahlenfolgen - Grenzwertsätze

Satz 5.1 *Jede konvergente Zahlenfolge besitzt einen eindeutig bestimmten Grenzwert.*

Satz 5.2 *Jede Teilfolge einer konvergenten Zahlenfolge ist ebenfalls konvergent und hat denselben Grenzwert wie die gesamte Folge.*

Satz 5.3 *Vertauschen der Grenzwertbildung mit den Grundrechenarten*
Es seien $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ zwei konvergente Zahlenfolgen mit den Grenzwerten x und y. dann gilt:

$$\begin{array}{llllll}
(1) & \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) & = & \lim\limits_{n\to\infty}(x_n) \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n) & = & x \pm y \\[2ex]
(2) & \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) & = & \lim\limits_{n\to\infty}(x_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(y_n) & = & x \cdot y \\[2ex]
(3) & \lim\limits_{n\to\infty}(a \cdot x_n) & = & a \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(x_n) & \textit{mit} & a \in \mathbb{R} \\[2ex]
(4) & \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) & = & \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(y_n)} & = & \dfrac{x}{y}, \quad \textit{sofern } y_n, y \neq 0 \\[2ex]
(5) & \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} & = & \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} & = & \sqrt[k]{x} \quad \textit{sofern } x_n,\ x \geq 0
\end{array}$$

Beispiel 5.11 *Gebrochen rationale Zahlenfolgen*

$$a)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+7n-10}{3n^2-2n+5}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2(1+\frac{7}{2n}-\frac{10}{2n^2})}{3n^2(1-\frac{2}{3n}+\frac{5}{2n^2})} = \frac{2}{3}$$

$$b)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+5n-101}{2n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3(1+\frac{5}{n^2}-\frac{101}{n^3})}{2n(1-\frac{1}{2n})} = \infty$$

$$c)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+3}{5n^2+2n+6}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{4n(1+\frac{3}{4n})}{5n^2(1+\frac{2}{5n}+\frac{6}{5n^2})} = 0$$

Zusammenfassung:
Wegen der übersichtlicheren Schreibweise und der späteren Anwendung bei gebrochen rationalen Funktionen setzen wir nun $n = x$. Das entspricht einer stetigen Einbettung der diskreten Zahlenfolge $\{a_n = f(n)\}|_{n\in\mathbb{N}}$ in eine reelle Funktion $f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$: Dann ist das folgende Ergebnis sofort auch für Funktionen einer reellen Veränderlichen anwendbar.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}{a_l x^l + a_{l-1}x^{l-1} + ... + a_1 x + a_0}\right) = \left\{\begin{array}{lll} 0 & \textit{für} & m < l \\[2ex] \dfrac{b_m}{a_l} & \textit{für} & m = l \\[2ex] sgn\left(\dfrac{b_m}{a_l}\right)\cdot\infty & \textit{für} & m > l \end{array}\right\}$$

Beispiel 5.12 *für Grenzwertberechnung mittels 3. binomischer Formel*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+5n}-2n\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+5n}-2n\right)\frac{\left(\sqrt{4n^2+5n}+2n\right)}{\left(\sqrt{4n^2+5n}+2n\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+5n-4n^2}{\sqrt{4n^2+5n}+2n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{5n}{2n\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1\right)} = \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Nun folgen noch einige Sätze, die beim Berechnen von Grenzwerten nützlich sein können.

Satz 5.4 *Jede beschränkte und monotone Folge ist konvergent.*

Satz 5.5 *Hat $\{x_n\}$ den Grenzwert g, so ist $\{x_n - g\}$ eine Nullfolge.*

Satz 5.6 *Seien $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ zwei konvergente Folgen mit den Grenzwerten x und y und gilt weiterhin $x_n < y_n$ für alle $n > n_1$, so gilt auch $x \leq y$.*

Satz 5.7 *Aus* $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *oder* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ *folgt* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Satz 5.8 *Vergleichskriterium*
Eine Folge $\{x_n\}$ ist konvergent gegen den Grenzwert g, wenn es zwei andere Zahlenfolgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ derart gibt, dass gilt:

$$1)\quad \lim_{n\to\infty} a_n = g = \lim_{n\to\infty} b_n \quad \textit{und} \quad 2)\quad a_n \leq x_n \leq b_n, \quad n = 1, 2, ...$$

Für numerische Berechnungen hat die folgende Definition der Konvergenz nach CAUCHY eine besondere Bedeutung. Da beide Definitionen der Konvergenz einer Zahlenfolge (die obige und die folgende nach Cauchy) äquivalent sind, kann die Definition nach CAUCHY verwendet werden, um beim numerischen Berechnen einer Zahlenfolge deren Konvergenz festzustellen und den Abbruch der Rechnung festzulegen: Wenn sich zeigt, dass die Folge der Abstände von je zwei aufeinander folgenden Gliedern der Zahlenfolge offenbar eine Nullfolge ergibt, so kann man von der Konvergenz der berechneten Folge ausgehen und das letzte berechnete Reihenglied als Näherung für den Grenzwert betrachten oder diesen aus den berechneten Folgengliedern extrapolieren. Die Genauigkeit des Näherungswertes hängt vom verwendeten Berechnungverfahren ab und kann bei Einbettung in eine lipschützstetige Funktion über den Banachschen Fixpunktsatz abgeschätzt werden.

Satz 5.9 *CAUCHYsches Konvergenzkriterium*
Eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ ist in $\mathbb{R}$ genau dann konvergent, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürlichen Zahl $N(\varepsilon)$ existiert, so dass für alle $n, m > N(\varepsilon)$ gilt: $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Wichtige Grenzwerte:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= e = 2,71828... \quad \text{(Eulersche Zahl)} \\
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n &= e^a, \quad a \in \mathbb{Q} \\
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} &= 1 \quad c \in \mathbb{R},\ c > 0 \\
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} &= 1
\end{aligned}$$

5.3 Grundfunktionen, Eigenschaften von Funktionen

Definition 5.10 *Grundfunktionen*

- Potenzfunktionen: $f(x) = x^a; \qquad a \in \mathbb{Q}$
- Exponentialfunktionen: $f(x) = a^x; \qquad a \in \mathbb{R}\,;\, a > 0\,,\, a \neq 1$
- Logarithmusfunktionen: $f(x) = \log_a x; \qquad a \in \mathbb{R}\,;\, a > 0\,,\, a \neq 1$
- trigonometrische oder Winkelfunktionen: $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$
- Arcusfunktionen: $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, arc\cot x$

Definition 5.11 *Jede Funktion, die sich durch endlich viele Operationen der Grundrechenarten und durch Verkettung aus den Grundfunktionen darstellen läßt, heißt elementare Funktion.*

Wurzelfunktionen werden in die Potenzfunktionen eingeordnet, indem man gebrochen rationale Exponenten zulässt.
Die Arcusfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen. Da die trigi- nometrischen Funktionen jedoch periodisch sind, kann man die Umkehrfunktion nur in Teilbereichen des Definitionsbereiches bilden.
Die Wurzel ist die erste und der Logarithmus die zweite Umkehrung der Potenzgleichung.

$$\begin{aligned}
a^n &= b \quad \text{d.h.} \\
a &= \sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}} \quad \text{und} \quad n = \log_a b \\
\text{für } a, b, n &\in \mathbb{R}, \quad \text{mit } b > 0, a > 0, a \neq 0, a \neq 1
\end{aligned}$$

Der Logarithmus berechnet also bei bekannter Basis a und bekanntem Potenzwert b den Exponenten n, mit dem a zu potenzieren ist, um b zu erhalten.

Beispiel 5.13 $8 = 2^3 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = \sqrt[3]{8} \quad \Leftrightarrow \quad 3 = \log_2 8$

Besonders interssant sind Logarithmen zur Basis e (z.B. für natürliche Wachstums- und Zerfallsprozesse) und zur Basis 10, da mit Hilfe der Operation „Logarithmieren" stark verkettete Funktionen gut handhabbar gemacht werden können. Wie in den folgenden Regeln für den Logarithmus zu sehen ist, wird beim Logarithmieren die Stufe der Rechenoperation herabgesetzt, z.B. wird beim Logarithmieren aus einem Produkt zweier Zahlen eine Summe von zwei Logarithmen. Das wurde in der Zeit vor der Erfindung der Rechentechnik zur numerischen Auswertung von Ausdrücken verwendet.

Logarithmengesetze

$$\begin{aligned}
\log_a a &= 1 \\
\log_a 1 &= 0 \\
\log(x \cdot y) &= \log x + \log y \\
\log\left(\frac{x}{y}\right) &= \log x - \log y \\
\log x^b &= b \cdot \log x
\end{aligned}$$

Beispiel 5.14

$$\begin{aligned}
\log_2(\frac{64}{2}) &= \log_2 64 - \log_2 2 = \log_2 2^6 - \log_2 2^1 = 6 - 1 = 5 = \log_2 2^5 = \log 32 \\
\log_2(4 \cdot 16) &= \log_2 4 + \log_2 16 = \log_2 2^2 + \log_2 2^4 = 2 + 4 = 6 = \log_2 2^6 = \log 64 \\
\log_2(4^3) &= 3 \log_2 4 = 3 \log_2 2^2 = 3 \cdot 2 \log_2 2 = 6 \cdot 1 = 6 = \log_2 2^6 = \log 64
\end{aligned}$$

Wiederholen Sie die übrigen Eigenschaften der Grundfunktionen mittels Ihrer Mitschriften aus der Schule bzw. entsprechender Literatur, z.B. Papula, Mathematik für Ingenieure, Band 1. Insbesondere die Definitions- und Wertebereiche, die Veränderung der Funktionen bei Einführung von Parametern, die Rechenregeln, Differenzieren und Integrieren dieser Funktionen werden von anhaltendem Interesse für uns sein.
Im Folgenden finden Sie eine Zusammenstellung interessanter Eigenschaften von Funktionen einer Veränderlichen, für die wir die Grundfunktionen als Illustration heranziehen werden.

Definition 5.12 *Zusammengesetzte Funktionen sind in D_f nicht einheitlich definierte Funktionen.*

Beispiel 5.15 *für zusammengesetzte Funktionen*

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| = \left\{ \begin{array}{lll} x & \textit{für} & x \geq 0 \\ -x & \textit{für} & x < 0 \end{array} \right\}; \\ f(x) &= sgn(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & \textit{für} & x > 0 \\ 0 & \textit{für} & x = 0 \\ -1 & \textit{für} & x < 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

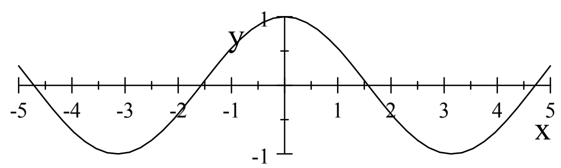
Definition 5.13
$f(x)$ *ist nach unten beschränkt* $\Leftrightarrow \quad \exists\, C = const.| \quad C \leq f(x) \quad \forall x \in D_f$
$f(x)$ *ist nach oben beschränkt* $\Leftrightarrow \quad \exists\, D = const.| \quad f(x) \leq D \quad \forall x \in D_f$
Die Funktion $f(x)$ ist beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist, d.h. $|x_k| \leq M = \max\{C, D\}$..

Beispiel 5.16 $0 < e^x; \quad -1 \leq \sin x \leq 1$

Definition 5.14
$f(x)$ *ist in dem Intervall* $I \subset D_f$

$$\left.\begin{array}{lcl} \textit{monoton wachsend} & \Leftrightarrow & f(x_1) \leq f(x_2) \\ \textit{streng monoton wachsend} & \Leftrightarrow & f(x_1) < f(x_2) \\ \textit{monoton fallend} & \Leftrightarrow & f(x_1) \geq f(x_2) \\ \textit{streng monoton fallend} & \Leftrightarrow & f(x_1) > f(x_2) \end{array}\right\} \forall\, x_1, x_2 \in I \quad \wedge \quad x_1 < x_2$$

Beispiel 5.17 $f(x) = \cos x$ *ist in* $(0;\pi)$ *streng monoton fallend und in* $(-\pi;0)$ *streng monoton wachsend.*



Definition 5.15
$f(x)$ *heißt gerade* $\Leftrightarrow f(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in D_f$ *(Symmetrie zur y-Achse)*
$f(x)$ *heißt ungerade* $\Leftrightarrow f(x) = -f(-x) \quad \forall\, x \in D_f$ *(Symm. zum Koordinatenursprung)*
$f(x)$ *heißt periodisch mit der Periode* $\lambda \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}\,; \lambda > 0 \mid \quad f(x+\lambda) = f(x) \forall x \in D_f$.
Die kleinste positive Zahl λ, für die gilt $f(x+\lambda) = f(x)$, heißt primitive Periode. (Für periodische Funktionen gilt: $f(x) = f(x + k\lambda);\ k \in \mathbf{Z}$.)

Beispiel 5.18 $f(x) = \sin x; \quad f(-x) = -\sin x \quad \to f(x)$ *ist ungerade.*
$f(x) = \cos x; \quad f(-x) = \ \cos x \quad \to f(x)$ *ist gerade.*
$f(x) = \cos x; \quad f(2\pi + x) = \ \cos x \quad \to f(x)$ *ist periodisch mit der Periode* $\lambda = 2\pi$.

Definition 5.16 $f(x)$ *ist in dem Intervall* $I \subset D_f$
konvex$\Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in I \ \wedge \ \forall \alpha \in (0;1)$ *gilt* $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$
konkav$\Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in I \ \wedge \ \forall \alpha \in (0;1)$ *gilt* $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$.

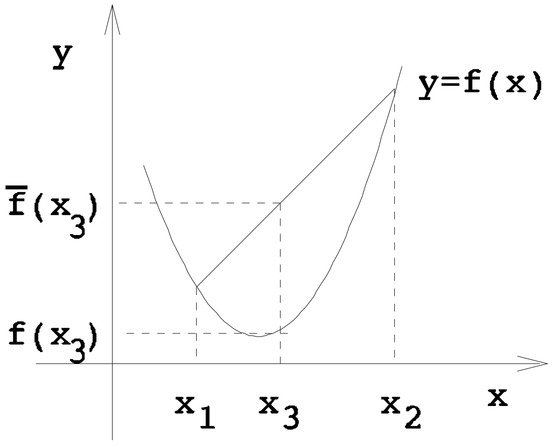


Abbildung zur Konvexität: $x_3 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \qquad \overline{f}(x_3) = \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$

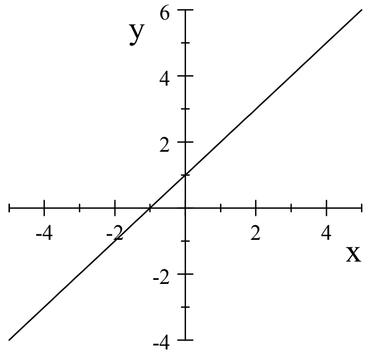
Beispiel 5.19 $f(x) = x^2$ *ist konvex.*
Beweis:
zu zeigen ist: $(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)^2 \leq \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2$

$\alpha^2 x_1^2 + 2\alpha(1-\alpha)x_1x_2 + (1-\alpha)^2 x_2^2 \leq \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2$
$0 \leq x_1^2(\alpha - \alpha^2) - 2\alpha(1-\alpha)x_1x_2 + x_2^2((1-\alpha) - (1-\alpha)^2)$
$0 \leq x_1^2\alpha(1-\alpha) - 2\alpha(1-\alpha)x_1x_2 + x_2^2(1-\alpha)[1-(1-\alpha)]$
$0 \leq \alpha(1-\alpha)[x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2]$
$0 \leq \alpha(1-\alpha)[\ x_1 - x_2\ ]^2$ *ist eine wahre Aussage. q.e.d.*

5.4 Grenzwerte bei Funktionen

In diesem Kapitel können die Erkenntnisse aus dem Abschnitt über Zahlenfolgen angewendet werden, da man gleichzeitig eine Zahlenfolge $\{x_n\}$ aus D_f und die entsprechende Zahlenfolge der zugehörigen Funktionswerte $\{f(x_n)\}$ betrachtet.

Beispiel 5.20 $f(x) = x + \frac{x}{x}; \quad x \in \mathbb{R}; x \neq 0$



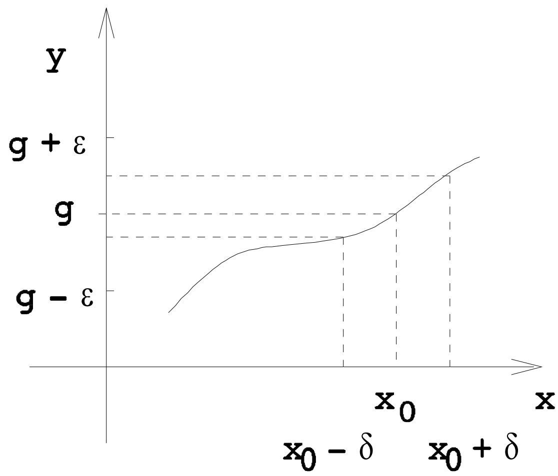
Kann $x = 0$ *ein Funktionswert zugeordnet werden?*
Wählen $x_n = \frac{1}{n}$; $\quad n \in N$; $\quad n \neq 0$; $\quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0$
$\Rightarrow f(x_n) = \frac{1}{n} + 1$; $\quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$
Analog können beliebige andere Zahlenfolgen $\{x_n\} \subset D_f$ *betrachtet werden, die gegen Null konvergieren. Mit ihnen erhält man stets das gleiche Resultat.*

Definition 5.17 $f(x)$ *hat für gegen* x_0 *konvergierendes* x *den Grenzwert* g*, wenn für alle Zahlenfolgen* $\{x_n\}$ *mit* $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = x_0$; $\quad x_n \in D_f$, $\quad x_n \neq x_0$ *die Folgen der Bilder* $\{f(x_n)\}$ *gegen* g *konvergieren.*
Schreibweise: $\quad \lim_{x\to x_0} f(x) = g$

Problem: Wie sollen alle Folgen überprüft werden?

Satz 5.10
$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \quad | \quad |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$

Interpretation: Die Differenz von Funktions- und Grenzwert wird beliebig klein - kleiner als ε -, wenn nur das Argument hinreichend nahe am Punkt x_0 liegt.



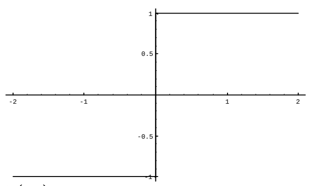
Bemerkung 5.1 *Die im Abschnitt 6.3., Satz 2 angegebenen Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen lassen sich auf Grenzwerte von Funktionen übertragen, z.B.*
$\lim_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$

Bemerkung 5.2 *Bei Funktionen über $\mathbb{R}$ spielen einseitige Grenzwerte eine besondere Rolle, bei denen von links oder rechts gegen den Wert x_0 konvergierende Folgen zur Definition benutzt werden. Man schreibt:*
für den linksseitigen Grenzwert: $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$
für den rechtsseitigen Grenzwert: $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$

Satz 5.11 *$f(x)$ sei Funktion einer Veränderlichen. Existieren für $x = x_0$ die einseitigen Grenzwerte $g_- = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ und $g_+ = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$ und gilt $g_- = g_+ = g$, so ist g Grenzwert von $f(x)$ bei $x = x_0$.*

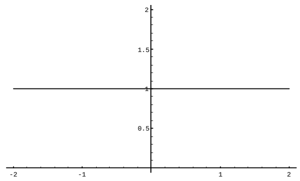
Beispiel 5.21 $f(x) = x + \frac{x}{x}; \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} \left(x + \frac{x}{x}\right) = \lim_{x \to 0+0} (x + 1) = 1$
(obwohl $f(x)$ für x=0 nicht definiert ist)

Beispiel 5.22 $f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1 & für \quad x > 0 \\ 0 & für \quad x = 0 \\ -1 & für \quad x < 0 \end{cases}$



$\lim_{x \to -0} f(x) = -1; \quad \lim_{x \to +0} f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{x \to 0} f(x).$

Beispiel 5.23



$f(x) = |sgn(x)| = \begin{cases} 1 & f\ddot{u}r \quad x \neq 0 \\ 0 & f\ddot{u}r \quad x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$

Achtung! Es gilt: $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$.

Der Funktionswert $f(x_0)$ spielt bei der Grenzwertberechnung $\lim_{x \to 0} f(x)$ keine Rolle!

5.5 Erweiterungen des Begriffes Grenzwert

Definition 5.18 *$f(x)$ sei definiert für $x > c$; $x \in \mathbb{R}$; $c \in \mathbb{R}$; $c = const.$ a heißt Grenzwert von f für unbegrenzt wachsendes x, wenn für alle bestimmt divergenten Folgen $x_k \to +\infty \quad f\ddot{u}r \quad k \to \infty$ gilt: $f(x_k) \to a$.*
Man schreibt $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$.
$f(x)$ sei definiert für $x < c$; $x \in \mathbb{R}$; $c \in \mathbb{R}$; $c = const.$ b heißt Grenzwert von f für unbegrenzt fallendes x, wenn für alle bestimmt divergenten Folgen
$x_k \to -\infty \quad f\ddot{u}r \quad k \to \infty$ gilt: $f(x_k) \to b$.
Man schreibt $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Beispiel 5.24 $f(x) = \frac{1}{x}$; $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Definition 5.19 *Gilt für alle Folgen $\{x_k\}$ mit* $\lim_{k \to \infty} x_k = x_0$; $x_0 \in \mathbb{R}$
$f(x_k) \to \infty$ bzw. $f(x_k) \to -\infty$, so schreibt man $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$ *bzw.*
$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$. *Diese Grenzwerte heißen uneigentliche Grenzwerte. Die Funktion ist unbestimmt divergent gegen ∞ bzw. $-\infty$.*

Beispiel 5.25 $f(x) = \frac{1}{x^2}$: $\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

Beispiel 5.26 $f(x) = \frac{1}{x}$: $\lim_{x \to -0} f(x) = -\infty \neq \lim_{x \to +0} f(x) = +\infty$
Es existiert kein Grenzwert. Man sagt, die Funktion ist unbestimmt divergent.

<u>Wichtige Grenzwerte:</u>

$\lim_{x \to 0} a^x = 1 \quad f\ddot{u}r \quad a > 0$
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$
$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$
$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad a > 0$

5.6 Eigenschaften stetiger Funktionen

Definition 5.20 *Gegeben seien* $f(x)$, $x_0 \in D_f$, $\varepsilon > 0$, $U_\varepsilon(x_0) \subset D_f$.
Die Funktion $f(x)$ *heißt stetig in* $x = x_0$, *wenn gilt* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
x_0 *heißt innerer Punkt von* D_f.

Beispiel 5.27 $f(x) = |x|$ *ist stetig in* $x = 0$,
denn $\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to +0} f(x) = 0 = f(0)$

Definition 5.21 $f(x)$ *ist stetig über* D_f, *wenn gilt*

- f *ist stetig in jedem inneren Punkt von* D_f.
- *für alle zu* D_f *gehörigen Randpunkte z von* D_f *ist der einseitige Grenzwert gleich dem Funktionswert.*

Beispiel 5.28 *Polstelle ungerader Ordnung:* $f(x) = \frac{1}{x}$ *bei* $x_0 = 0$

Beispiel 5.29 *Polstelle gerader Ordnung:* $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *bei* $x_0 = 0$

Beispiel 5.30 *endlicher Sprung:* $f(x) = sgn(x)$ *bei* $x_0 = 0$

Beispiel 5.31 *hebbare Unstetigkeit:* $f(x) = x + \frac{x}{x}$ *bei* $x_0 = 0$; $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$
Setze $\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = 0 \\ f(x) & \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases} \Rightarrow \tilde{f}(x)$ *ist stetig in* $\mathbb{R}$

Beispiel 5.32 *oszillatorische Unstetigkeit:* $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ *bei* $x_0 = 0$
Wähle $\{x_n\} = \{\frac{1}{(n+0.5)\pi}\}$; $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$
Aber: $\{f(x_n)\} = \{\sin(n + 0.5)\pi\} = \{\sin\frac{3}{2}\pi; \sin\frac{5}{2}\pi; \sin\frac{7}{2}\pi; ...\} = \{-1; 1; -1...\}$

Satz 5.12 *Jede Grundfunktion ist auf jedem Intervall ihres Definitionsbereiches stetig.*

Satz 5.13 $f(x)$, $g(x)$ *seien stetig in* $x = x_0$. *Dann sind auch die Funktionen*
$c \cdot f(x)$ *mit* $c \in \mathbb{R}$, $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ *mit* $g(x_0) \neq 0$ *stetig in* $x = x_0$.

Satz 5.14 *Die inverse Funktion einer stetigen Funktion ist stetig.*

Satz 5.15 $g(x)$ *sei stetig in* $x = x_0$, $f(x)$ *sei stetig in* $x = g(x_0)$.
$\Rightarrow \quad h(x) = f(g(x))$ *ist stetig in* $x = x_0$.

Definition 5.22 *Es sei* $x_0 \in G \subset D_f$, $f(x_0)$ *heißt*
absolutes Minimum bzw. Minimum von $f(x)$ *auf* G, *wenn* $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall\, x \in G$,
absolutes Maximum bzw. Maximum von $f(x)$ *auf* G, *wenn* $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall\, x \in G$ *gilt.*

Satz 5.16 *$f(x)$ sei stetig über $[a,b]$.*
$\Rightarrow \quad \exists\, x_1, x_2 \in [a,b] \mid f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall\, x \in [a,b]$

Bemerkung 5.3 *Interpretation: $f(x)$ nimmt in $[a,b]$ ihre Extremwerte an.*

Bemerkung 5.4 *Satz 7 gilt nicht für unstetige Funktionen oder offene Intervalle. (siehe z.B. $f(x) = \frac{1}{x}$ über $[-1;1]$ oder $f(x) = x^2$ über $[0;1)$. In diesen Beispielen wird das Extremum nicht angenommen.)*

Satz 5.17 *Zwischenwertsatz*
$f(x)$ sei stetig auf $[a,b]$, $f(a) = A$; $f(b) = B$. Für alle Zahlen X zwischen A und B existiert ein $x \in (a,b)$ mit $f(x) = X$.

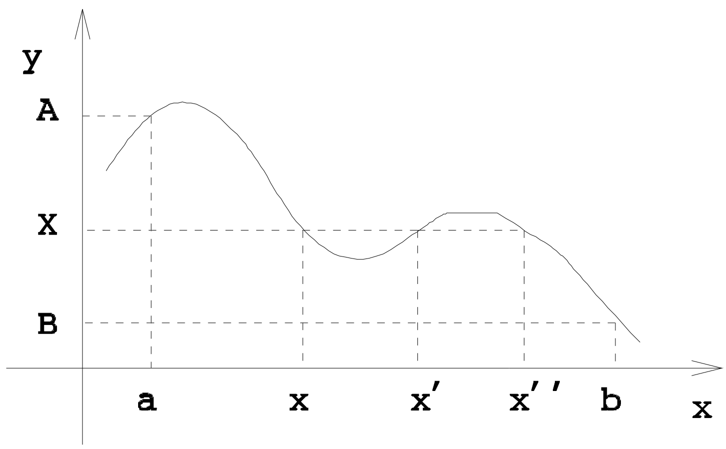


Abbildung zum Zwischenwertsatz: Es können mehrere Punkte x, x' und x" existieren, die der Aussage des Satzes genügen.

Bemerkung 5.5 *Mit $X = 0$ kann Satz 8 zum Lokalisieren von Nullstellen verwendet werden:*

Intervallhalbierungsverfahren

1. Wähle $[a,b]$ mit $f(a) < 0$ *und* $f(b) > 0$
2. Bilde $m = f(\frac{a+b}{2})$
3. Ist $m > 0 \quad \rightarrow \quad a_{neu} = a; \quad b_{neu} = \frac{a+b}{2}$
   Ist $m < 0 \quad \rightarrow \quad a_{neu} = \frac{a+b}{2}; \quad b_{neu} = b$
4. Wiederhole die Schritte 2 und 3 solange, bis die Nullstelle mit ausreichender Genauigkeit bestimmt ist.

5.7 Parameterdarstellung von Funktionen und Kurven*

Definition 5.23 *Die Vorschrift $x = g(t), \quad y = h(t)$ mit $t \in D_f$ heißt Parameterdarstellung der Funktion $y = f(x)$, wenn durch diese Vorschrift jedem $x \in D_f$ genau derjenige Wert $y \in W_f$ zugeordnet wird, der auch durch $y = f(x)$ diesem $x \in D_f$ zugeordnet wird.*

Beispiel 5.33
$x = 2t - 1, \qquad t = \frac{x+1}{2}, \qquad t \in \mathbb{R}$

$y = \sin t, \qquad \Longrightarrow \qquad y = f(x) = \sin \frac{x+1}{2}, \qquad D_f = \mathbb{R}$

Beispiel 5.34 *koordinatenweise Darstellung einer Geraden im* $\mathbb{R}^2$
$x = x_1 + t(x_2 - x_1), \qquad t = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \qquad t \in \mathbb{R}$

$y = y_1 + t\,(y_2 - y_1)\,,$

$\Longrightarrow \qquad y = f(x) = y_1 + \frac{(y_2-y_1)}{x_2-x_1}(x - x_1), \qquad D_f \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow \qquad y = f(x) = \frac{(y_2-y_1)}{x_2-x_1}x + y_1 - x_1\frac{(y_2-y_1)}{x_2-x_1}$

$\Longrightarrow \qquad y = f(x) = \quad mx \quad + \quad n$

Ausgehend von der Parameterdarstellung einer Kurve erhält man bei der Elimination des Parameters eine implizite Gleichung der Form $F(x, y) = 0$. Erstrebenswert, jedoch nicht immer oder nicht eindeutig möglich, ist die Auflösung von $F(x, y) = 0$ in eine explizite Funktionsgleichung $y = f(x)$. Um Eindeutigkeit zu erreichen, müssen Einschränkungen für den Definitionsbereich von t getroffen werden.

Beispiel 5.35 *Kreisgleichungen:* $0 \le t \le 2\pi$

$$\left\{ \begin{array}{c} x = R\cos(t) + x_0 \\ y = R\sin(t) + y_0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x - x_0)^2 = R^2\cos^2(t) \\ (y - y_0)^2 = R^2\sin^2(t) \end{array} \right\}$$

$$\Longleftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = R^2$$

Beispiel 5.36 *Ellipsengleichungen:* $0 \le t \le 2\pi$

$$\left\{ \begin{array}{c} x = a\cos(t) + x_0 \\ y = b\sin(t) + y_0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x - x_0)^2 = a^2\cos^2(t) \\ (y - y_0)^2 = b^2\sin^2(t) \end{array} \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

5.8 Skalare Funktionen mit zwei unabhängigen Veränderlichen

Aus dem 1. Semester ist der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ bekannt: Es ist die Menge der geordneten Tripel $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)^T$ reeller Zahlen. Jedem geordneten Tupel entspricht ein Punkt der $x-y-$Ebene 3-dimensionalen Raumes mit den Koordinaten $(x_1, x_2)^T$. Bekannt ist weiterhin der Abstand des Punktes $\overrightarrow{x}$ vom Ursprung: $|\overrightarrow{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Dieser Abstand entspricht der Zuordnung einer reellen Zahl zu dem Punkt $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2$.

Definition 5.24 *Es sei D_f eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2 : D_f \subseteq \mathbb{R}^2$. Wenn durch eine Vorschrift jedem Punkt $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)^T \in D_f$ genau eine reelle Zahl $y \in W_f \subseteq \mathbb{R}$ zugeordnet wird, so ist durch die Vorschrift auf D_f eine reelle Funktion von 2 unabhängigen Veränderlichen x_1, x_2 mit dem Wertebereich W_f erklärt.*
explizite Form: $y = f(x_1, x_2) = f(\overrightarrow{x}) = f(P)$
implizite Form: $F(x_1, x_2, y) = F(\overrightarrow{x}, y) = 0$

Beispiel 5.37 $f(\overrightarrow{x}) = |\overrightarrow{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

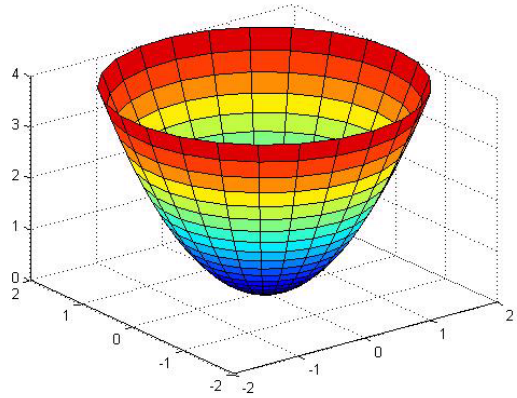
Beispiel 5.38 $T(x, y)$: *Temperatur im Punkt $(x, y)^T$ der Landkarte, der der Temperatur an diesem Geländepunkt auf einer festen Messhöhe zu einer festen Zeit t entspricht*

Beispiel 5.39 $p(x, y)$: *Luftdruck im Punkt $(x, y)^T$ eines Geländestückes auf einer festen Messhöhe zu einer festen Zeit t*

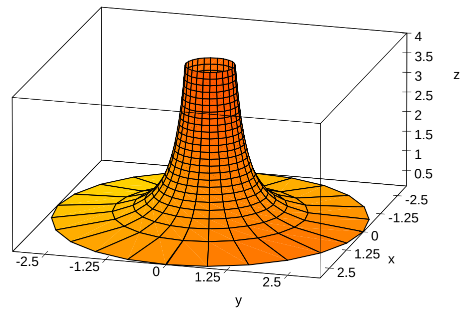
5.8.1 Geometrische Veranschaulichung skalarer Funktionen von zwei Veränderlichen

Bei Funktionen mit nur zwei unabhängigen Veränderlichen kann eine Darstellung im $\mathbb{R}^3$ erfolgen. Der Funktionswert wird als Höhe über dem Punkt aus dem Definitionsbereich dargestellt. Die Funktion wird damit zu einem „Gebirge" über dem Definitionsbereich.

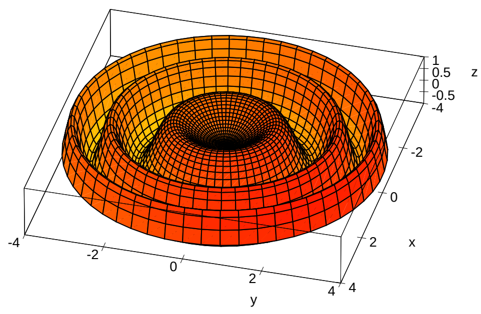
Beispiel 5.40 $z = x^2 + y^2$



Beispiel 5.41 $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$



Beispiel 5.42 $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$



5.8.2 Grenzwerte und Stetigkeit skalarer Funktionen von zwei Veränderlichen*

Definition 5.25 *Die Funktion $f(x,y)$ sei mindestens in einer Umgebung U_{P_0} des Punktes $P_0 = (x_0, y_0)^T \in D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Ausnahme von P_0 definiert. Dann hat f in P_0 den Grenzwert α, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $P = (x,y)^T \in D_f$ mit $d(P, P_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ gilt $|f(x,y) - \alpha| < \varepsilon$.*

Schreibweise: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \alpha$ *oder* $\lim\limits_{P\to P_0} f(x,y) = \alpha$

Definition 5.26 *Die Funktion $f(\overrightarrow{x})$ heißt im Punkt $P^0 = \overrightarrow{x}^0$ stetig, wenn*

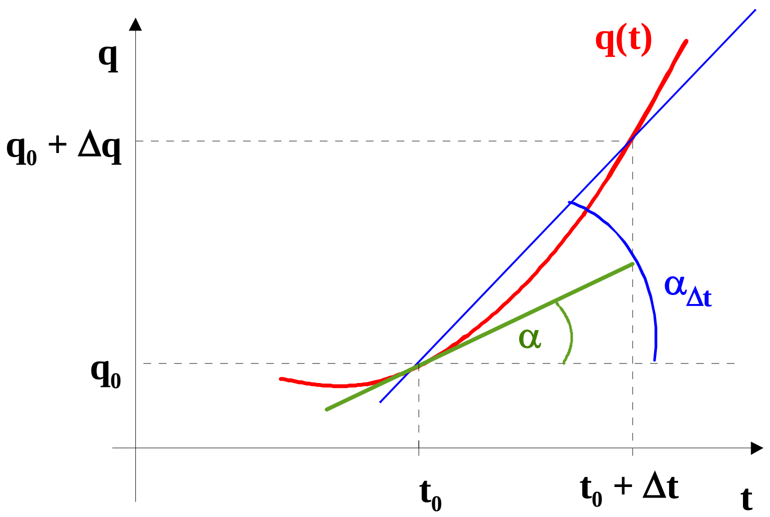
a) $P^0 \in D_f$ *und*
b) $\lim\limits_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{x}^0} f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x}^0)$ *gilt.*

6 Differentiation

Es wird zunächst nur die Differentiation von Funktionen einer Veränderlichen betrachtet.

6.1 Der Ableitungsbegriff

Man betrachte die durch einen Leiterquerschnitt fließende Ladungsmenge $q(t)$ als Funktion der Zeit.



Für die mittlere elektrische Stromstärke im Zeitintervall $[t_0, t_0 + \triangle\, t]$ gilt:

$$\tilde{i} = \frac{\triangle\, q}{\triangle\, t} = \underbrace{\frac{q(t_0 + \triangle\, t) - q(t_0)}{\triangle\, t}}_{\text{Differenzenquotient}} = \underbrace{\tan \alpha_{\triangle t}}_{\text{Anstieg der Sekante}}$$

Abstraktion führt mit $\triangle\, t \to 0$ zur *momentanen elektrischen Stromstärke* i_0*:*

$$i_0 = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle\, q}{\triangle\, t} = \underbrace{\lim_{\triangle t \to 0} \frac{q(t_0 + \triangle\, t) - q(t_0)}{\triangle\, t}}_{\substack{\text{Differentialquotient,} \\ \text{Ableitung bei } t = t_0}} = \underbrace{\tan \alpha}_{\substack{\text{Anstieg der} \\ \text{Tangenten in } t_0}}$$

Definition 6.1 *$y = y(x)$ sei definiert in $U_\varepsilon(x_0)$. Existiert ein endlicher Grenzwert* $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, *so heißt dieser Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0*

Schreibweisen : $f'(x)|_{x=x_0}, \quad f'(x_0), \quad y'(x_0), \quad \frac{dy}{dx}|_{x_0}$

Bemerkung 6.1 *Beim rechtsseitigen (linksseitigen) Grenzwert gilt* $h \to 0+0$ *(bzw.* $h \to 0-0$*).*

Bemerkung 6.2 *Rechts- bzw. linksseitiger Grenzwert können verschieden sein:*
z.B.: $y = |x| \,:\, f'_+(0) = 1$ *und* $f'_-(0) = -1$

Bemerkung 6.3 $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = a \Longleftrightarrow f'(x_0) = a$

Ableitungen der Grundfunktionen: siehe Tafelwerke

Satz 6.1 $f(x)$ *ist differenzierbar in* $x_0 \Rightarrow f(x)$ *ist stetig in* x_0.

Bemerkung 6.4 *Aus der Stetigkeit folgt nicht die Differenzierbarkeit, siehe* $y = |x|$ *.*
(Stetig bedeutet "keine Sprünge", differenzierbar bedeutet "glatt").

6.2 Allgemeine Differentiationsregeln

Satz 6.2 $u = u(x)$ *und* $v = v(x)$ *seien differenzierbar in* x_0*, dann gilt im Punkt* x_0*:*

- $(u \pm v\,)' = u' \pm v'$
- $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
- $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Bemerkung 6.5 $(cu)' = cu'$ *für* $c \in \mathbb{R}$ *und* $(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$

Satz 6.3 *(Kettenregel)*
$g(x)$ *sei differenzierbar in* x_0, $f(z)$ *sei differenzierbar bei* $z = g(x_0)$. $\Rightarrow F(x) = f(g(x))$ *ist differenzierbar in* x_0. *Es gilt:*

$$[f(g(x))]'|_{x=x_0} \quad = \quad \underbrace{f'(g(x))|_{x=x_0}}_{\substack{\text{Ableitung der} \\ \text{äußeren Funktion}}} \quad \cdot \quad \underbrace{g'(x_0)}_{\substack{\text{Ableitung der} \\ \text{inneren Funktion}}}$$

Differentialschreibweise: $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

Beispiel 6.1 $f(x) = x^2 + ex + \ln 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f'(x) = 2x + e$

Beispiel 6.2 $y = e^{\cos x} \sin x \qquad \Longleftrightarrow \qquad u = e^{\cos x}, \qquad v = \sin x$
$\Longrightarrow y' = u'v + uv' = e^{\cos x}(-\sin x)\sin x + e^{\cos x}\cos x$

Beispiel 6.3 $y = \ln(\ln x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}$

Satz 6.4 *(logarithmische Differentiation)*
Es gilt $f'(x) = f(x) \cdot (\ln|f(x)|)'$.

Beispiel 6.4 $\quad y = x^x \qquad x > 0$
$y' = x^x(\ln x^x)' = x^x(x \ln x)' = x^x(1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1)$

Satz 6.5 *Es seien* $y = f(x)$ *und* $x = f^{-1}(y) = g(y)$ *Umkehrfunktionen.*
$\Rightarrow g'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Beispiel 6.5 $y = f(x) = \tan x, \qquad x = g(y) = \arctan y$

$g\prime(y) = (\arctan y)' = \frac{1}{f\ '(x)} = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$

$\Longrightarrow \qquad \frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1 + x^2}$

Satz 6.6 *Differentiation einer Funktion in Parameterdarstellung*
$f(x)$ *sei gegeben durch* $x = \varphi(t), y = \psi(t)$; $\varphi(t), \psi(t)$ *seien differenzierbar,* $\varphi'(t) \neq 0$.
Dann gilt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Beweis: $y = f(x) = f(\varphi(t)) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{df}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \qquad$ *(Kettenregel)*

Beispiel 6.6 *Ellipse:* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad x = a\cos t; \qquad y = b\sin t$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{b\cos t}{a\sin t} = -\frac{b \cdot \frac{x}{a}}{a \cdot \frac{y}{b}} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$

6.3 Ableitungen höherer Ordnung

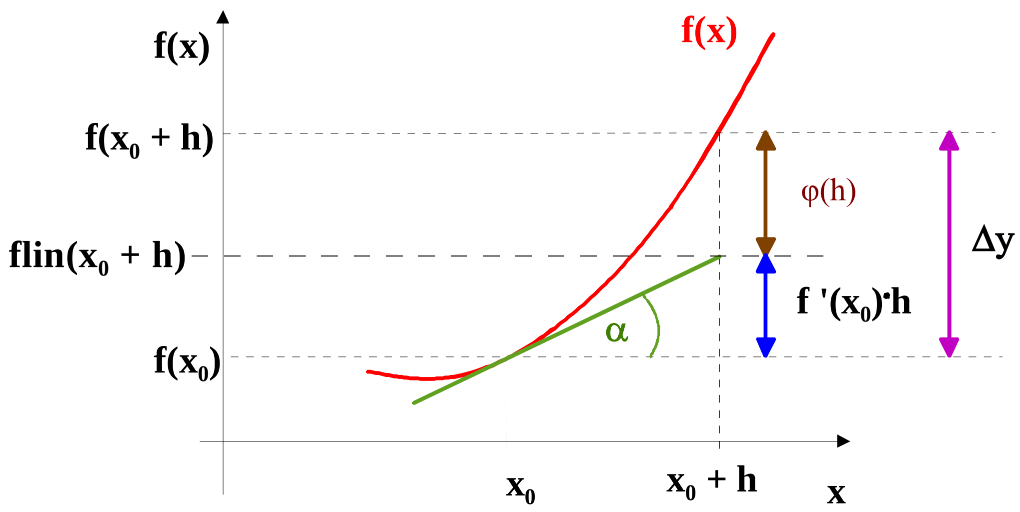
Definition 6.2 *$f(x)$ sei auf (a, b) differenzierbar. Dann gilt:*
2. Ableitung: $f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x)$
n-te Ableitung allgemein: $f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

Beispiel 6.7 $f(x) = e^x \qquad f^{(i)}(x) = e^x \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$

Bemerkung 6.6 *Die Existenz der k-ten Ableitung von f in x_0 garantiert die Existenz aller Ableitungen niedrigerer Ordnung in x_0 . Die Umkehrung gilt nicht.*

6.4 Das Differential

Definition 6.3 *$f(x)$ sei definiert in $U(x_0)$. Es existiere $f'(x_0)$.*
Es sei $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, so dass $x_0 + h \in U(x_0)$.



$$\triangle\, y = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + \varphi(h) \quad \textit{mit} \;\; \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0$$

Definition 6.4 *Die Größe $dy = f'(x_0) \cdot h$ heißt Differential der Funktion f an der Stelle x_0.(Schreibweise auch: $df = f'(x_0) \cdot dx$)*

Interpretation:

1. df ist der lineare Anteil von $\triangle\, y$, d.h. bei linearen Funktionen gilt $\triangle\, y = dy$.

2. $f'(x_0)$ ist der "Differentialquotient" $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ im Sinne von "Quotient der Differentiale".

3. Differentiale sind keine infinitesimalen Größen, sondern konkrete Zahlen. In diesem Sinn kann man mit Differentialen wie mit Zahlen rechnen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \Rightarrow y' = \frac{1}{x'}$$

Anwendung in der Fehlerrechnung:

Gegeben sei $f(x)$, gemessen wird x_0 mit der Messgenauigkeit $\triangle x$.

$$f(x) = f(x_0 \pm \triangle x) = f(x_0) \pm \triangle f$$

Wie groß ist $\triangle f$?

$$\triangle f \approx df = f'(x_0) \cdot dx \qquad \text{mit } dx = \triangle x$$

df ist eine Näherung für eine Schranke des absoluten Fehlers

Beispiel 6.8 *Volumen eines Würfels:* $V = a^3 \qquad a = 5cm \pm 0.1cm$

$|\triangle V| \leq 5.1^3 cm^3 - 5^3 cm^3 = 7.651 cm^3$

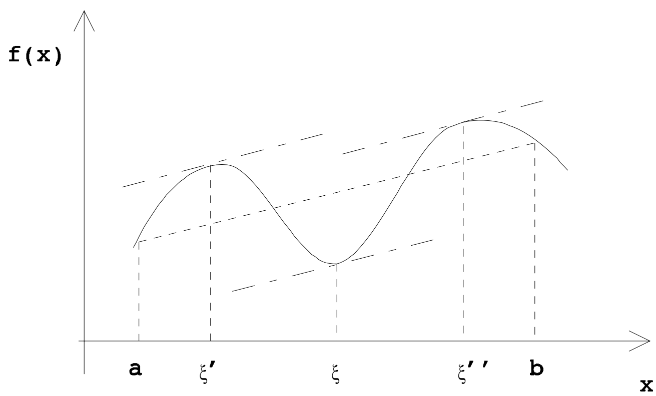
$|\triangle V| \lesssim |dV| \leq 3a^2 \cdot |\triangle a| = 3 \cdot 25cm^2 \cdot 0.1cm = 7.5cm^3$

6.5 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz 6.7 *$f(x)$ sei stetig auf $[a, b]$, differenzierbar in (a, b)*

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a, b) \mid f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Interpretation:



In ξ hat f den gleichen Anstieg wie die Sekante.

Folgerung 6.1 *$f(x), g(x)$ stetig auf $[a,b]$; $f'(x) = g'(x)\ \forall x \in (a,b)$;*
Betrachte $h(x) = f(x) - g(x)$:

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = h'(\xi) = 0 \quad \textit{wegen } f\ '(x) = g'(x)$$

$\Rightarrow h(x) = h(a) \quad \forall x \in (a,b)$
$\Rightarrow f(x) - g(x) = h(a) = const.$
D.h. die beiden Funktionen unterscheiden sich nur um eine Konstante

6.6 Die Regel von BERNOULLI und L'HOSPITAL

Satz 6.8 *$f(x)$ und $g(x)$ seien in $U(x_0)$ differenzierbar. Es gelte $g'(x_0) \neq 0$.*
Wenn $f(x) \to 0,\ g(x) \to 0$ und $\exists \lim_{x\to x_0} \dfrac{f\ '(x)}{g'(x)}$ so gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Der Satz gilt auch für einseitige Ableitungen, für $x \to \pm\infty$
und für $f(x) \to \pm\infty, g(x) \to \pm\infty$.

Bemerkung 6.7 *Grenzwerte vom Typ $0{\cdot}\infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ werden auf den Fall $\frac{0}{0}$ zurückgeführt.*

Beispiel 6.9 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \qquad (Typ:\ „\frac{0}{0}")$

Beispiel 6.10 $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{x}{2\sqrt{x-1}} = +\infty \qquad (Typ:\ „\frac{0}{0}";\ \textit{einseitig})$

Beispiel 6.11 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0 \qquad (Typ:\ „\frac{\infty}{\infty}")$

Beispiel 6.12 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x}\ „=" \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+\cos x}{1} = ?$
„=" verliert seinen Sinn, wenn der Grenzwert letztlich nicht existiert
Andererseits gilt: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} (1 + \dfrac{\sin x}{x}) = 1$

6.7 Der Taylor'sche Satz

Satz 6.9 *$f(x)$ sei $(n+1)$-mal stetig differenzierbar auf $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$, $x = x_0+h$, $x \in [a,b]$, $\theta \in (0,1)$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}f''(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n \\
&= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + ... + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + R_n \quad \textit{mit} \\
R_n &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)) \quad (\textit{LAGRANGE}) \quad \textit{bzw.} \\
R_n &= \frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)) \quad (\textit{CAUCHY}).
\end{aligned}$$

$R_n = R_n(x)$ heißt Restglied. Es gibt die Differenz von $f(x)$ zu einem Polynom n-ter Ordnung an.

Bemerkung 6.8 *Da nur $\theta \in (0,1)$ bekannt ist, muß R_n oft abgeschätzt werden.*

Beispiel 6.13 $f(x) = e^x$; $f^{(k)}(x) = e^x$ *für* $k \in \mathbf{N}$
$x_0 = 0$, $h = x - x_0 = x$

$f(x) = e^x = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0) + ... + R_n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + ... + \frac{1}{n!}x^n + R_n$

$R_n = \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}e^{\theta x}$; $0 < \theta < 1$

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 6.9 *Für beliebige Funktionen $f(x)$ muss nicht $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ gelten. Das Gebiet, in dem diese Beziehung erfüllt ist, heißt Konvergenzgebiet.*

Bemerkung 6.10 *Hauptanwendungsgebiete:*
- Ersetzen einer Funktion durch ein Polynom,
- Berechnung von Funktionswerten transzendenter Funktionen (Taschenrechner)

Beispiel 6.14 *zur Anwendung:*
Man beachte stets, dass x aus einer kleinen Umgebung von x_0 und aus dem Konvergenzbereich gewählt wird.
$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$; $x_0 = 0$

$\sqrt{1.01} = 1.00498.... \approx 1 + 0.005$

$\sqrt{50} = 7.07106... = \sqrt{\frac{49}{49}50} = 7\sqrt{\frac{50}{49}} \approx 7(1 + \frac{1}{2\cdot 49}) = 7.0714$

aber $\sqrt{50} = \sqrt{1+49} \approx 1 + 24.5$ *ist unsinnig.*

6.8 Untersuchung von Funktionen mit Hilfe der Ableitungen

6.8.1 Monotonie, relative Extrema

Satz 6.10
a) Ist $f(x)$ in einem Intervall I differenzierbar und monoton wachsend (fallend), so gilt dort $f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0)$.
b) Gilt in einem Intervall I stets $f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0)$, so ist $f(x)$ dort streng monoton wachsend (fallend).

Bemerkung 6.11 *Bei $f'(x_0) = 0$ kann ein Extremwert vorliegen*

Bemerkung 6.12 *Bei $f'(x) = 0$ in $U(x_0)$ ist die strenge Monotonie verletzt.*

Definition 6.5 *Es sei $f = f(x)$, $D_f \subseteq \mathbb{R}$, $f(x_0)$ heißt relatives Maximum (Minimum) von f, wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, in der $f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$ gilt.*

Satz 6.11 *$f(x)$ sei bei x_0 differenzierbar und habe dort ein relatives Extremum $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$.*

Bemerkung 6.13 *Die Umkehrung gilt nicht !!*

Beispiel 6.15 $f(x) = x^3, \quad x_0 = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 3x_0^2 = 0,$ *aber x_0 ist Terassenpunkt.*

Mit $f'(x_0) = 0$ können *extremwertverdächtige Punkte* gefunden werden.

Satz 6.12 *f sei in $U(x_0)$ stetig differenzierbar bis zur n-ten Ableitung, $n \geq 2$.*
$f^{(n)}(x)$ sei die erste von Null verschiedene Ableitung in x_0 .
*Ist **n gerade**, so gilt : aus $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ relatives Maximum bei x_0*
aus $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ relatives Minimum bei x_0
*Ist **n ungerade**, so liegt bei x_0 kein relatives Extremum vor.*

Beispiel 6.16 $f(x) = x^3, \quad x_0 = 0, \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x \quad f'''(x) = 6$
$\Rightarrow f'(x_0) = 0,$ x_0 *ist extremwertverdächtiger Punkt.*
$\Rightarrow f''(x_0) = 0, \quad f'''(x_0) = 6,$ *kein Extremum bei x_0*

6.8.2 Konvexität, Wendepunkte

Satz 6.13 *Für zweifach differenzierbare Funktionen gilt:*
f *ist konvex über* $[a, b] \Longleftrightarrow f\,''(x) \geq 0$ *über* $[a, b]$
f *ist konkav über* $[a, b] \Longleftrightarrow f\,''(x) \leq 0$ *über* $[a, b]$

Definition 6.6 *Wechselt* $f(x)$ *in* x_0 *zwischen konvexem und konkavem Verhalten, so liegt bei* x_0 *ein Wendepunkt vor.*

Satz 6.14 f *sei zweifach differenzierbar in* $U(x_0)$ *und habe einen Wendepunkt bei* x_0
$\Rightarrow f\,''(x_0) = 0$

Satz 6.15 $f(x)$ *hat einen Wendepunkt bei* $x_0 \Longleftrightarrow x_0$ *ist Extremalpunkt von* $f\,'(x)$.

Bemerkung 6.14 $f\,'(x_0)$ *gibt den Anstieg der Wendetangente an.*

6.8.3 Kurvendiskussion

Inhalt einer umfassenden Kurvendiskussion:

1. Definitionsgebiet
2. Symmetrie, Periodizität
3. Verhalten an den Randpunkten des Definitionsgebietes
4. Achsenschnittpunkte
5. Unstetigkeitsstellen
6. Extremwerte
7. Wendepunkte
8. Skizze
9. Wertevorrat

Beispiel 6.17 *für eine Kurvendiskussion*

$$f(x) = \frac{4x-2}{x^2+4x} = \frac{4(x-0.5)}{x(x+4)}$$

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4; 0\}$

2. $f(-x) = \frac{-4x-2}{x^2-4x} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) \text{ ist nicht gerade} \\ f(x) \text{ ist nicht ungerade} \end{array}$

3. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ (Annäherung von oben)
   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (Annäherung von unten)
   $\lim_{x\to 0+0} f(x) = -\infty$ $\quad\lim_{x\to 0-0} f(x) = +\infty$
   $\lim_{x\to -4+0} f(x) = +\infty$ $\quad\lim_{x\to -4-0} f(x) = -\infty$

4. $x \neq 0$ entsprechend 1. $\Rightarrow$ kein Schnittpunkt mit der y-Achse
   $f(x) = 0 \Rightarrow 4(x-0.5) = 0 \Rightarrow x = 0.5$

5. ungerader Pol bei $x_{p1} = 0$ und $x_{p2} = -4$

6. $0 = f\,'(x) = \frac{4(x^2+4x)-(4x-2)(2x+4)}{x^2(x+4)^2} = \frac{4x^2+16x-8x^2-16x+4x+8}{x^2(x+4)^2} = \frac{-4x^2+4x+8}{x^2(x+4)^2}$
   $0 = -4\frac{(x+1)(x-2)}{x^2(x+4)^2} \quad\Rightarrow\quad x_1 = -1; \quad x_2 = 2$ sind extremwertverdächtig.

   $f\,''(x) = \frac{4x(2x^4+5x^3-24x^2-64x-64)}{x^4(x+4)^4} \quad\Rightarrow\quad f\,''(-1) = \frac{4}{3} > 0 \quad\Rightarrow\quad \mathit{Extremum}$:
   $\Rightarrow f\,''(2) = < 0 \quad\Rightarrow\quad \mathit{Extremum}$
   Insgesamt ergibt sich:
   Minimum bei $x_1 = -1$ mit dem Funktionswert $f(x_1) = 2$
   Maximum bei $x_2 = 2$ mit dem Funktionswert $f(x_2) = 0.5$

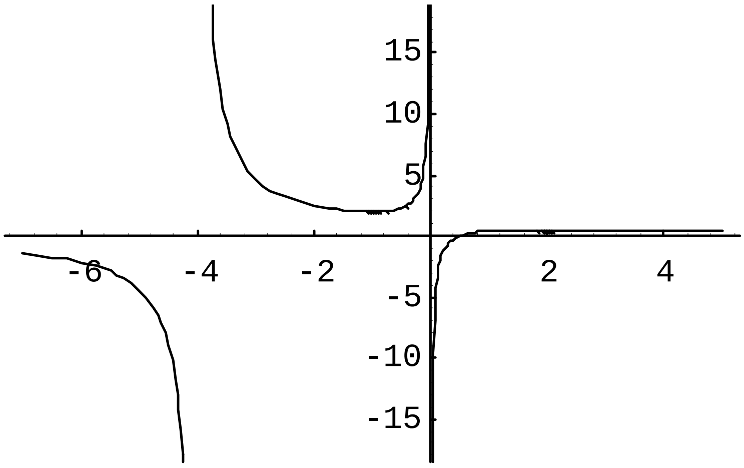
7. $0 = \left(\frac{4x(2x^4+5x^3-24x^2-64x-64)}{x^4(x+4)^4}\right) = \frac{4x(x+4)(x-3.703)(2x^2+4.406x+4.1315)}{x^4(x+4)^4}$

   $\Rightarrow$ wendepunktverdächtig sind: $x_{w1} = 0 \quad x_{w2} = -4; \quad x_{w3} = 3.703;$
   aber $x_{w1} \notin D_f, \quad x_{w2} \notin D_f$

   $f\,'''(x) = -12\frac{2x^4+5x^3-24x^2-64x-64}{x^4(x+4)^4} + \frac{4}{x^3}\frac{8x^3+15x^2-48x-64}{(x+4)^4} - \frac{16}{x^3}\frac{2x^4+5x^3-24x^2-64x-64}{(x+4)^5}$

   $f\,'''(3.703) = 8.2866 \times 10^{-3}$
   Insgesamt ergibt sich:
   Wendepunkt bei $x_{w3} = 3.703$; mit dem Funktionswert $f(x_{w3}) = 0.45$

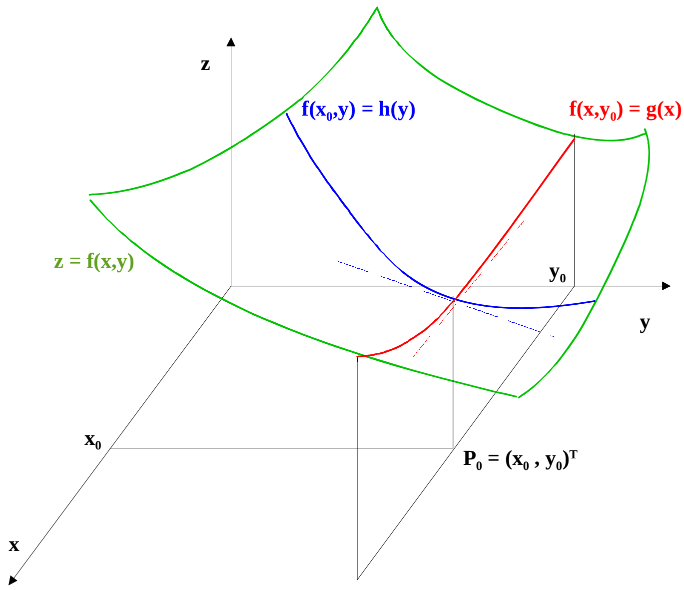
8.



9. $W_f = (-\infty; 0.5] \cup [2; \infty)$

6.9 Partielle Ableitungen von skalaren Funktionen von zwei Veränderlichen

6.9.1 Partielle Ableitungen 1. Ordnung



Für festes x_0 bzw. y_0 sind die Funktionen $g(x) = f(x, y_0)$ und $h(y) = f(x_0, y)$ von einer Veränderlichen abhängig und können in der bekannten Weise differenziert werden:

$$\left.\frac{\partial f(x,y_0)}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \frac{dg(x)}{dx} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{g(x_0+\triangle x)-g(x_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\triangle x}$$
$$\left.\frac{\partial f(x_0,y)}{\partial y}\right|_{y=y_0} = \frac{dh(y)}{dy} = \lim_{\triangle y\to 0}\frac{h(y_0+\triangle y)-h(y_0)}{\triangle y} = \lim_{\triangle y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\triangle y)-f(x_0,y_0)}{\triangle y}.$$

Diese beiden Grenzwerte charakterisieren das Anstiegsverhalten der Funktion $f(x,y)$ im Punkt $P_0=(x_0,y_0)^T$ in x- bzw. y-Richtung. Sie heißen partielle Ableitungen nach x bzw. y. Ist $f(x,y)$ differenzierbar für alle $(x,y)\in M\subseteq\mathbb{R}^2$, so sind die partiellen Ableitungen selbst wieder Funktionen von x und y. Partielle Ableitungen lassen sich analog bei Funktionen mit n Veränderlichen definieren.
Die Ableitungsregeln sind entsprechend der Definition analog zu den Regeln bei der Ableitung von Funktionen einer Veränderlichen.
Es sei $u=u(x,y);\quad v=v(x,y);\quad f=f(t)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u\pm v)}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\pm\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial(u\cdot v)}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}v+u\frac{\partial v}{\partial x}\\ \left(\frac{u}{v}\right)_x &= \frac{u_xv-uv_x}{v^2}\\ \frac{\partial f(u(x,y))}{\partial x} &= \frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\qquad (Kettenregel).\end{aligned}$$

Beispiel 6.18 $z=f(x,y)=ax+by+c;\quad a,b,c\in\mathbb{R}$

$z_x=a;\qquad z_y=b$

Beispiel 6.19 $z=f(x,y)=3x^2y^4$

$z_x=6xy^4\qquad z_y=12x^2y^3$

6.9.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Es sei $f(\overrightarrow{x})=f(x_1,x_2)$, $\overrightarrow{x}\in G\subseteq\mathbb{R}^2$. Existiert $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ im gesamten Gebiet G, so ist diese Funktion wieder von den n Veränderlichen abhängig und möglicherweise differenzierbar:

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l};\quad k,l=1,2$$

Diese Ableitung heißt partielle Ableitung 2. Ordnung. Analog werden partielle Ableitungen beliebiger, endlicher Ordnung definiert.

Beispiel 6.20 $f = f(x,y); \quad n = 2$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

Für gemischte partielle Ableitungen 2. Ordnung gilt der Satz von SCHWARZ (1843 - 1921):

Satz 6.16 *Satz von SCHWARZ:*
Es sei $f = f(x,y)$. f_{xy} *und* f_{yx} *seien stetig in der offenen Menge* $G \subseteq \mathbb{R}^2$. *Dann gilt*

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y).$$

Beispiel 6.21 $z = z(x,y) = x^y$

$$z_x = yx^{y-1} \qquad z_y = x^y \ln x$$

$$z_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x \qquad z_{yx} = yx^{y-1}\ln x + x^y\frac{1}{x}$$
$$z_{xy} = x^{y-1}(1 + y\ln x) \qquad z_{yx} = x^{y-1}(y\ln x + 1)$$

7 Integration

Es wird zuerst nur die Integration von Funktionen einer Veränderlichen betrachtet.

7.1 Unbestimmtes Integral

7.1.1 Definition, Bezeichnungen

Bekannt: Übergang von der im Leiterquerschnitt fließenden Ladungsmenge $q(t)$ zur elektrischen Stromstärke:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}: \quad \text{Differentialquotient.} \quad (*)$$

Problem: Kann man diesen Weg in umgekehrter Richtung beschreiten? Also sei gegeben $i(t)$ und gesucht $q(t)$, d.h. findet man eine Funktion $q(t)$, deren Ableitung mit der gegebenen Funktion $i(t)$ zusammenfällt?
Sei z.B. $i(t) = 1 = const.$, so erfüllen die Funktionen $q_1(t) = t + 3,\ q_2(t) = t - 10$,.... die Gleichung $(*)$.

Definition 7.1 *Gegeben sei $f(x)$ mit $D_f = (a, b)$. Jede Funktion $F(x)$ mit $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$ heißt Stammfunktion von $f(x)$ auf (a, b).*

Satz 7.1 *Stammfunktionen sind eindeutig bis auf eine additive Konstante.*
Beweis: $F(x),\ \widetilde{F}(x)$ seien Stammfunktionen von $f(x)$.
$\Longrightarrow F'(x) = f(x), \quad \widetilde{F}'(x) = f(x)$
$\Longrightarrow \frac{d}{dx}(F(x) - \widetilde{F}(x)) = 0$
$\Longrightarrow F(x) - \widetilde{F}(x) = C$ *wegen Mittelwertsatz der Differentialrechnung.*

Definition 7.2 *Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion $f(x)$ heißt unbestimmtes Integral von $f(x)$.*
Bezeichnung: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Satz 7.2 *Für jede stetige Funktion existiert eine Stammfunktion.*

Bemerkung 7.1 *Die Klasse der integrierbaren Funktionen umfasst die stetigen Funktionen.*

Beispiel 7.1 $\int \sin x dx = -\cos x + C$

Beispiel 7.2 $\int x^\alpha dx = \dfrac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1$

7.1.2 Grundintegrale

1. $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1$

2. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C = \ln|cx|$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (\int e^x dx = e^x + C)$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$

6. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

7.1.3 Allgemeine Integrationsregeln

$$\begin{aligned} 1. \quad \int k \cdot f(x)dx &= k \cdot \int f(x)dx,\ k \in \mathbb{R} \\ 2. \quad \int [f(x) + g(x)]dx &= \int f(x)dx + \int g(x)dx \end{aligned}$$

Diese beiden Regeln werden zusammen als Linearität des unbestimmten Integrals bezeichnet.

Beispiel 7.3 $\int \frac{4x^5 + 2x^3 + x - 1}{x^2}dx = \int [4x^3 + 2x + x^{-1} - x^{-2}]dx$
$= x^4 + x^2 + \ln|x| + x^{-1} + C$

Beispiel 7.4 $\int \tan^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \tan x - x + C$

Beispiel 7.5 $\int (2^x + 3^x)^2 dx = \int (2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3^{2x}) dx = \int (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x) dx$

$$= \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C$$

7.1.4 Substitutionsmethode

Ziel: Durch Einführung einer neuen Integrationsvariablen soll ein kompliziertes Integral auf ein Grundintegral oder ein einfacheres bekanntes Integral zurückgeführt werden.

Satz 7.3 *Sei $g(x)$ stetig differenzierbar und $f(x)$ stetig mit der Stammfunktion $F(x)$, so gilt mit der Substitution $u = g(x)$*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(g(x)) + C.$$

Beispiel 7.6 $-\int \cos^5 x \sin x dx = \int \cos^5 x(-\sin x) dx = \frac{1}{6}\cos^6 x + C$
Nebenrechnung: $u = \cos x, \quad \frac{du}{dx} = -\sin x$

Beispiel 7.7 $\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + C$
Nebenrechnung: $u = x^2 + 1, \quad \frac{du}{dx} = 2x$

Oft lässt sich die Ableitung der inneren Funktion durch Addition von oder Multiplikation mit Konstanten herstellen:

Beispiel 7.8 $\int \frac{2x}{x^2+2x+1} dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1} dx - \int \frac{2}{x^2+2x+1} dx$

$$= \int \frac{1}{u} du - 2\int (x+1)^{-2} dx = \ln|u| - 2\int v^{-2} dv$$

$$= \ln|x^2+2x+1| + 2(x+1)^{-1} + C$$

Nebenrechnung: $u = x^2 + 2x + 1, \quad \frac{du}{dx} = 2x + 2; \qquad v = x + 1, \quad \frac{dv}{dx} = 1$

Beispiel 7.9 $\int (\frac{x}{2} + 5)^3 dx = 2\int \frac{1}{2}(\frac{x}{2}+5)^3 dx = 2\int u^3 du = \frac{2}{4}u^4 + C = \frac{1}{2}(\frac{x}{2}+5)^4 + C$
Nebenrechnung: $u = \frac{x}{2} + 5, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$

Andererseits gilt mit der eineindeutigen Substitution $u = g(x)$: und $x = g^{-1}(u)$

$\int f(g(x))dx = \int f(u)\frac{du}{du}dx = \int f(u)\frac{dx}{du}du = \int f(u)\frac{1}{u'}du$

Beispiel 7.10 $\int xe^{-x^2}dx = \int xe^u \frac{1}{-2x}du = -\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^u + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$
Nebenrechnung: $u = -x^2, \quad u' = -2x$

Beispiel 7.11 $\int \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}dx = \int \dfrac{x}{u^{0.5}}du = \int \dfrac{u-1}{u^{0.5}}du$

$$= \int (u^{0.5} - u^{-0.5})du = \tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + C = \tfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - 2(1+x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \tfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{1}{2}}[1+x-3] + C = \tfrac{2}{3}(1+x)^{\frac{1}{2}}[x-2] + C$$

Nebenrechnung: $u = 1+x, \quad \frac{du}{dx} = 1, \quad x = u-1$

Bemerkung 7.2 *Wird durch Differenzieren die Richtigkeit der Stammfunktion bewiesen, so ist es belanglos, ob die Substitutionsfunktion umkehrbar ist oder nicht.*

Es ist auch möglich, die Gleichung von Satz 7.3 von rechts nach links zu benutzen und die Integrationsvariable selbst zu ersetzen. $x = v(t)$ führt zu folgender Rechnung:

$$\int f(x)dx = \int f(v(t))\tfrac{dv}{dt}dt = \int f(v(t))\tfrac{dx}{dt}dt = \int f(v(t))x'(t)dt$$

Beispiel 7.12 $\int \dfrac{1}{a^2+x^2}dx = \int \dfrac{1}{a^2+a^2t^2}adt = \frac{1}{a}\int \dfrac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{a}\arctan t + C$

$$= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

Nebenrechnung: $x = at, \ \frac{dx}{dt} = a$

Aus der Integration durch Substitution lassen sich mit $f(g(x)) = g(x)$ und $f(g(x)) = \dfrac{1}{g(x)}$ folgende zwei speziellen Integrationsformeln herleiten:

$$\begin{aligned} \int f(x)f\,'(x)dx &= \frac{1}{2}f\,^2(x) + C \\ \int \frac{f\,'(x)}{f(x)}dx &= \ln|f(x)| + C \end{aligned}$$

Beispiel 7.13 $\int \dfrac{dx}{x\ln|x|} = \int \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln|x|}dx = \ln|\ln|x|| + C$

7.1.5 Partielle Integration

Die Regel der partiellen Integration dient zur Integration von Produkten von Funktionen. Sie entsteht aus der Produktregel der Differentiation.
Es seien $u(x), v(x)$ differenzierbare Funktionen. Dann gilt:

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

Beispiel 7.14 $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$
Nebenrechnung: $u = x, \quad u' = 1$
$v' = e^x, \quad v = e^x$

Beispiel 7.15 $\int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$
Nebenrechnung: $u = \ln x, \quad u' = \frac{1}{x}$
$v' = \frac{1}{x}, \quad v = \ln x$

Beispiel 7.16 $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$
Nebenrechnung: $u = x^n, \quad u' = nx^{n-1}$
$v' = e^x, \quad v = e^x$

Zum Abschmelzen von höheren Potenzen in x im Integranden kann die partielle Integration mehrfach hintereinander ausgeführt werden und führt u.U. auf Rekursionsformeln (s. letztes Beispiel). Im Allgemeinen werden Potenzfunktionen zum Differenzieren angesetzt. Eine Ausnahme dazu ist der Fall, dass die Funktion $ln(x)$ im Integranden auftritt. Sie wird stets zum Differenzieren angesetzt, da sie selbst nur mittels partieller Integration integriert werden kann. Sollte sich nach einem Schritt partieller Integration das Integral im Schwierigkeitsgrad erhöht haben, so ist ein neuer Versuch mit vertauschten Funktionen u und v zu unternehmen

7.1.6 Klassen integrierbarer Funktionen

1. Rationale Funktionen, im Folgenden mit $\Re$ bezeichnet
2. $\Re(x, \sqrt[n]{ax+b})$
3. $\Re\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$
4. $\Re(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x)$
5. $\Re(e^x)$
6. $\Re(x, \sqrt{a^2 - x^2})$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Geeignete Substitutionen für die Fälle 2 bis 6 sind in den Tafelwerken zu finden. In allen Fällen ist mit der Integrierbarkeit der rationalen Funktionen auch die Integrierbarkeit der Klassen 2 bis 6 gegeben. Rationale Funktionen haben die Form

$$\begin{aligned} \Re(x) &= g(x) + \frac{p(x)}{q(x)}, \\ g(x), p(x), q(x) &: \textit{Polynome} \\ Grad(p(x)) &< Grad(q(x)). \end{aligned}$$

Gegebenenfalls müssen sie durch Polynomdivision in diese Gestalt gebracht werden. Der ganzrationale Anteil $g(x)$ kann sofort integriert werden. Der echt gebrochen rationale Anteil $\frac{p(x)}{q(x)}$ ist in integrierbare Summanden, die Partialbrüche zu zerlegen.

Satz 7.4 *Für jede echt gebrochen rationale Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ gilt:*

$$\begin{aligned} \frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{A_{11}}{(x-x_1)} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \dots + \\ &+ \frac{A_{j1}}{(x-x_j)} + \frac{A_{j2}}{(x-x_j)^2} + \dots + \frac{A_{jk_j}}{(x-x_j)^{k_j}} + \\ &+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{(x^2 + p_1 x + q_1)} + \dots + \frac{B_{1s_1}x + C_{1s_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}} + \dots + \\ &+ \frac{B_{r1}x + C_{r1}}{(x^2 + p_r x + q_r)} + \dots + \frac{B_{rs_r}x + C_{rs_r}}{(x^2 + p_r x + q_r)^{s_r}} \end{aligned}$$

dabei bezeichnen indizierte Großbuchstaben vorerst unbekannte Konstanten.
$x_1, \dots x_j$ *sind Nullstellen von* $q(x)$ *der Vielfachheit* $k_1, \dots k_j$.
$(x^2 + p_1 x + q_1), \dots (x^2 + p_r x + q_r)$ *sind Teiler von* $q(x)$*, die Paaren konjugiert komplexer Nullstellen mit den Vielfachheiten* $s_1, \dots s_r$ *entsprechen.*

Schritte der Partialbruchzerlegung:

1. Zerlegung des Nenners in Linearfaktoren bzw. Terme der Form $x^2 + px + q$ mit $\frac{p^2}{4} < q$, z.B. mittels Hornerschema
2. Aufstellen des Ansatzes für die Partialbruchzerlegung entsprechend Satz 7.4
3. Bestimmung der Konstanten durch Koeffizientenvergleich oder Einsetzmethode

Beispiel 7.17 $\dfrac{1}{x^2+x-2} = \dfrac{1}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{A}{(x+2)} + \dfrac{B}{(x-1)}$

Koeffizientenvergleich:

$1 = A(x-1) + B(x+2) = x(A+B) + 2B - A$

$$\begin{array}{llllll} \Longrightarrow x^1: & 0 = A+B; & \Longrightarrow & A = -B & & \\ \Longrightarrow x^0: & 1 = 2B - A; & \Longrightarrow & 1 = 3B & \Longrightarrow & B = \frac{1}{3};\quad A = -\frac{1}{3} \end{array}$$

Einsetzmethode:

$1 = A(x-1) + B(x+2)$ *mit* $x = -2$ *ergibt:* $1 = A(-3) \quad \Longrightarrow \quad A = -\frac{1}{3}$

$1 = A(x-1) + B(x+2)$ *mit* $x = +1$ *ergibt:* $1 = B(+3) \quad \Longrightarrow \quad B = +\frac{1}{3}$

$\curvearrowright \dfrac{1}{x^2+x-2} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(x+2)} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(x-1)}$

Beispiel 7.18 $\dfrac{3x^2-8x+1}{(x+2)^2(x+1)} = \dfrac{A}{(x+2)} + \dfrac{B}{(x+2)^2} + \dfrac{C}{(x+1)}$

$$3x^2 - 8x + 1 = A(x+2)(x+1) + B(x+1) + C(x+2)^2$$

$$\begin{array}{llll} x = -1: & 3+8+1 = 12 = C(-1)^2 = C & \Longrightarrow & C = 12 \\ x = -2: & 12+16+1 = 29 = B(-1) = -B & \Longrightarrow & B = -29 \\ x = 0: & 1 = A\cdot 2 - 29\cdot 1 + 12\cdot 4 & \Longrightarrow & A = -9 \end{array}$$

$\curvearrowright \dfrac{3x^2-8x+1}{(x+2)^2(x+1)} = \dfrac{-9}{(x+2)} + \dfrac{-29}{(x+2)^2} + \dfrac{12}{(x+1)}$

Beispiel 7.19 $\dfrac{1}{x^4-1} = \dfrac{1}{(x^2+1)(x^2-1)} = \dfrac{Ax+B}{(x^2+1)} + \dfrac{C}{(x-1)} + \dfrac{D}{(x+1)}$

Beispiel 7.20 $\dfrac{1}{(x+2)(x+1)^3(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{A}{(x+2)} + \dfrac{B}{(x+1)} + \dfrac{C}{(x+1)^2} + \dfrac{D}{(x+1)^3} + \dfrac{Ex+F}{(x^2+1)} + \dfrac{Gx+H}{(x^2+1)^2}$

Bei einfachen Nullstellen führt die Einsetzmethode in der Regel mit geringerem Aufwand zum Ziel. Nach dem Einsetzen der Nullstellen können andere Zahlen aus $\mathbb{R}$ frei gewählt werden. Das entstehende lineare Gleichungssystem hat eine geringere Dimension als dasjenige, das beim Koeffizientenvergleich entsteht.

Bemerkung 7.3 *Mit etwas Übung findet man manchmal kürzere Wege:*

$$\frac{x^4}{(x^2+1)} = \frac{x^4-1}{(x^2+1)} + \frac{1}{(x^2+1)} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2+1)} + \frac{1}{(x^2+1)} = x^2 - 1 + \frac{1}{(x^2+1)}$$

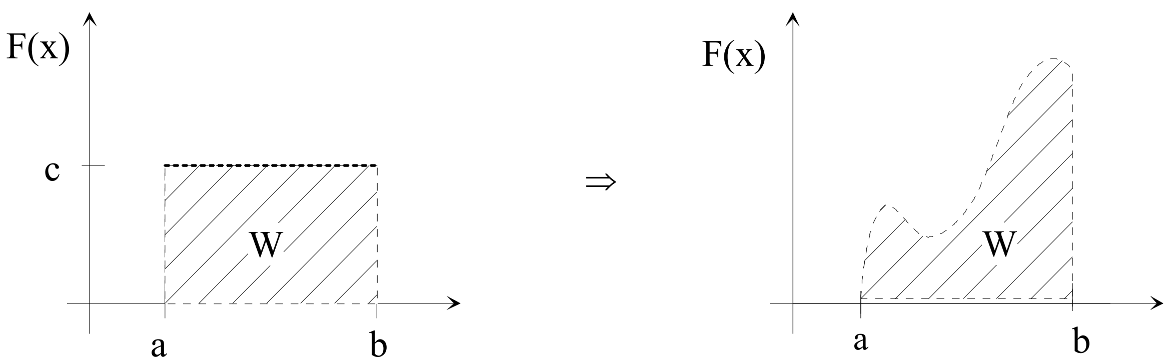
Mit der Partialbruchzerlegung wird die Integration echt gebrochen rationaler Funktionen auf folgende 4 Typen von Integralen zurückgeführt:

1. für einfache Nennernullstellen: $\int \frac{A}{x - x_0} dx = A \ln |x - x_0| + K$
2. für mehrfache Nennernullstellen: $\int \frac{A}{(x - x_0)^k} dx = -\frac{A}{(k-1)(x - x_0)^{k-1}} + K$
3. für 2 konjugiert komplexe Nullstellen:
   $\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{B - \frac{Ap}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctan \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + K$
4. für mehrfache Paare konjugiert komplexer Nullstellen:
   $\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} dx = \int \frac{A}{2} \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^k} dx + \int \frac{B - \frac{Ap}{2}}{(x^2 + px + q)^k} dx$
   $= -\frac{A}{2} \frac{1}{(k-1)(x^2 + px + q)^{k-1}} +$ Rekursionsformel (s. Tafelwerk)

7.2 Das bestimmte Integral

7.2.1 Definition und Eigenschaften

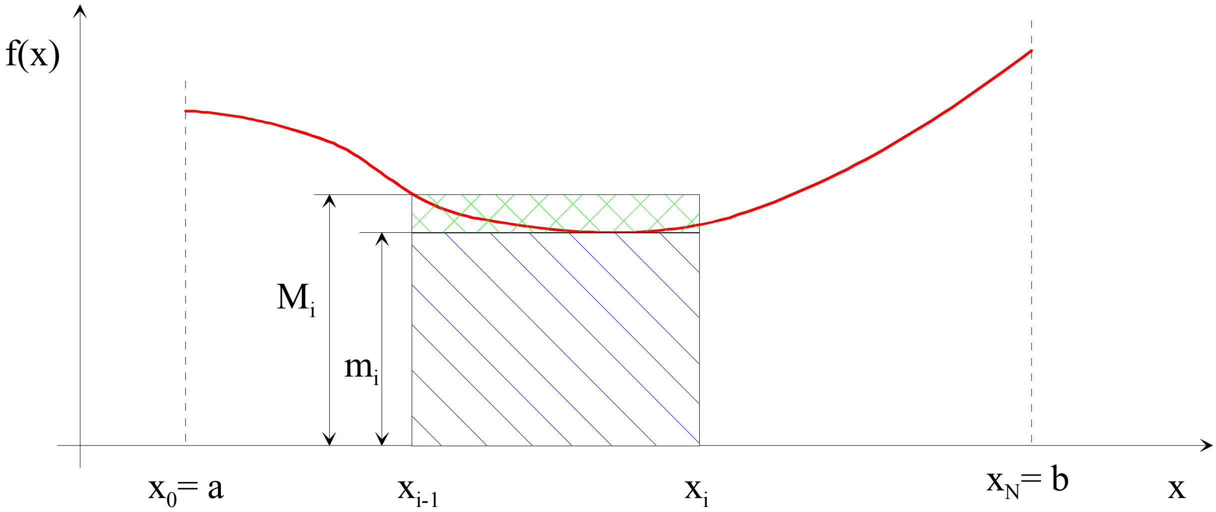
Es sei $F = C = const.$ eine konstante Kraft, die längs des geradlinigen Weges von $x = a$ bis $x = b$ wirkt.
$W = F \cdot (b - a)$ ist dann die mechanische Arbeit, die geleistet werden muss, um einen Massepunkt längs dieses Weges gegen die Kraft zu verschieben. (Bsp. Handwagen, Reibungsarbeit)
<u>Problem</u>: Wie berechnet man die Arbeit, wenn die Kraft F nicht konstant ist?



Diese Frage führt auf das Problem der Berechnung der Fläche zwischen einer Funktion $F(x)$ und der x-Achse.

Prinzip zur Flächenberechnung:

Gegeben sei eine stetige Funktion $f(x) \geq 0$ über dem Intervall $[a,b]$.



Wir benutzen eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$, auch Gitter oder Netz genannt,
$\omega = \{x_i \mid i = 0, 1, ..., N;\ x_0 = a,\ x_N = b;\ h_i = x_i - x_{i-1}\}$,
die das Intervall $[a,b]$ in Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$ aufteilt.

Es sei $\quad m_i = \min\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \qquad M_i = \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

Für die Fläche A zwischen der Kurve und der x-Achse gilt:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i h_i}_{\text{(Untersumme)}} \quad \leq \quad A \quad \leq \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{N} M_i h_i}_{\text{(Obersumme)}}$$

Wir verfeinern die Zerlegung, so dass gilt $\delta = \max\limits_i h_i \to 0$. Zu erwarten ist:

$$\lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{N} m_i h_i \quad = \quad A \quad = \quad \lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{N} M_i h_i \qquad (*)$$

Gilt $(*)$ so folgt aus

$$m_i \quad \leq \quad f(\xi_i) \quad \leq \quad M_i \qquad \text{mit } \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \text{ beliebig}$$

$$\lim_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) h_i \quad = \quad A,$$

weil die Folgen der Unter- bzw. Obersummen eine konvergente Minorante bzw. Majorante mit demselben Grenzwert darstellen. (Beweis: RIEMANN 1826-1866)

Definition 7.3 *$f(x)$ sei beschränkt über $[a,b]$. Liefert jede beliebige Folge von Zerlegungen ω des Intervals $[a,b]$ mit $\delta = \lim\limits_{N\to\infty} \max\limits_{i=1,2,..N} h_i = 0$ bei beliebiger Wahl der Punkte $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ stets ein und denselben Grenzwert $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{N} f(\xi_i)h_i$, so heißt dieser bestimmtes (RIEMANN'sches) Integral der Funktion $f(x)$ über dem Intervall $[a,b]$.*
Schreibweise: $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{N} f(\xi_i)h_i = \int_a^b f(x)dx$

Satz 7.5 *$f(x)$ sei im Intervall $[a,b]$ beschränkt und mit Ausnahme endlich vieler Stellen stetig. Dann ist $f(x)$ integrierbar über $[a,b]$.*

Bemerkung 7.4 *Gilt $f(x) \geq 0$ im Intervall $[a,b]$, so wird mit $\int_a^b f(x)dx$ die Fläche zwischen $f(x)$ und der x-Achse berechnet.*

Eigenschaften des bestimmten Integrals

Aus den Eigenschaften von Summen und Grenzwerten lässt sich folgern:

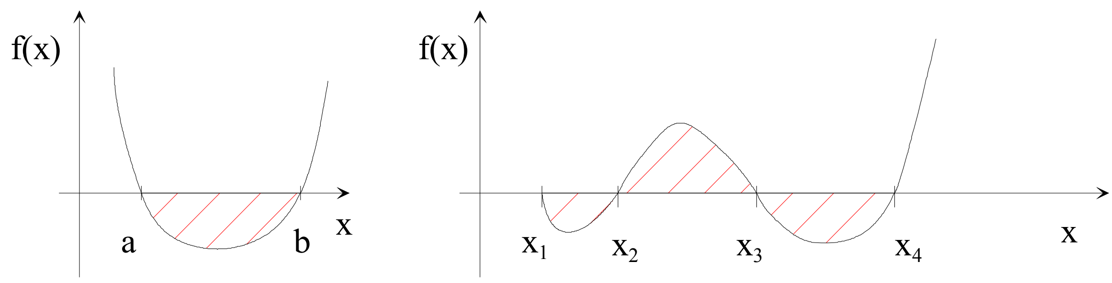
1. $a \leq c \leq b:$ $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

   Folgerung: $c = a:$ $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

3. $$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

   Folgerung: $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_a^b (-f(x))dx < 0$, wenn $f(x) < 0$



Flächen unter der x-Achse liefern einen negativen Beitrag zum Integral. Soll die Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse bestimmt werden, ist somit zwischen den Nullstellen der Funktion zu integrieren, und die einzelnen Integrale sind betragsmäßig aufzusummieren.

$$A = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_3}^{x_4} f(x)dx\right|$$

4. $f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in [a,b] \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

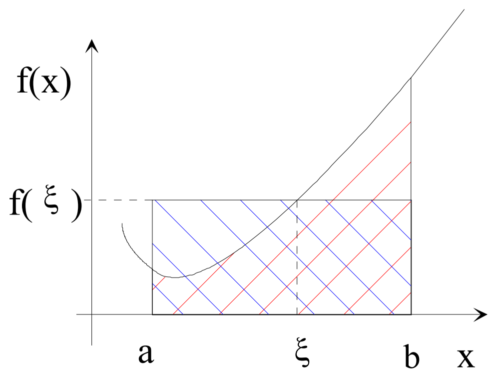
   Folgerung:

$$
\begin{aligned}
& -|f(x)| \quad \leq \quad f(x) \quad \leq \quad |f(x)| \\
\curvearrowright\ & -\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \\
\curvearrowright\ & \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx
\end{aligned}
$$

Satz 7.6 *Mittelwertsatz der Integralrechnung*
$f(x)$ sei stetig auf $[a,b]$. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$,so dass gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a).$$

Interpretation:



Das bestimmte Integral kann durch die Fläche eines Rechteckes ausgedrückt werden.

Anwendungen:

1. Der Gleichwert ist das arithmetisches Mittel der Größe $x(t)$:

$$\overline{x} = \frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} x(t)dt.$$

   Ist T die Periodendauer der Wechselstromgröße $x(t)$, so folgt, dass der Gleichwert stets gleich null ist.

2. Der Gleichrichtwert ist das arithmetische Mittel des Betrages der periodischen Wechselstromgröße $x(t)$ in einer Periode T:

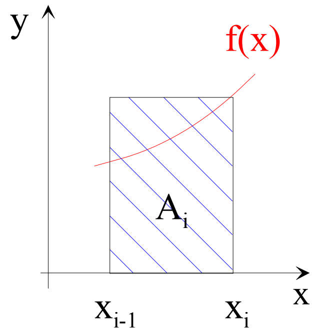
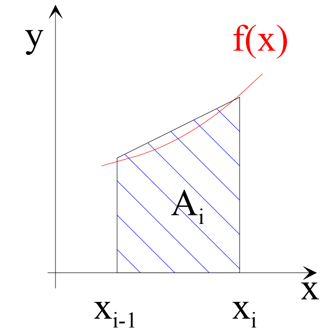
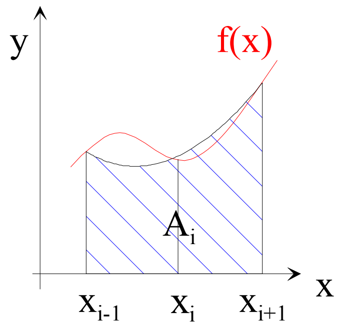
$$\widetilde{x} = \frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} |x(t)|dt.$$

7.2.2 Numerische Berechnung des bestimmten Integrals

äquidistante Zerlegung des Intervalls $[a, b]$:

$\omega = \{x_i \mid i = 0, 1, ..., N;\ x_0 = a,\ x_N = b;\ x_i = a + ih;\ h = \frac{b-a}{N}\}$

Verschiedene Näherungen des Flächeninhaltes A_i zwischen $f(x)$ und der x-Achse sind möglich. In jedem Teilintervall $[x_i; x_{i+1}]$ wird A_i ersetzt durch

ein Rechteck	ein Trapez	eine Fläche, die durch eine Parabel nach oben begrenzt wird.
		
<u>Rechteckregel:</u> $\int_a^b f(x)dx \simeq$ $h \sum_{i=1}^N f(x_i)$	<u>Sehnen-Trapez-Regel:</u> $\int_a^b f(x)dx \simeq$ $\frac{h}{2} \sum_{i=1}^N (f(x_{i-1}) - f(x_i))$	<u>Simpsonregel:</u> $\int_a^b f(x)dx \simeq$ $\frac{h}{3}(f(a) + 4u + 2g + f(b))$ $u = f(x_1) + f(x_3) + ...f(x_{N-1})$ $g = f(x_2) + f(x_4) + ...f(x_{N-2})$ Voraussetzung: N: gerade Zahl
– Näherung 0. Ordnung – N muss groß sein, damit Näherung brauchbar	– Näherung 1. Ordnung – stückweise lineare Interpolation von f(x) – genauer als Rechteckregel	– Näherung 2. Ordnung – genauer als Trapezregel und dabei kaum aufwendiger als diese

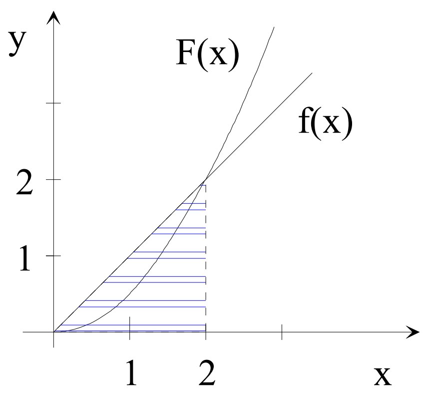
7.2.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Probleme:

1. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem unbestimmten und dem bestimmten Integral?
2. Wie kann man das bestimmte Integral tatsächlich berechnen?

$f(x)$ sei auf $[a, b]$ bestimmt integrierbar. Dann existiert $\int_a^x f(t)dt$ für alle $x \in [a, b]$, und der Wert dieses Integrals hängt von seiner oberen Grenze ab. Wir betrachten deshalb nun die Funktion $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Es sei z.B. $f(x) = x$. $\curvearrowright$ $f(t) = t$.



$F(1) = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$; $\quad F(2) = \int_0^2 tdt = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$ (Dreiecksfläche!)

Im Beispiel gilt dann:
$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x tdt = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x = \frac{1}{2} \cdot x^2$

Satz 7.7 *$f(x)$ sei auf $[a, b]$ stetig.*
Dann ist $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ differenzierbar, und es gilt: $F'(x) = f(x)$.

Damit ist aber $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Die Menge aller Stammfunktionen wird beschrieben durch $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$.

Wir berechnen nun $F(b) - F(a)$:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt + C - \int_a^a f(t)dt - C = \int_a^b f(t)dt$$

Satz 7.8 *Hauptsatz*
$F(x)$ sei eine beliebige Stammfunktion von $f(x)$ über $[a,b]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Bemerkung 7.5 *Der Satz bringt den Zusammenhang von bestimmter und unbestimmter Integration zum Ausdruck.*

Bemerkung 7.6 *Das bestimmte Integral, das als Grenzwert definiert wurde, kann mit Hilfe des unbestimmten Integrals berechnet werden.*

Beispiel 7.21 *Gleichrichtwert für die Sinusspannung $u = U \sin t; \quad U > 0:$*

$$\widetilde{u} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U|\sin t|dt = \frac{2U}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{U}{\pi}[-\cos t]_0^{\pi} = \frac{U}{\pi}[1-(-1)] = \frac{2}{\pi}U \simeq 0.637U$$

7.2.4 Substitution der Veränderlichen bei bestimmten Integralen

1. Lösungsmöglichkeit:

- Berechnung des unbestimmten Integrals von $f(x)$ mittels Substitution
- Rücktransformation von der neuen zur alten Veränderlichen $x \implies F(x)$ als Stammfunktion von $f(x)$
- Berechnung der Differenz $F(b) - F(a)$

Beispiel 7.22 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$

Nebenrechnung: $\int \sin^2 x \cos x dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 = \frac{1}{3}\sin^3 x$
mit $u = \sin x, \quad \frac{du}{dx} = \cos x$

2. Lösungsmöglichkeit:

Gilt für das unbestimmte Integral von $f(x)$
$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C,$

so folgt für das bestimmte Integral:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{c=g(a)}^{d=g(b)} f(u)du = F(d) - F(c).$$

D.h., bei der Substitution können die Grenzen mit transformiert werden. Dann entfällt die Rücktransformation zur alten Veränderlichen x.

Beispiel 7.23 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos dx = \int_0^1 u^2 du = \left[\tfrac{1}{3}u^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{3}$

Nebenrechnung:

$u = \sin x$; $x = \arcsin u$ (*eineindeutig für* $u \in [0; \frac{\pi}{2}]$)*;* $\frac{du}{dx} = \cos x$

$a = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_a = \sin 0 = 0$

$b = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad u_b = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

Bemerkung 7.7 *Bei der 2. Methode muss unbedingt die Eineindeutigkeit der Substitutionsfunktion in dem betrachteten Intervall gewährleistet sein, sonst führt diese Methode zu falschen Ergebnissen!*

Beispiel 7.24 $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \tfrac{1}{3} - (-\tfrac{1}{3}) = \tfrac{2}{3},$

aber $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2 dx = \int_1^1 u\frac{du}{2\sqrt{u}} = 0$ ***ist falsch.***

Nebenrechnung:

$u = x^2$; $x = \sqrt{u}$; $\frac{du}{dx} = 2x$

$a = -1 \quad \Longrightarrow \quad u_a = 1$

$b = 1 \quad \Longrightarrow \quad u_b = 1$

Die Substitutionsfunktion $u = x^2$ *ist auf dem Intervall* $[-1; 1]$ *nicht eineindeutig. Damit existiert auch keine eindeutige Umkehrfunktion, was zu den beiden identischen Integrationsgrenzen führt. Rettung bietet in einem solchen Fall die Teilung des Intervalls, so dass in jedem Teilintervall die Eineindeutigkeit der Substitutionsfunktion gewährleistet ist:*

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^1 x^2 dx = \int_1^0 u\frac{du}{-2\sqrt{u}} + \int_0^1 u\frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$= \left[-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^0 + \left[\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{2}{3}$$

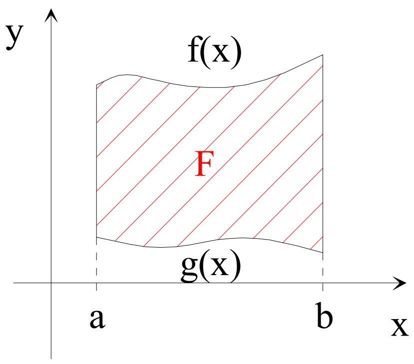
Nebenrechnung:

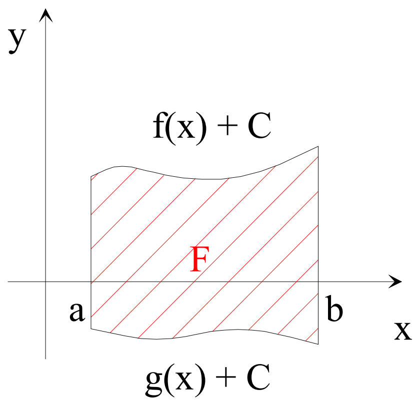
Substitution: in $[-1; 0]$: $\quad u = x^2$; $x = -\sqrt{u}$; $\frac{dx}{du} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}$

Substitution: in $[0; 1]$: $\quad u = x^2$; $x = \sqrt{u}$; $\frac{dx}{du} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}$

7.3 Anwendungen der Integralrechnung

7.3.1 Flächenberechnung



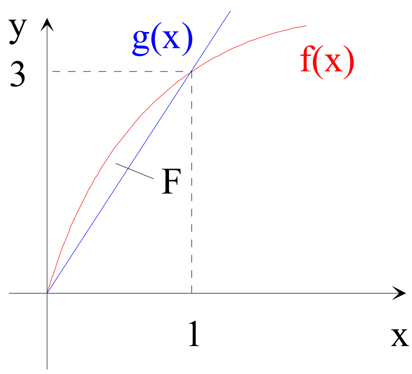


$f(x) \geq g(x) \geq 0$
$F = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

zwischen $f(x) + C$ und $g(x) + C$
liegt die gleiche Fläche F

$$\curvearrowright F = \int_a^b (f(x) - g(x))dx \text{ für } f(x) \geq g(x)$$

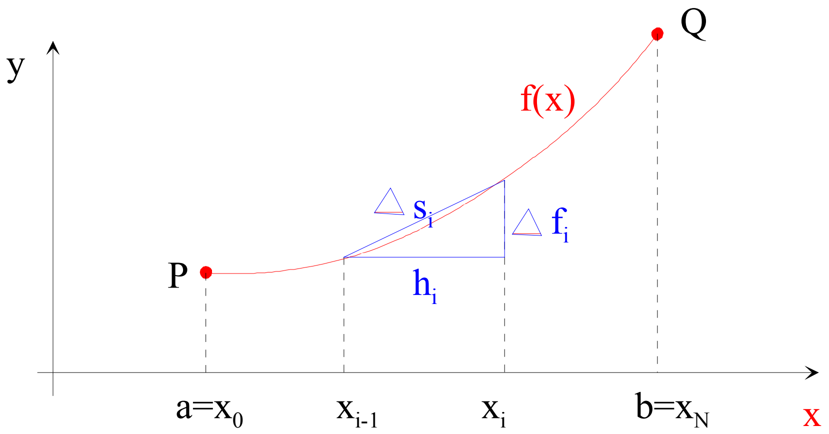
Beispiel 7.25 $f(x) = \sqrt{9x}; \qquad g(x) = 3x$



Gesucht: Fläche zwischen $f(x)$ und $g(x)$
Schnittpunktbestimmung: $\sqrt{9x} = 3x \quad \Longrightarrow \quad 9x - 9x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x-1) = 0$
$\curvearrowright x_1 = 0; \quad x_2 = 1$

$$F = \int_0^1 (\sqrt{9x} - 3x)dx = \int_0^1 3(\sqrt{x} - x)dx = 3[\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{2}x^2]_0^1 = 3(\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2}) = 3 \cdot \tfrac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

7.3.2 Bogenlänge einer Kurve



$\omega = \{x_i \mid i = 0, 1, ..., N;\ x_0 = a,\ x_N = b\ \}$: Zerlegung des Intervalls

Damit gilt: $h_i = x_i - x_{i-1}$; $\quad \triangle f_i = h_i f\,'(\xi_i)$; $\quad$ mit $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$; $\quad i = 1, 2, ..., N$ wegen dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Länge des Sehnenpolygons:

$s_N = \sum_{i=1}^N \triangle s_i = \sum_{i=1}^N \sqrt{h_i^2 + (\triangle f_i)^2} = \sum_{i=1}^N \sqrt{h_i^2 + (h_i f\,'(\xi_i))^2} = \sum_{i=1}^N h_i \sqrt{1 + (f\,'(\xi_i))^2}$

Existiert das Integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f\,'(x))^2} dx = \lim_{\delta \to 0} s_N = s \quad \text{mit } \delta = \max_i h_i \ ,$$

so ist s die Länge der Kurve $\widehat{PQ}$. Die Kurve heißt dann rektifizierbar.

Betrachten: $s = s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f\,'(t))^2} dt$

$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f\,'(t))^2}$

$ds = \sqrt{1 + (f\,'(t))^2} dx = \sqrt{(dx)^2 + (\frac{dy}{dx})^2 (dx)^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

ds heißt Bogenelement oder Bogendifferential. Damit gilt:

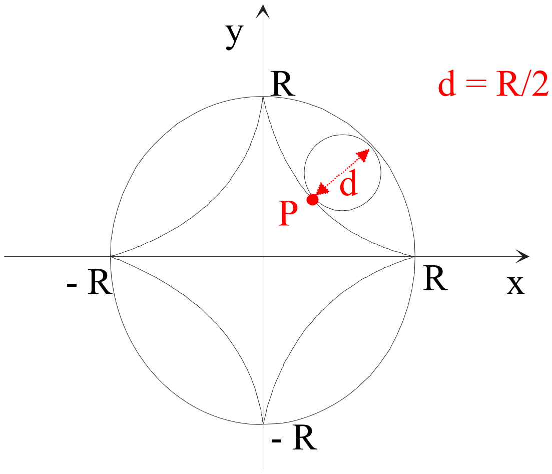
$$s = \int_P^Q 1 ds$$

Ist eine Kurve in Parameterform gegeben, so gilt:

$$\left.\begin{array}{ll} x = x(t), & dx = \dot{x} dt \\ y = y(t), & dy = \dot{y} dt \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad ds = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$$

Im $\mathbb{R}^n$ gilt analog: $ds = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\dot{x}_i(t))^2} dt$ sowie $s = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\dot{x}_i(t))^2} dt$

Beispiel 7.26 *Astroide (Sternenkurve):* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$



Parameterdarstellung: $\left.\begin{array}{ll} x = R\cos^3 t, & \dot{x} = -3R\cos^2 t \sin t \\ y = R\sin^3 t, & \dot{y} = 3R\sin^2 t \cos t \end{array}\right\} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

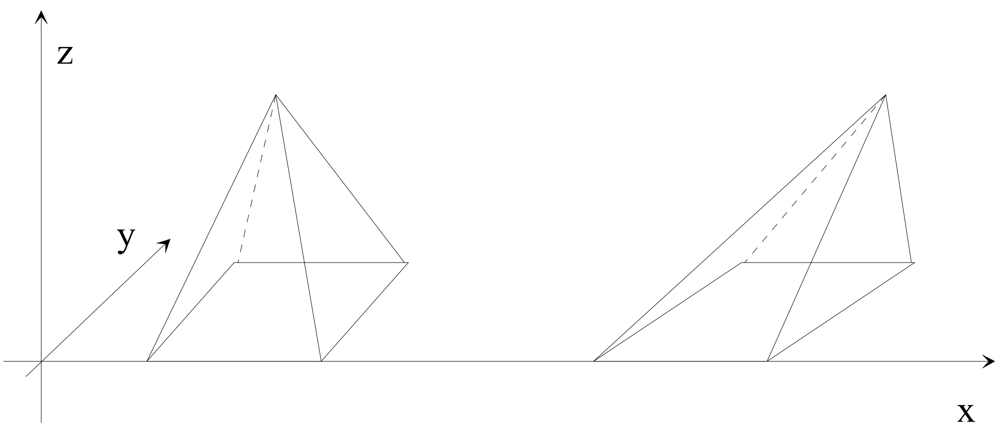
$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3R\sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t}dt$

$= 12R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}dt = 12R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = 12R \cdot \frac{1}{2}[\sin^2 t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6R$

7.3.3 Volumenberechnung aus der Querschnittsfläche

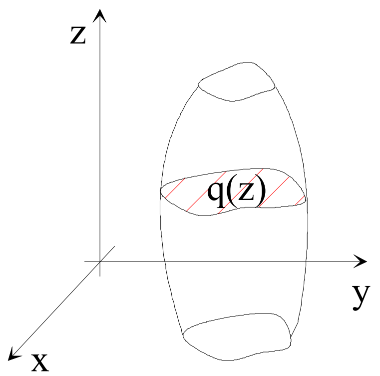
Eine Volumenberechnung erfolgt normalerweise über Raumintegrale, aber mit dem Prinzip des CAVALIERI (1598 - 1647) ist die Volumenberechnung für Rotationskörper auch mittels eindimensionalen bestimmten Integralen möglich:

Prinzip des CAVALIERI:



$$V_1 = V_2, \qquad \textit{wenn} \qquad q_1(z) = q_2(z) \qquad \forall z$$

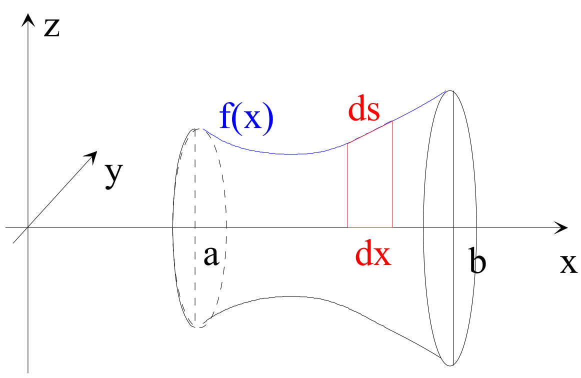
Das Prinzip des CAVALIERI gilt unabhängig von der Integralrechnung.



Ist $q(z)$ der Querschnitt eines Körpers in der Höhe z, so gilt $V = \int_a^b 1 dV = \int_a^b q(z)dz$

Ist $q(z)$ berechenbar, so kann V bestimmt werden.

<u>Berechnung von Rotationsvolumen:</u>



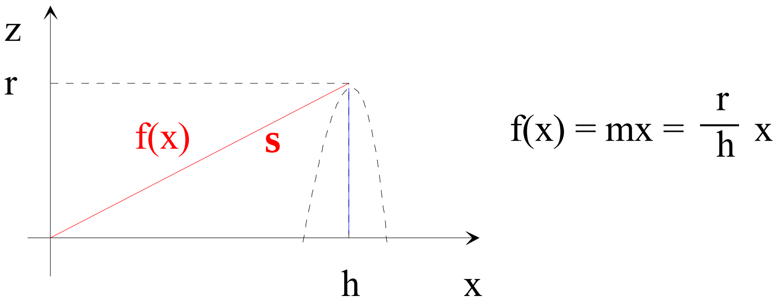
Bei Rotationskörpern gilt: $q(x)$ ist die Fläche eines Kreises mit dem Radius $f(x)$.

$$V = \int_a^b \pi f^{\,2}(x)dx = \pi \int_a^b f^{\,2}(x)dx$$

Analog kann die Mantelfläche von Rotationskörpern berechnet werden, wenn man beachtet, dass der Kreisumfang die Länge $2\pi r = 2\pi f(x)$ besitzt:

$$M = \int_a^b 2\pi f(x)ds = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f\,'(x))^2}dx.$$

Beispiel 7.27 *Volumen und Mantelfläche eines Kreiskegels:*



Querschnittsfläche des Kreiskegels im 1. Quadranten der $x - z-$ Ebene

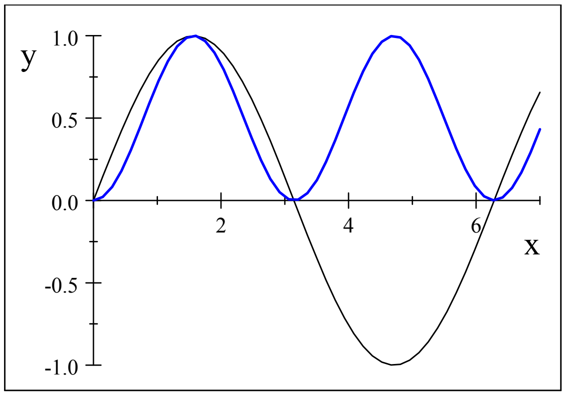
$V = \pi \int_a^b f^{\,2}(x)dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2dx = \pi \frac{r^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$M = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f\,'(x))^2}dx = 2\pi \int_a^b \frac{r}{h}x \cdot \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}}dx$

$= 2\pi \frac{r}{h}\frac{h^2}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} = \pi r h\sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} = \pi r\sqrt{h^2 + r^2} = \pi r s$

7.3.4 Anwendungen in der Technik

1. Der Effektivwert einer Wechselstromgröße ist der quadratische Mittelwert dieser Größe. Es sei z.B. $u(t) = U_0 \sin \omega t, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$. Mit $\omega = 1$ ergibt sich folgendes Bild:



$y_1 = \sin x$ (schwarz) , $y_2 = \sin^2 x$ (blau)

Dann gilt

$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} u^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T U_0^2 \sin^2 \omega t dt}$

$= U_0\sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2 z\frac{dz}{\omega}} = U_0\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2z)dz}$

$= U_0\sqrt{\frac{1}{4\pi}[z - \frac{1}{2}\sin 2z]_0^{2\pi}} = U_0\sqrt{\frac{1}{4\pi}[2\pi - \frac{1}{2}\sin 4\pi + \frac{1}{2}\sin 0]}$

$= U_0\sqrt{\frac{1}{2}} \simeq 0.707U_0$

Nebenrechnung: $z = \omega t, \quad dz = \omega dt; \quad t = 0 \implies z = 0$

$t = T \implies z = \omega T = 2\pi$

Bemerkung 7.8 *Allgemein kann jeder über $[a, b]$ quadratisch integrierbaren Funktion $f(x)$ durch*

$$\|f(x)\| = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f^{\,2}(x)dx}$$

eine Zahl zugewiesen werden. Diese Zahl heißt Norm von $f(x)$ und gibt einen mittleren Abstand der Funktion zu $g(x) \equiv 0$ an.

2. Gilt $u = U = const., \quad i = I = const.$, so folgt: $W_{el} = U \cdot I \cdot t$.
   Bei zeitlich veränderlichen $u = u(t)$ und $i = i(t)$ gilt:

$$W_{el} = \int_{t_1}^{t_2} u \cdot i \; dt$$

Beispiel: Gegeben: $i = I_0 \sin(\omega t + \varphi_i), \quad u = U_0 \sin(\omega t + \varphi_u)$

Gesucht: W_{el} während einer Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$W_{el} = \int_{t_1}^{t_2} u \cdot i \; dt$

$= \int_{t_1}^{t_2} U_0 \sin(\omega t + \varphi_u) I_0 \sin(\omega t + \varphi_i) dt \quad Nebenrechnung: \; x = \omega t + \varphi_u; \; dx = \omega dt$

$t_1 = 0 \implies x = \varphi_u$

$t_2 = T \implies x = 2\pi + \varphi_u$

$= \int_{\varphi_u}^{2\pi + \varphi_u} \frac{UI_0}{\omega} \sin x \sin(x + \varphi_i - \varphi_u) dx \quad Nebenrechnung: \; \varphi = \varphi_i - \varphi_u$

$\sin(x + \varphi) = \sin x \cos\varphi + \cos x \sin\varphi$

$= \frac{U_0 I_0}{\omega} \int_0^{2\pi} (\sin^2 x \cos\varphi + \sin x \cos x \sin\varphi) dx$

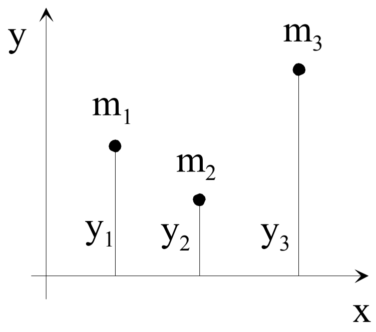
$= \frac{U_0 I_0}{\omega} [\cos\varphi[\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin 2x)] + \sin\varphi[\frac{1}{2}\sin^2 x]]_0^{2\pi}$

$= \frac{U_0 I_0}{\omega} [\cos\varphi[\frac{1}{2}2\pi] + 0]$

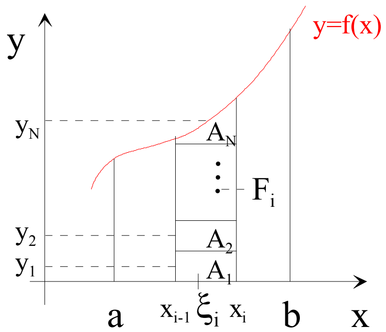
$= \frac{U_0 I_0 T}{2\pi} \pi \cos\varphi = \frac{1}{2} U_0 I_0 T \cos(\varphi_i - \varphi_u)$

3. Statisches Moment/Schwerpunkt

   Bei endlich vielen Teilchen gilt:



statisches Moment bzgl. der x-Achse: $M_x = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3$
y-Schwerpunktkoordinate: $S_y = \dfrac{M_x}{m_1 + m_2 + m_3}$
Bei unendlich vielen, kontinuierlich verteilten Masseteilchen mit $\rho \equiv 1$ gilt, dass die Masse jedes Teilstückes seiner Fläche entspricht. Wir benutzen eine äquidistante Zerlegung ω des Intervalles $[a, b]$ und berechnen das statische Moment der Fläche F_i, die durch das Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ aufgespannt wird.



$A_1 = A_2 = ... = A_N = A_i^i, \qquad N$ sei gerade

$$\begin{aligned} M_{xi} &= A_i^i y_1 + A_i^i y_2 + ... + A_i^i y_N \\ &= A_i^i (y_1 + y_2 + ... + y_N) \\ &= A_i^i \tfrac{N}{2} (y_1 + y_N) \\ &= A_i^i \tfrac{N}{2} f(\xi_i) \\ &= (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \tfrac{1}{N} \tfrac{N}{2} f(\xi_i) \\ &= \tfrac{1}{2} f^2(\xi_i) \triangle x \end{aligned}$$

$M_x = \lim_{\triangle x \to 0} \sum_{i=1}^{N} M_{xi} = \lim_{\triangle x \to 0} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} f^{\ 2}(\xi_i) \triangle x = \int_a^b \frac{1}{2} y^2 dx$

$M_y = \lim_{\triangle x \to 0} \sum_{i=1}^{N} \xi_i f(\xi_i) \triangle x = \int_a^b xydx$

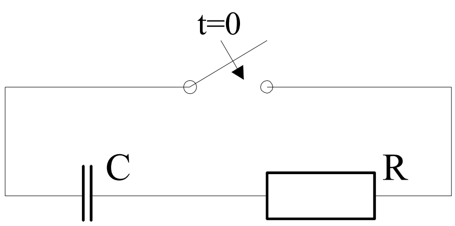
Koordinaten (x_s, y_s) des Schwerpunktes einer homogenen Fläche F unter der Kurve $y = f(x)$:

$$x_s = \frac{M_y}{F} = \frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx}$$

$$y_s = \frac{M_x}{F} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} y^2 dx}{\int_a^b ydx}$$

7.4 Uneigentliche Integrale

Problem: Der Kondensator mit der Kapazität C wird auf die Spannung U_0 aufgeladen. Welche Energie wird in R beim Entladen verbraucht?



$W_{el}(t_0) = \int_0^{t_0} u \cdot idt$ $\quad Nebenrechnung: \ u = R \cdot i$ (Ohmsches Gesetz)

$= \int_0^{t_0} R \cdot i^2 dt$ $\quad Nebenrechnung: \ i = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$

$= \int_0^{t_0} R \cdot \frac{U_0^2}{R^2} e^{-\frac{2t}{RC}} dt$

$= \frac{U_0^2}{R} [-\frac{RC}{2} e^{-\frac{2t}{RC}}]_0^{t_0}$

$= \frac{U_0^2 C}{2} [1 - e^{-\frac{2t_0}{RC}}]$

$W_{el} = \lim_{t_0 \to \infty} W_{el}(t_0) = \frac{U_0^2 C}{2} = \int_0^{\infty} u \cdot idt$

Das ist eine Erweiterung des Integralbegriffes, denn bisher wurde nur mit beschränkten Funktionen und endlichem Integrationsintervall $[a, b]$ gearbeitet.

Definition 7.4 *Uneigentliche Integrale mit unendlichen Grenzen:*
Sei $f(x)$ auf beliebigen Intervallen $[a, b]$ integrierbar.

a) $\int\limits_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$

b) $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$

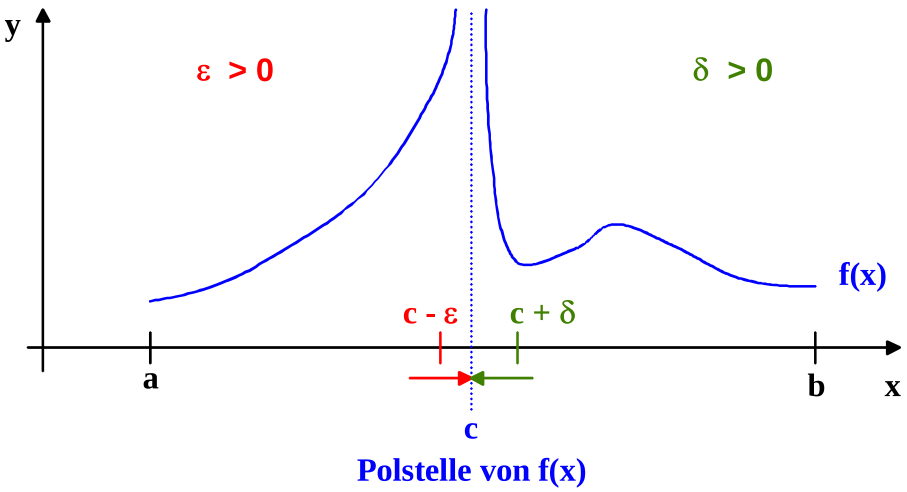
c) $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^c f(x)dx + \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_c^b f(x)dx; \qquad c \in \mathbb{R}$

Definition 7.5 *Uneigentliche Integrale mit nichtbeschränkten Funktionen:*
Sei $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty, \quad a \le c \le b$. *(Eventuell werden nur einseitige Grenzwerte benötigt!)*

a) $\int\limits_a^c f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$

b) $\int\limits_c^b f(x)dx = \lim\limits_{\delta\to 0+0} \int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx$

c) $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim\limits_{\delta\to 0+0} \int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx$



Bemerkung 7.9 *Existieren endliche Grenzwerte, so heißen die entsprechenden Integrale konvergent, anderenfalls divergent.*

Bemerkung 7.10 *In beiden Definitionen müssen die Grenzübergänge im Fall c) jeweils unabhängig voneinander zu endlichen Grenzwerten führen. Gibt es nur dann einen endlichen Grenzwert, wenn die unterschiedlichen Grenzprozesse gleichartig ausgeführt werden, heißt der erzielte Wert Cauchy'scher Hauptwert.*

Satz 7.9 *Sei $f(x)$ auf beliebigen Intervallen integrierbar. Dann gilt:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}(\lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx)$$

Die Konvergenz der uneigentlichen Integrale kann durch unmittelbares Berechnen oder durch Vergleichskriterien untersucht werden.

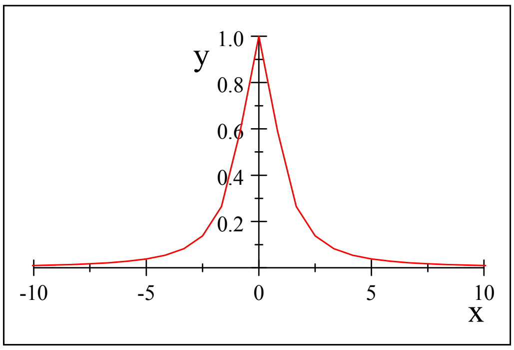
Satz 7.10 *Majorantenkriterium*
Es gelte $0 \le f(x) \le g(x)$ für $x \ge a$.
$f(x)$ sei stückweise stetig auf jedem Intervall $[a, b]$ mit $b > a$.

Konvergiert $\int_a^\infty g(x)dx$, *so auch* $\int_a^\infty f(x)dx$

Divergiert $\int_a^\infty f(x)dx$, *so auch* $\int_a^\infty g(x)dx$,

denn es gilt dann $\int_a^\infty f(x)dx \le \int_a^\infty g(x)dx$.

Beispiel 7.28 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}(\lim_{b\to\infty}\int_a^b\frac{dx}{1+x^2}) = \lim_{a\to-\infty}(\lim_{b\to\infty}(\arctan b - \arctan a)) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$$

Beispiel 7.29 *Sei* $a > 0; \quad \alpha > 0$

$$\int\limits_a^b x^{-\alpha}dx = \begin{cases} \left[\frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\right]_a^b = \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) & \text{für } \alpha \ne 1 \\ \ln b - \ln a & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\curvearrowright \int\limits_a^\infty x^{-\alpha}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b x^{-\alpha}dx = \lim_{b\to\infty}\begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) & \textit{für } \alpha \neq 1 \\ \ln b - \ln a & \textit{für } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(-a^{1-\alpha}) = \frac{1}{\alpha-1}a^{1-\alpha} & \textit{für } \alpha > 1 \\ \infty & \textit{für } \alpha \leq 1 \end{cases}$$