Ungleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen!

1.1 $2x+3(1+4x)\le 31$

1.2 $2(1+x)+3(1-2x)>8$

1.3 $\frac{2x-1}{x+1}>1 \qquad x\ne -1$

1.4 $\frac{1}{x+1}>\frac{1}{2x-1} \qquad x\ne -1, \quad x\ne \frac{1}{2}$

1.5 $\frac{1}{5-x}+\frac{1}{5+x}<5 \quad x\ne 5, x\ne -5$

1.6 $\frac{2x^2-1}{x-1}\le \quad x \qquad x\ne 1$

2.1 $|2x-1|\le 3$

2.2 $|2x-1|+x<2$

2.3 $|x-2|<|x-5|$

2.4 $|3x|<|x+1|-x$

2.5 $|x-1|\le \frac{1}{4}x+2$

2.6 $\frac{|x-2|}{x-1}<1 \qquad x\ne 1$

2.7 $|x-1|+|1-x|\le 1+x$

2.8 $1+\frac{1}{x}<\frac{2}{|x|} \qquad x\ne 0$

2.9 $|x|\le |2x-1|-|2-x|$

3.1 $\sqrt{2x-1}\le 2-x$

3.2 $x+1>\sqrt{6-2x}$

3.3 $\frac{1+x}{1-|x|}>x \qquad |x|\ne 1$

3.4 $\frac{x^2-3x+2}{x-1{,}5}>0 \qquad x\ne 1{,}5$

Lösen Sie grafisch:

4.. $|x+1|\ge x^2-3$

Lösungen:

1.1 $L=(-\infty,2]$

1.2 $L=(-\infty,-0.75)$

1.3 $L=(-\infty,-1)\cup(2,\infty)$

1.4 $L=\left(-1,\frac{1}{2}\right)\cup(2,\infty)$

1.5 $L=(-\infty,-5)\cup\left(-\sqrt{23},\sqrt{23}\right)\cup(5,\infty)$

1.6 $L=(-\infty,-1.618]\cup[0.618,1)$

2.1 $L=[-1,2]$

2.2 $L=(-1,1)$

2.3 $L=(-\infty,3.5)$

2.4 $L=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

2.5 $L=\left[-\frac{4}{5},4\right]$

2.6 $L=(-\infty,1)\cup\left(\frac{3}{2},\infty\right)$

2.7 $L=\left[\frac{1}{3},3\right]$

2.8 $L=(-3,1)\backslash\{0\}$

2.9 $L=\left[\frac{3}{2},\infty\right)$

3.1 $L=\left[\frac{1}{2},1\right]$

3.2 $L=(1,3]$

3.3 $L=(-\infty,1)\backslash\{-1\}$

3.4 $L=(1,1.5)\cup(2,\infty)$

4. $L=[-2,2.6]$

Wiederholung

1. Fassen Sie in binomische Formeln zusammen!

1.1 $4a^2+12ab+9b^2$ 1.2 $a^2x^2-2abxy+b^2y^2$ 1.3 $16u^2-2v^2$

2. Vereinfachen Sie: $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}+\frac{2ab}{a^2-b^2}$

3. Lösen Sie folgende Gleichungen!

3.1 $a^2+b^2=\frac{a^2xb}{a-b}-\frac{ab^2x}{a+b}$ $|a|\neq|b|$ 3.2 $\frac{2x-7}{9x^2-49}=\frac{5}{9x+21}-\frac{1}{3x}$

3.3 $C=4\pi K\cdot\frac{R_1R}{R_1-R}$ Ges.: R

4. Vereinfachen Sie!

4.1 $\frac{a^{2n-x}}{a^{n-1}}\div\frac{a^{n+x}}{a^{2x}}$ 4.2 $\left(\frac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}}\right)^{-2}$ 4.3 $\frac{a^2\sqrt{b}\,c^{-2}}{\sqrt[3]{a^2}\,b^{-3}}\div\frac{d^2\sqrt{c}}{\sqrt[5]{d}\,a^{-5}}$

4.4 $\frac{(9a-3b)^2}{9b^2-81a^2}$ 4.5 $\left(10a^5+23a^4+18a^3+9a^2\right)\div\left(2a^2+3a\right)$

4.6 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$ 4.7 $\cos\left(\frac{7}{2}\pi-\frac{x}{2}\right)$

4.8 $\left(6x^2-10x-6\right)\div\left(3x+1\right)$ 4.9 $\left(16a^6-17a^4+104a^5+33a^3+14a^2\right)\div\left(a^2+7a+2\right)$

5. Wenden Sie die Logarithmengesetze an!

5.1 $\lg\frac{a^2b^2}{(a-b)^2}$ 5.2 $\lg\frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5b^3}}$ 5.3 $\frac{1}{2}\ln a+2\ln c-\frac{1}{3}\left(\ln b^3+\ln a^{3/2}\right)$

5.4 $\frac{1}{3}(\lg a+3\lg b)-\frac{1}{2}(4\lg c-2\lg d)$

6. Bestimmen Sie x!

6.1 $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+8}=9$ 6.2 $\left(\frac{3}{8}\right)^{3x+4}=\left(\frac{4}{5}\right)^{2x+1}$

6.3 $2^x-2^{x+2}=3^{x+1}-3^{x+2}$ 6.4 $\cos x+\cos(2x)=0$

6.5 $5\sin^2 x=\sin x+\cos^2 x$

Lösung:

1.1 $(2a+3b)^2$ 1.2 $(ax-by)^2$ 1.3 $(4u+\sqrt{2}v)(4u-\sqrt{2}v)$

2. $\dfrac{a+b}{a-b}$

3.1 $x=\dfrac{a^2-b^2}{ab} \quad a,b\neq 0$ 3.2 $x=3.5$ 3.3 $R=\dfrac{CR_1}{C+4\pi KR_1}$

4.1 a 4.2 $\dfrac{1}{16}a^6x^4y^{-2}$ 4.3 $\dfrac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}}\,\sqrt{c^5}\,\sqrt[5]{d^9}}$

4.4 $\dfrac{b-3a}{b+3a}$ 4.5 $5a^3+4a^2+3a$ 4.6 $\sin\alpha$

4.7 $-\sin\dfrac{x}{2}$ 4.8 $16a^4-8a^3+7a^2$ 4.9 $2x-4-\dfrac{2}{3x+1}$

5.1 $2(\lg a+\lg b-\lg(a-b))$ 5.2 $-\left(\dfrac{1}{2}\lg a+\lg b\right)$

5.3 $\ln\dfrac{c^2}{b}$ 5.4 $\lg\dfrac{\sqrt[3]{a}\,bd}{c^2}$

6.1 x = 17 6.2 x = -1.4823 6.3 x = -1.709

6.4 $x_1=\pm 60°+k360°$ $x_2=180°+k360°$

6.5 $x_1=30°+k360°$ $x_2=150°+k360°$

$x_3=199,47°+k360°$ $x_4=340,53°+k360°$

$k\in\mathbb{Z}$

Funktionen 1

1. Skizzieren Sie folgende Funktionen, geben Sie Definitions- und Wertebereich an: $y = x^2, x^3, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, e^x, 2^x$, ln x, sin x, cos x, tan x, cot x, arctan x, ax + b

2. Wiederholen Sie die Additionstheoreme!
Lösen Sie : $\cos 3x + 2\cos x = 0$

3. Bestimmen Sie :

   a) $f(x-1), f(x)-1, -f(x)$, wenn $f(x) = x\sqrt{x+1}$ ist.

   b) $f[f(x)], g[f(2)], f[g(x)]$, für $f(x) = x^3 - x$ und $g(x) = \sin 2x$.

4. Gesucht sind der größtmögliche Definitionsbereich und der zugehörige Wertebereich von y = f(x) im R^1.

   a) $y = 3x + 7$ b) $y = x^2 + 1$ c) $y = -x^2 + 3x - 7$

   d) $y = \sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}$ e) $y = \sqrt{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ f) $y = 0.5\tan(x/3)$

   g) $y = \ln|x-4|$ h) $y = \sqrt{\frac{3x+2}{3-2x} - 2}$ i) $y = \ln\left(3 - \sqrt{x+7}\right)$

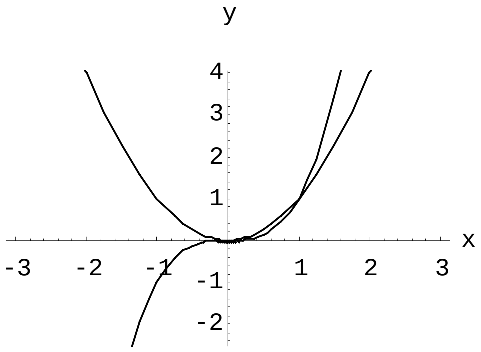
5. Welche der folgenden Funktionen (bei größtmöglichem Definitionsbereich) sind gerade, welche sind ungerade und welche haben keine dieser Eigenschaften?
   a) $y = e^{-x}$ b) $y = x^5 + 7x$ c) y = x sin x

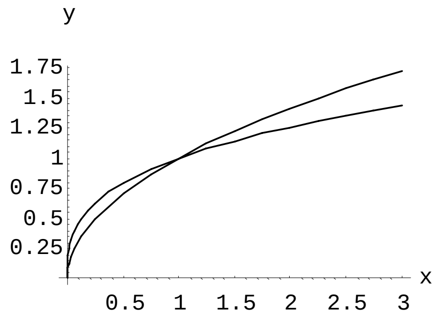
   d) $y = \cos x + \sin^2 x$ e) $y = \frac{x}{\cos x}$ f) $y = \frac{a^x - 1}{a^x + 1}$

6. Welche der für $x \in \mathbb{R}$ erklärten Funktionen y = f(x) sind periodisch? Falls Periodizität vorliegt, ermitteln Sie die primitive Periode p. Außerdem untersuchen Sie, ob die Funktionen nach unten bzw. nach oben beschränkt sind, und geben Sie in diesen Fällen Schranken an. Für welche Funktionen ergibt sich daraus die Beschränktheit?

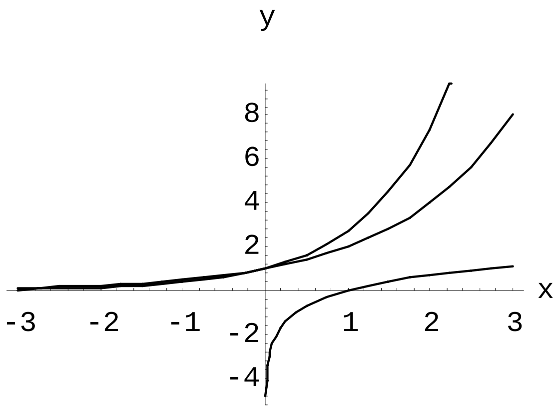
   $y = \frac{4}{3}\sin(x+3)$ b) $y = \cos(2 - \pi x)$ c) $y = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{3}$

1. a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = \sqrt{x}$ d) $y = \sqrt[3]{x}$

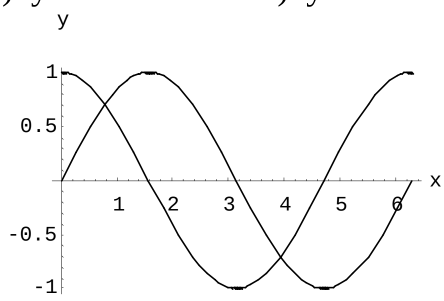


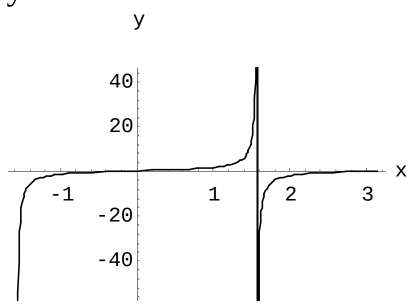


e) $y = e^x$ f) $y = 2^x$ g) $y = \ln x$

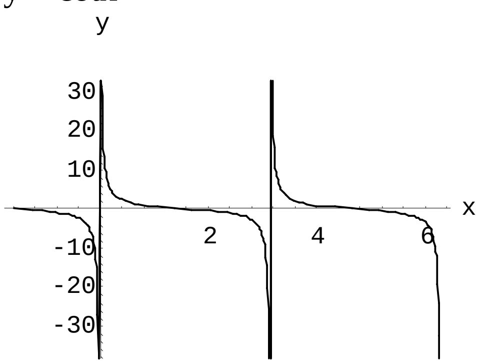


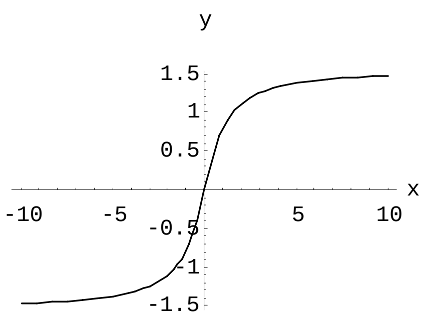
h) $y = \sin x$ i) $y = \cos x$ j) $y = \tan x$





k) $y = \cot x$ l) $y = \arctan x$





Übung Funktionen 2

1. Skizzieren Sie folgende Funktionen in $[0,2\pi]$:

a) $y=\sin x$	b) $y=\sin 2x$	c) $y=2\sin x$
d) $y=\sin x+1$	e) $y=\sin(x+1)$	f) $y=\sin(-x)$
g) $y=-\sin x$	h) $y=-3\sin(-2x+1)+1$	

2. Berechnen Sie mittels Hornerschema die Werte P(x) an den angegebenen Stellen, und bestimmen Sie die Zerlegung von P(x) in reelle Elementarfaktoren.

a) $P(x)=2x^5+4x^4-4x^3-8x^2+2x+4,\quad x_0=1,\quad x_1=-1,\quad x_2=-2,\quad x_3=2$

b) $P(x)=x^3-2x^2-5x+6,\quad x_0=-1,\quad x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=-2$

c) $P(x)=x^4-x^3-10x^2+4x+24,\quad x_0=1,\quad x_1=-1,\quad x_2=-2,\quad x_3=2$

3. Berechnen Sie folgende Grenzwerte :

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+6}{3x-7}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+6}{3x-7}$ c) $\lim\limits_{x\to 7/3}\dfrac{2x+6}{3x-7}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{7x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{6x}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{7x}$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$ h) $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}[x]$

i) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos(x-h)}{h}$ j) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$ m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

4. Untersuchen Sie auf Stetigkeit, klassifizieren Sie die Unstetigkeitsstellen der Funktionen :

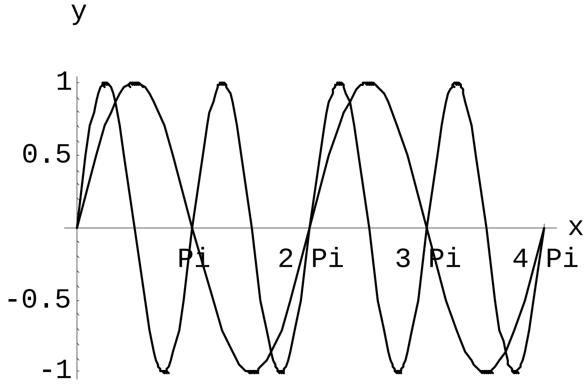
a) $y=x^2+2x+7$ b) $y=\tan x$ c) $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$

d) $y=\dfrac{1}{x^3}$ e) $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$

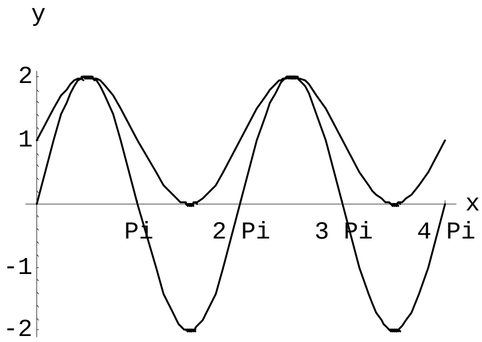
5. Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte und Unstetigkeitsstellen von :

a) $f(x)=2\dfrac{(x+5)(x-1)(x-5)}{(x-4)(x+2)^2(x+5)}$ b) $f(x)=2\dfrac{(x-6)(x-1)(x-5)}{(x-4)(x+2)^2}$

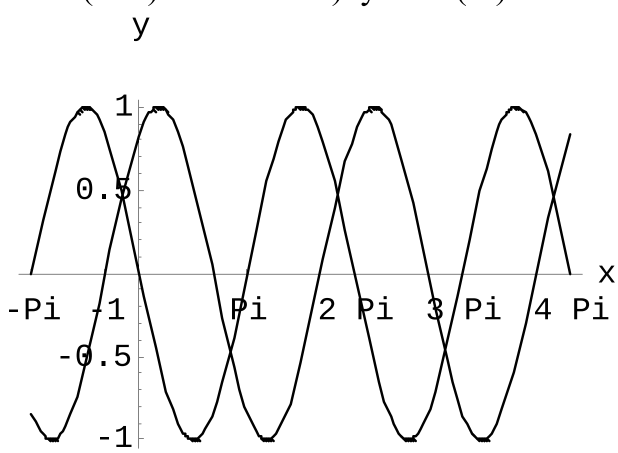
1. a) y = sinx b) y = sin(2x)



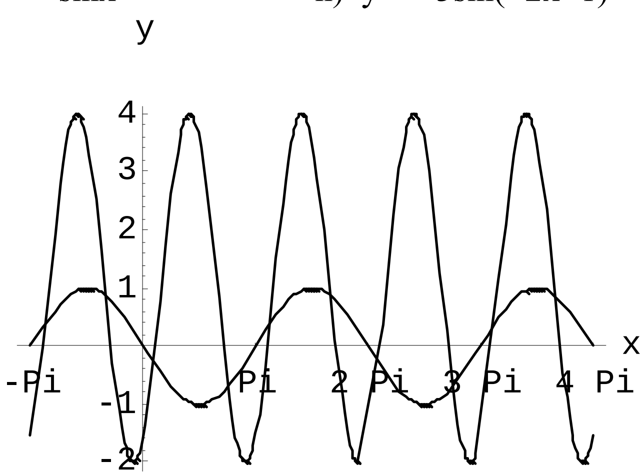
c) y = 2sinx d) y = sinx +1



e) y = sin(x+1) f) y = sin(-x)



g) y = - sinx h) y = - 3sin(- 2x+1) + 1



2. a) P(1) = 0, P(-1) = 0 P(-2) = 0 P(2) =72
$P(x)=2(x-1)^2(x+1)^2(x+2)$

b) P(-1) = 8, P(1) = 0 P(2) = - 4 P(-2) =0
$P(x)=(x-1)(x-3)(x+2)$

c) P(1) = 18, P(-1) = 12 P(-2) = 0 P(2) =0
$P(x)=(x-2)^2(x-3)(x+2)^2$

3.

a)	2/3	b)	-6/7	c)	$\pm\infty$	d)	5/7
e)	0.5	f)	e^7	g)	n	h)	ex. nicht
i)	-2sinx	j)	$\pm\infty$	k)	ex. nicht	l)	1
m)	0.5						

4. a) stetig $\forall x \in \mathbb{R}$ b) Pol bei $\frac{\pi}{2}+k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
c) Lücke bei x = 1, Pol bei x = -1
d) Pol bei x = 0
e) Sprungstellen bei $x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

5. a) Lücke bei x = -5, Polstellen bei x = 4 und x =-2, y(0) = -5/8
b) Polstellen bei x = 4 und x = -2, y(0) = 3,75

Übung Zahlenfolgen

1. Finden Sie Beispiele für
   a) eine konvergente Folge mit dem Grenzwert 3,
   b) eine monoton fallende, divergente Zahlenfolge,
   c) eine konvergente, nicht monotone Zahlenfolge mit dem Grenzwert -1,
   d) eine unbestimmt divergente, alternierende Zahlenfolge.

2. *Untersuchen Sie die Folge $a_n = \frac{n+2}{2n}; \left(a_n = \frac{n^2}{n+1} \right)$ auf Monotonie und Beschränktheit.

3. * Es gelte $a_n = \frac{1}{5n}$. Für welche n gilt $a_n < \frac{1}{10}$, $a_n < \frac{1}{100}$, $a_n < \frac{1}{1000}$, $a_n < \varepsilon$?

4. Berechnen Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen $\{a_n\}$, wenn a_n gegeben ist durch:

a) $\left(100 + \frac{1}{n}\right)^2$ b) $\frac{5n-8}{3n^2}$ c) $\frac{1-5n^2}{4n^2}$

d) $\frac{n^3+4n^2-2n}{n^2-2n+4}$ e) $\frac{2n+1}{3n} + \frac{3n}{2n-1}$ f) $\frac{2n+(-1)^n}{n}$

g) $2^{-n}\left(2^n + (-2)^n\right)$ h) $\left(3^n + (-2)^n\right)$ i) $\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)$

j) $\frac{3n^3-2n^2+2n+4}{4n^4+n^2-n}$ k) $\frac{2n^3-n^2-n+1}{3n^3-1}$ l) $\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)$

m) $\frac{\sqrt{2n^2+1}}{2n-1}$ n) $(-2)^n$

5. Berechnen Sie die Grenzwerte der Zahlenfolgen $\{a_n\}$, wenn a_n folgende Gestalt hat:

a) $(1 - 2/n)^n$ b) $((n+2)/(n-3))^n$ c) $\frac{(2n)^n}{(2n+1)^n}$ d) $\sqrt[n]{7n}$

e) $\sqrt[n]{n+2}$ f) $\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$ g) $3\sqrt[n]{r} \quad r \in \mathbb{R}$ h) $\frac{\sin\frac{1}{n}+1}{\sin\frac{1}{n}-1}$

6. *Der Tonraum einer Oktave soll in 12 Halbtonschritte gleichmäßig aufgeteilt werden (c’, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, ais, h, c’’). Das Frequenzverhältnis von c’ zu c’’ beträgt 1:2. Bestimmen Sie das Verhältnis für einen Halbtonschritt, für eine Quarte (c’ - f) und für den Dur - Dreiklang (c’ - e - g).

Lösungen:

2) streng monoton fallend, beschränkt
(streng monoton wachsend, nicht beschränkt)

3) $\boldsymbol{n} > \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}\boldsymbol{\varepsilon}}$

4) a) 10000	b) 0	c) -5/4	d) ∞	e) 13/6
f) 2	g) existiert nicht , da 2 für n = 2k; 0 für n=2k + 1, k ϵ **N**			
h) ∞	i) 0.5	j) 0	k) 2/3	l) 0
m) $\mathbf{1}/\sqrt{\mathbf{2}}$	n) existiert nicht			
5) a) e^{-2}	b) e^{5}	c) $e^{-1/2}$	d) 1	f) 1
g) 3	h) -1			

Differentialrechnung 1 / Anschlusskurs

1. Bilden Sie die 1.Ableitung von:

a) $y = 5x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{5}{2}} + 2x^{-1}$ b) $y = \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$ c) $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

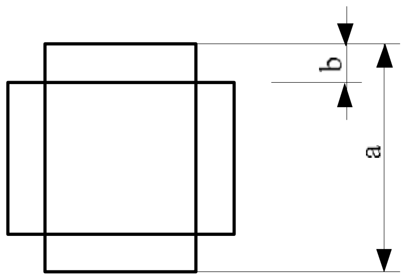
d) $y = x^3\left(x^2 - 1\right)^2$ e) $y = \sin\left(2x^2 - 3x + 1\right)$ f) $y = e^{\cos x} \cdot \sin x$

g) $y = \ln\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ h) $y = \ln\left(\tan x\right)$ i) $y = |x|$

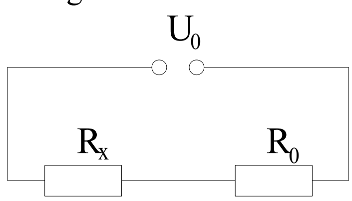
2. Bilden Sie die 2. Ableitungen von:

a) $y = \sin x \cdot \cos x$ b) $y = \sqrt[3]{1 - x}$ c) $y = e^{\tan x}$

3. Aus der abgebildeten Fläche soll ein Karton entstehen. Wie groß muss b sein, damit das Volumen maximal wird?



4. Gegeben sei folgende Schaltung :



Wie muss R_x gewählt werden, damit die von diesem Widerstand aufgenommene Leistung maximal wird?

5. a) Für welches *a* schneidet $y = a^x - 1$ die x-Achse unter einem Winkel von 60^o?
b) Wo und unter welchem Winkel schneiden sich die Funktionen sinx und cos x im Intervall $[0;\pi]$?

6. Bestimmen Sie das Polynom 3. Grades *P(x)*, für das gilt :
$P(-1) = 0 \quad P'(1) = 7; \quad P'(2) = 34; \quad P''(-1) = -18.$

7. Bestimmen Sie die Intervalle, in denen y = f(x) monoton ist :

a) $y = 2x^3 + 3x^2$ b) $y = \dfrac{1}{1 + x^4}$ c) $y = \dfrac{x}{1 + x^3}$

8. Führen Sie für folgende Funktionen eine Kurvendiskussion durch :

a) $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6}$ b) $y = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^2 - 1}$

Lösungen:

$1a)\ y' = \frac{10}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{15}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{x^2}$ $\qquad b)\ y' = \frac{1}{\cos x - 1}$ $\qquad c)\ y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,(1+x)}$

$1d)\ y' = 7x^6 - 10x^4 + 3x^2$ $\qquad e)\ y' = \cos(2x^2 - 3x + 1)(4x - 3)$ $\qquad f)\ y' = e^{\cos x}(\cos x - \sin^2 x)$

$1g)\ y' = \frac{4x}{x^4 - 1}$ $\qquad h)\ y' = \cot x(1 + \tan^2 x)$ $\qquad i)\ y' = \begin{Bmatrix} -1 & \text{für} & x < 0 \\ +1 & \text{für} & x > 0 \end{Bmatrix}$

$2a)\ y'' = -2\sin(2x)$ $\qquad b)\ y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(1-x)^5}}$ $\qquad c)\ y'' = e^{\tan x}(1 + \tan^2 x)(1 + \tan x)^2$

3) b = a/6

4) $R_x = R_0$

5 a) $a = e^{\sqrt{3}} \approx 5.652$

5 b) x = 45° = π/4; Schnittwinkel = 109,47° (bzw. 180° – 109,47° = 70,53°)

6) $P(x) = 3x^3 - 2x + 1$

7a) monoton wachsend in (-∞,-1] und [0,∞), dazwischen monoton fallend

7b) monoton wachsend in (-∞,0], danach monoton fallend

7c) monoton wachsend in $\left(-\infty; \frac{1}{\sqrt[3]{0.5}}\right)$ danach monoton fallend

8a) Db: R \ {3,2}
Nullstelle: N(-1;0)
Unstetigkeiten: x = 2, Lücke; x = 3, ungerader Pol,
Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad y_A = x + 2$
Extrema: Min(5;9) Max(1,1)
Wendepunkte: keine
Wb: R \ (1;9)

8b) Db: R \ {-1;1}
Nullstelle: N(2;0)
Unstetigkeiten: x = - 1 Pol , x = 1 Lücke
Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \qquad y_A = x - 4$

Extrema: Min(1,45; -0,1) Max(-3,45; -9,8)
Wendepunkte: keine

Übungsaufgaben Integralrechnung 1

1. Berechnen Sie folgende Integrale!

1.1 $\int \left(-3e^x + 6\cdot 3^x - e^2\right) dx$

1.2 $\int \left(5x\sqrt{x} - \frac{10}{\sqrt[5]{x}} + \frac{6}{x}\right) dx$

1.3 $\int \left(\left(\frac{1+x}{2x}\right)^2 + 8x\sqrt[3]{x^2}\right) dx$

1.4 $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}} + \frac{2x^2}{x^2+1}\right) dx$

1.5 $\int 4e^x \sqrt{e^x - 2}\, dx$

1.6 $\int \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 x}\, dx$

1.7 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\, dx$

1.8 $\int \frac{1}{2\sin^2 x}\, dx$

1.9 $\int \frac{1}{3+3x^2}\, dx$

1.10 $\int \sqrt{x\sqrt{x}}\, dx$

1.11 $\int \left(1-u^2\right)^{-0.5} du$

1.12 $\int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}\, dx$

1.13 $\int \frac{1}{1+(x+1)^2}\, dx$

1.14 $\int \frac{1}{-x+1}\, dx$

1.15 $\int \sqrt[3]{2x-7}\, dx$

1.16 $\int 2^{3x+6}\, dx$

1.17 $\int \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right) dx$

1.18 $\int \frac{\cos x}{\sqrt{5+\sin x}}\, dx$

1.19 $\int \left(-2 - 2\tan^2 x\right) dx$

1.20 $\int \frac{2t^3 - 8t}{(t-2)(t+2)}\, dt$

2. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale

2.1 $\int_0^1 \frac{1}{2} e^x dx$

2.2 $\int_\pi^{2\pi} \cos u\, du$

2.3 $\int_0^\pi \cos \pi \sin x\, dx$

2.4 $\int_{x_1}^{x_2} (2x-1) dx$

2.5 $\int_0^8 \left(5\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt{2}\sqrt{x}\right) dx$

2.6 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e e^t dt$

2.7 $\int_0^1 \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}\, du$

2.8 $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin^2 x + 1}{\sin^2 x}\, dx$

2.9 $\int_a^b a^x dx$

Lösung:

1.1 $-3e^x + 6\frac{3^x}{\ln 3} - e^2 x + C$

1.2 $2x^2\sqrt{x} - \frac{25}{2}x^{\frac{4}{5}} + 6\ln|x| + C$

1.3 $-\frac{1}{4x} + \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{x}{4} + 3x^{\frac{8}{3}} + C = -\frac{1}{4x} + \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{x}{4} + 3x^2\sqrt[3]{x^2} + C$

1.4 $-2x^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{3}{2}} + 2x - 2\arctan x + C$

1.5 $\frac{8}{3}\sqrt{\left(e^x - 2\right)^3} + C$

1.6 $-\frac{1}{2}\cos x + C$

1.7 $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

1.8 $-\frac{1}{2}\cot x + C$

1.9 $\frac{1}{3}\arctan x + C$

1.10 $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + C$

1.11 $\arcsin x + C$

1.12 $-\frac{4}{3}\cos x + C$

1.13 $\arctan(x+1) + C$

1.14 $-\ln|-x+1| + C$

1.15 $\frac{3}{8}\left(2x-7\right)^{\frac{4}{3}} + C$

1.16 $\frac{1}{3\ln 2}2^{3x+6} + C$

1.17 $-2\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right) + C$

1.18 $2\sqrt{5+\sin x} + C$

1.19 $-2\tan x + C$

1.20 $t^2 + C$

2.1 $\frac{1}{2}\left(e-1\right)$

2.2 0

2.3 -2

2.4 ${x_2}^2 - {x_1}^2 + x_1 - x_2$

2.5 160

2.6 e

2.7 56/15

2.8 $1 + \pi/4$

2.9 $\frac{1}{\ln a}\left(a^b - a^a\right)$

Komplexe Zahlen

1. Bestimmen Sie die trigonometrische oder Euler'sche Form der folgenden komplexen Zahlen, stellen Sie sie in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

1.1 $z = 1 + i$, 1.2 $z = \sqrt{3} - i$, 1.3 $z = \dfrac{1+2i}{2-i}$

1.4 $z = \dfrac{(1-i)^2}{1+i}$ 1.5 $z = i + \dfrac{1+i}{3+i}$

1.6 $z = \left(2 - i\sqrt{3}\right)^3$ 1.7 $z = \dfrac{(\sqrt{2} - i\sqrt{6})(-3-3i)}{(3\sqrt{3}+3i)^2}$

2. Bestimmen Sie alle verschiedenen Werte z_k, die sich für $\sqrt[n]{z}$ ergeben.

2.1 $z = \sqrt{8-15i}$ 2.2 $z = \sqrt[3]{-2+2i}$ 2.3 $z = \sqrt[5]{5+8i}$

3. Lösen Sie die Gleichungen:

3.1 $z^6 = 1$ 3.2 $z^3 = 8i$

3.3 $z^5 + 10 - 5i = 0$ 3.4 $(z-3i)^6 + 64 = 0$ 3.5 $z^2 - 2iz + 8 = 0$

4. Gegeben sind die folgenden komplexen Zahlen:

$z_1 = -2 + 3i$ $z_2 = \sqrt{2}e^{i43{,}2°}$ $z_3 = -4 - i$ $z_4 = 3e^{-i55{,}4°}$.

Berechnen Sie!

4.1 $z = \sqrt[4]{z_3}$ 4.2 $z = \dfrac{z_1}{z_3^2} \cdot \overline{z}_2 - z_4^3$ 4.3 $z = \sqrt[3]{z_1 \cdot z_3^2 - 3z_2}$

4.4 $z = \dfrac{2z_2 - \overline{z_1} z_4}{z_2 - z_3^3} + 2z_4$

Lösung:

1.1 $z = \sqrt{2}e^{i45°}$ 1.2 $z = 2e^{-i30°}$ 1.3 $z = e^{i90°}$

1.4 $z = \sqrt{2}e^{i225°}$ 1.5 $z = \frac{2}{5}\sqrt{10}\, e^{i71,6°}$ 1.6 $z = 18{,}52\, e^{i237,3°}$

1.7 $z = \frac{1}{3}\, e^{i105°}$

2.1 $z_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}(5-3i)$ $z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(5\text{-}3i)$

2.2 $z_0 = 1+i$ $z_1 = -1{,}36 + i0{,}36$ $z_2 = 0{,}36 - i1{,}36$

2.3 $z_k = 1{,}567e^{i(11,6°+k72°)}$ $k = 0,1,2,3,4$

3.1 $z_k = e^{ik60°}$ $k = 0,1,\ldots,5$

3.2 $z_k = 2e^{i(30°+k120°)}$ $k = 0,1,2$

3.3 $z_k = 1{,}62e^{i(30,69°+k72°)}$ $k = 0,1,2,3,4$

3.4 $z_k = 3i + 2e^{i(30°+k60°)}$ $k = 0,1,\ldots,5$

3.5 $z_1 = 4i$ $z_2 = -2i$

4.1 $z_k = 1{,}4249e^{i(48,51°+k90°)}$ $k = 0,1,2,3$

$z_0 = 0{,}944 + 1{,}067i$ $z_1 = -1{,}067 + 0{,}944i$ $z_2 = -0{,}944 - 1{,}067i$

$z_3 = 1{,}067 - 0{,}944i$

4.2 $z = 26{,}4 + 6{,}68i$

4.3 $z_k = 3{,}97e^{i(51,82°+k120°)}$ $k = 0,1,2$

$z_0 = 2{,}45 + 3{,}12i$ $z_1 = -3{,}93 + 0{,}565i$ $z_2 = 1{,}476 - 3{,}687i$

4.4 $z = 3{,}563 - 5{,}037i$

Matrizen/Determinanten

1. Gegeben sind die Matrizen:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&1&3\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}2&0&4&2\\1&1&0&1\\3&1&5&7\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie AB, AC, AD, BA, BC, BD, CD, DA, DB, DC, C^T, A^T, B^T, D^T, C^TC, CC^T, A^{-1}, B^{-1}, $(B^T)^{-1}$, $(A^T)^{-1}$, $(CC^T)^{-1}$.

2. Lösen Sie nach X auf

2.1	$XA = C - XB$	2.2	$C + AX = BX$
2.3	$AX - C = BX - D$	2.4	$ABXCD = F$
2.5	$XAB - A - XC = E$	2.6	$AB+\frac{3}{8}X = C-\frac{1}{8}X$
2.7	$A + 3(X - A - E) = 2B + X - E$	2.8	$6X + XB = XC + 4X + AB - C$
2.9	$XA^T + 2X - 0.5B + 2E = \mathbf{0}$	2.10	$(A^TX^T + C)A = (B + C)A - A$

3. Berechnen Sie folgende Determinanten!

3.1 $\begin{vmatrix}1&4\\-2&9\end{vmatrix}$ 3.2 $\begin{vmatrix}-2&6\\1&-3\end{vmatrix}$ 3.3 $\begin{vmatrix}7&10\\-2&0\end{vmatrix}$

3.4 $\begin{vmatrix}1&0&3\\4&1&2\\0&1&1\end{vmatrix}$ 3.5 $\begin{vmatrix}2&-3&1\\3&4&-2\\5&1&-1\end{vmatrix}$ 3.6 $\begin{vmatrix}1&3&-2\\0&2&4\\0&0&-1\end{vmatrix}$

3.7 $\begin{vmatrix}2&1&3&-1\\4&3&1&0\\2&1&2&-2\\-2&-1&1&2\end{vmatrix}$ 3.8 $\begin{vmatrix}3&0&2&0\\0&1&0&2\\2&0&1&0\\0&3&0&2\end{vmatrix}$ 3.9 $\begin{vmatrix}1&0&-1&2\\2&-1&-2&3\\-1&2&2&-4\\0&1&2&-5\end{vmatrix}$

4. Berechnen Sie x!

4.1 $\begin{vmatrix}x&1&2\\3&x&-1\\4&x&-2\end{vmatrix}=2$ 4.2 $\begin{vmatrix}1&x&2\\x&3&1\\-2&-1&x\end{vmatrix}=13$

5.1 Berechnen Sie X aus Aufgabe 2.1 mit

$$A=\begin{pmatrix}15&5&-350\\6&-9&-60\\7&-10&35\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}10&5&5\\-3&10&15\\-9&9&-10\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&2&0\\0&0&-5\end{pmatrix}$$

5.2 Berechnen Sie X aus Aufgabe 2.2 mit

$$A=\begin{pmatrix}15&-40&205\\-6&1&25\\8&9&15\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-25&-30&-140\\-3&0&30\\6&10&40\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&2&0\\0&0&-5\end{pmatrix}$$

5.3 Berechnen Sie X aus Aufgabe 2.9 mit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$

5.4 Berechnen Sie X aus Aufgabe 2.10 mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

Lösungen:

1. $AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$, $AC = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 6 & -3 & 11 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $BC = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 13 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$CD = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 14 & 15 \\ 14 & 4 & 23 & 26 \end{pmatrix}$, $C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$D^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $CC^T = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$, $C^TC = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 13 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\left(B^T\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \left(B^{-1}\right)^T$, $\left(A^T\right)^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \left(A^{-1}\right)^T$,

$\left(CC^T\right)^{-1} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 14 & -7 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$., AD, BD, DA, DB, DC ex. nicht.

2.1 $X = C(A+B)^{-1}$ 2.2 $X = (B-A)^{-1}C$ 2.3 $X = (A-B)^{-1}(C-D)$

2.4 $X = B^{-1}A^{-1}FD^{-1}C^{-1}$ 2.5 $X = (E+A)(AB-C)^{-1}$

2.6 $X = 2(C-AB)$ 2.7 $X = B+A+E$

2.8 $X = (AB-C)(2E+B-C)^{-1}$

3.1 17 3.2 0 3.3 20 3.4 11 3.5 0 3.6 -2

3.7 6 3.8 4 3.9 -2

4.1 $x_1 = 0, \quad x_2 = -2$ 4.2 $x_1 = 0, \quad x_2 = i, \quad x_3 = -i$

5.1 $\left(A+B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & 10 & -345 \\ 3 & 1 & -45 \\ -2 & -1 & 25 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -19 & 21 \\ -3 & 13 & -18 \\ 0.2 & -1 & 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} -12 & 57 & -63 \\ -6 & 26 & -36 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$

5.2 $(B-A)^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 10 & -345 \\ 3 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 25 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -119 & -59 \\ -17 & -338 & -167 \\ 0.2 & 4 & 2 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} 18 & -238 & 295 \\ 51 & -676 & 835 \\ -0.6 & 8 & -10 \end{pmatrix}$

5.3 $X = (0.5B - 2E)(A^T + 2E)^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & 16 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}$; $(A^T + 2E)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

5.4 $X = (B-E)^T A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 30 & 7 \end{pmatrix}$

Vektoren

1. Welche der folgenden Vektoren bilden eine Basis im R^2 ?

1.1 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 1.2 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ 1.3 $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$ 1.4 $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

2. Welche der folgenden Vektoren bilden eine Basis im R^3? Stellen Sie in diesen Basen den Vektor $\underline{d}=\begin{pmatrix}6 & 2 & 0\end{pmatrix}^T$ dar!

2.1 $\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \underline{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \underline{c}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 2.2 $\underline{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\-5\end{pmatrix}, \underline{b}=\begin{pmatrix}0\\5\\-3\end{pmatrix}$

2.3 $\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, \underline{b}=\begin{pmatrix}3\\4\\-3\end{pmatrix}, \underline{c}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

3. Bestimmen Sie für jeweils zwei der drei gegebenen Punkte den Abstand:
$P_1=(1,2,3)$, $P_2=(2,-3,-2)$, $P_3=(-3,-3,-3)$

4. Gegeben sind die Vektoren $\underline{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}, \underline{b}=\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}, \underline{c}=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie: $\underline{a}^0, \underline{b}^0, \underline{c}^0, \underline{a}+\underline{b}, \underline{a}-\underline{b}, \underline{a}+\underline{b}+\underline{c}, \underline{a}-2\underline{b}-3\underline{c}$. Geben Sie die Beträge dieser Vektoren an.

5. Bestimmen Sie die Winkel zwischen den Vektoren $\underline{a}, \underline{b}$.

5.1 $\underline{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, \underline{b}=\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$ 5.2 $\underline{a}=\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}, \underline{b}=\begin{pmatrix}4\\5\\-2\end{pmatrix}$

5.3 $\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \underline{b}=\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$

6. Geben Sie Vektoren des R^2 an, die zu folgenden Vektoren orthogonal sind.

6.1 $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ 6.2 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 6.3 $\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ 6.4 $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

7. Bestimmen Sie zwei Zahlen α_2 und α_3 so, daß der Vektor $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$ auf den Vektoren $\underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ senkrecht steht.

8. Zeigen Sie, daß die drei Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ paarweise aufeinander senkrecht stehen und in der angegebenen Reihenfolge ein Rechtssystem bilden.

9. Ein Körper ist im Punkt (1, 5, 7) drehbar gelagert. An seinem Punkt (1, -1, 3) greift die Kraft $\underline{F} = (2,1,-1)^T$ an. Bestimmen Sie das resultierende Drehmoment.

10. Die Kraft $\underline{F} = (3,1,-2)^T$ verschiebt den Punkt (3, 4, -1) geradlinig in den Punkt (5, 4, 1). Welche Arbeit wird dabei geleistet?

11. Die Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelogramm auf.

Bestimmen Sie Umfang, Flächeninhalt, Längen der Diagonalen sowie die Winkel zwischen den Seiten und zwischen den Diagonalen.

12. Welche der folgenden Tripel von Punkten sind kollinear? Bestimmen Sie die Gerade, auf der sie liegen, bzw. die Ebene, die durch die drei Punkte bestimmt wird. Bestimmen Sei die Normale der Ebene im Punkt P_1.

12.1 $P_1 = (1,3,-2)$, $P_2 = (5,0,3)$, $P_3 = (-3,6,-7)$

12.2 $P_1 = (10,5,-1)$ $P_2 = (4,2,2)$ $P_3 = (6,3,1)$

12.3 $P_1 = (1,2,4)$ $P_2 = (3,5,-1)$ $P_3 = (2,4,-2)$.

13. Geben Sie je zwei Punkte und einen Vektor auf der gegebenen Geraden sowie einen Vektor an, der auf der Geraden senkrecht steht.

13.1 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ 13.2 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 13.3 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

14. Bestimmen Sie je drei Punkte und zwei Vektoren, die in den angegebenen Ebenen liegen, und den Normalenvektor dieser Ebenen.

14.1 $3x - 5y + z = 37$ 14.2 $-x + 2y - 6 = 0$ 14.3 $15z - 5x + 25 = 0$

15. Bestimmen Sie eine parameterfreie Gleichung der durch die nachfolgenden Angaben jeweils festgelegten Ebene E:

15.1 In E liegen die Punkte $P_1(1,2,3); P_2(0,3,1), P_3(1,-1,1)$.

15.2 In E liegen die Punkte $P_1(0,1,0); P_2(3,7,-2)$ und der Vektor $\underline{a} = (1\ -1\ 7)^T$.

15.3 In E liegt der Punkt $P_1(1,1,1)$ und die Vektoren $\underline{a} = (1\ 2\ 3)^T$, $\underline{b} = (0\ 1\ -1)^T$.

16. Geben Sie Lösungsansätze an zur Berechnung

16.1 des Abstandes eines gegebenen Punktes P_0 von einer Geraden

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{p1} \\ y_{p1} \\ z_{p1} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix},$$

16.2 des Abstandes eines gegebenen Punktes P_0 von einer Ebene mit dem Stellungsvektor $\underline{n}$. In der Ebene liege der Punkt A.

16.3 des Abstandes zweier gegebener Punkte,

16.4 des Abstandes zweier gegebener windschiefer Geraden,

16.5 des Abstandes zweier gegebener paralleler Ebenen,

16.6 des Durchstoßpunktes einer gegebenen Geraden durch eine gegebene Ebene,

16.7 des Abstandes zweier paralleler Geraden.

17. Berechnen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel folgender Geraden, falls vorhanden. Wenn die Geraden einander nicht schneiden, berechnen Sie deren Abstand zueinander.

17.1 $g_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $g_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

17.2 $g_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ $g_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

17.3 $g_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $g_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

18. Bestimmen Sie Schnittgerade und Schnittwinkel folgender Ebenen, falls vorhanden, ansonsten den Abstand der Ebenen zueinander.

18.1 $E_1: \ 4x + 11y - 9z = 6$ $E_2: \ x + 14y - 6z = 9$

18.2 $E_1: \ 2x - 5y + 3z = 5$ $E_2: \ -4x + 10y - 6z = 8$.

19. Bestimmen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes der Geraden g durch die Ebene E und den Schnittwinkel.

g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

20 In welchem Punkt durchstößt eine Gerade g, die auf der Ebene E: x –2y +2z = 3 senkrecht steht und den Punkt P(6, -8, 13) enthält, die Ebene E?

21. Vom Punkt P(1, 0, 6) ist das Lot auf die Ebene E: 2x – y + 4z = -16 zu fällen. Bestimmen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes F.

Lösung:

1. b), c) linear abhängig a, d) linear unabhängig

2.1 Basis $\underline{d} = \underline{a} + 2\underline{b} + 3\underline{c}$ 2.2, 2.3 keine Basis

3. $|P_1P_2| = 7{,}14$ $|P_1P_3| = 8{,}77$ $|P_2P_3| = 5{,}099$

4. $\underline{a}^0 = \frac{1}{\sqrt{13}}\underline{a}$, $\underline{b}^0 = \frac{1}{\sqrt{20}}\underline{b}$, $\underline{c}^0 = \frac{1}{\sqrt{10}}\underline{c}$,

$\underline{a} + \underline{b} = (1\ 6\ 0)^T$, $\underline{a} - \underline{b} = (5\ -2\ 0)^T$, $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = (2\ 6\ -3)^T$, $\underline{a} - 2\underline{b} - 3\underline{c} = (4\ -6\ 9)^T$

$|\underline{a}| = \sqrt{13}$, $|\underline{b}| = \sqrt{20}$, $|\underline{c}| = \sqrt{10}$

5.1 $\alpha = 135°$ 5.2 $\alpha = 90°$ 5.3 $\alpha = 109{,}5°$

6.1 $\underline{a} = \begin{pmatrix} -1{,}5a_y \\ a_y \end{pmatrix}$ 6.2 $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ 0 \end{pmatrix}$ 6.3, 6.4 wie 6.1

7. $\alpha_2 = 5/2$, $\alpha_3 = -9/2$

8. $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ $\underline{a} \cdot \underline{c} = 0$ $\underline{b} \cdot \underline{c} = 0$ $[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] > 0$

9. M = (10, -8, 12) 10. W = 2

11. u = 9,2 A = 3,3 $|d_1| = \sqrt{6}$ $|d_2| = \sqrt{18}$ $\alpha = 132{,}1°$ $\beta = 146°$

12.1 kollinear $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, 12.2 kollinear $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

12.3 nicht kollinear: 8x – 7y –z = -10

17.1 d = 0,6 φ = 73,22°, 17.2 S(0, 2, 2) φ= 60,2° 17.3 d = 7 φ=0°

18.1 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 18.2 d = 1,46

19. S(-541/17, 963/17,-2603/17) φ = 1,7°

20. d = 15 21. P(-3, 2,-2)

Lineare Gleichungssysteme/W

1. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mittels des Algorithmus' von Gauß .

1.1
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 &= -1 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= 1 \\ -2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 16 \end{aligned}$$

1.2
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

1.3
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -3 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 4x_3 - 3x_4 &= -1 \end{aligned}$$

1.4
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 5x_4 &= 5 \end{aligned}$$

1.5
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -8 \\ -3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -21 \end{aligned}$$

1.6
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 13 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= -4 \end{aligned}$$

1.7
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 7x_1 - 4x_2 - x_3 &= -2 \\ -x_1 - 3x_2 - 12x_3 &= -5 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 2 \\ 5x_2 + 17x_3 &= 7 \end{aligned}$$

1.8
$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 17x_4 &= -20 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 &= -8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 7x_4 &= -4 \\ 2x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

1.9
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_5 &= 2 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - 10x_3 + x_4 - x_5 &= 11 \\ 3x_1 + 2x_2 - 15x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 12 \end{aligned}$$

2. Für welche $a \in R$ sind die Gleichungssysteme lösbar? Geben Sie die Lösungen an!

2.1
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 &= a \end{aligned}$$

2.2
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 3 \\ -x_1 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + ax_3 &= 3 \end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie mittels des Algorithmus von Gauß die Inversen folgender Matrizen.

3.1 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 20 \end{pmatrix}$

3.2 $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mit der Cramer`schen Regel!

4.1
$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 - x_3 &= -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

4.2
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -4 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -2 \end{aligned}$$

4.3
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 3 \\ 6x_1 + 6x_2 + 10x_3 &= 7 \\ 9x_1 + 4x_2 + 20x_3 &= 9 \end{aligned}$$

4.4
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -5 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -7 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned}$$

Lösung:

1.1 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 1.2 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ 1.3 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1.4 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1.5 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.6 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1.7 $L = \emptyset$

1.8 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1.9 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.1 $a \neq 1$ keine Lösung, $a = 1$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 \\ 1/7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3/7 \\ -2/7 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.2 $a = 0$ keine Lösung, $a \neq 0$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2/a \\ 2-2/a \\ 1/a \end{pmatrix}$

3.1 $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 14 & -1 & -4 \\ -2 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 3.2 $B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 4 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

4.1 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 0{,}1 \\ 3{,}2 \end{pmatrix}$ 4.2 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 4.3 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1/5 \end{pmatrix}$

4.4 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Übungsaufgaben Differentialrechnung / 2

1. Bilden Sie die 1. Ableitung, und vereinfachen Sie das Ergebnis!

1.1 $y = x \cdot \sqrt{1+x^2}$ 1.2 $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ 1.3 $y = \dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$

1.4 $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^x}$ 1.5 $y = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1.6 $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$ 1.7 $y = x^{x \cdot \ln x}$ 1.8 $y = x^{1+\sin x}$

2. Berechnen Sie folgende Grenzwerte (Bernoulli - L'Hospital)!

2.1 $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\tan x}{\sin 2x}$ 2.2 $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$ 2.3 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{ax} - x}{x - a}$

2.4 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{2x^2 - 3x - 2}$ 2.5 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^x$ 2.6 $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}\right)$

3. Führen Sie von folgenden Funktionen eine vollständige Kurvendiskussion durch! Untersuchen Sie:
Definitionsbereich, Nullstellen, Unstetigkeitsstellen, Verhalten im Unendlichen, Extrema, Wendepunkte, Graph.

3.1 $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

3.2 $f(x) = x\, e^{1/x}$

Berechnen Sie für 3.2 mittels der ersten drei von Null verschiedenen Gliedern der Taylorentwicklung der Funktion an der Stelle x = 1 näherungsweise f(1,3).

4.1 *Unter allen Rechtecken von gegebenem Umfang u ist dasjenige mit maximalem Flächeninhalt zu bestimmen.

4.2 *Welche Punkte (x, y) der Hyperbel $y^2 - x^2 = 1$ haben vom Punkt (1, 0) die kleinste Entfernung?

Lösung:

1.1 $y' = \dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

1.2 $y' = \sqrt{\dfrac{1}{(x-1)(x+1)^3}}$

1.3 $y' = \dfrac{4-2x}{(x+1)^3}$

1.4 $y' = \dfrac{2e^x}{\left(1-e^x\right)^2}$

1.5 $y' = \dfrac{1}{(1+x^2)}$

1.6 $y' = \dfrac{2}{3(x^2-1)}$

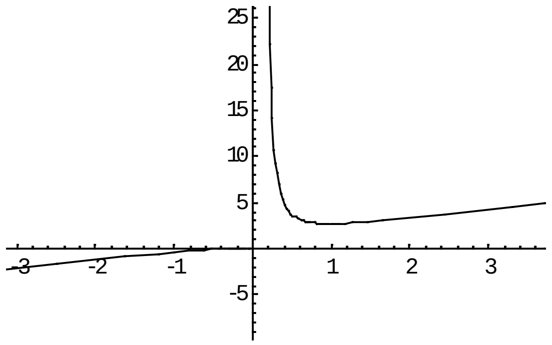
1.7 $y' = x^{x\ln x}\ln x(\ln x + 2)$

1.8 $y' = x^{1+\sin x}(\cos x \ln x + (1+\sin x)\cdot\dfrac{1}{x})$

2.1 1/2   2.2 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 2.3 -1/2   2.4 1/5   2.5 e^{-2} 2.6 1/2

3.1 Db: $R^+ \setminus \{1\}$
Nullstelle: keine
Unstetigkeiten: x = 1 Pol ,
Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$
Extrema: Min(e, e)
Wendepunkte: $P(e^2, e^2/2)$

3.2 Db: $R \setminus \{0\}$, Nullstelle: keine,
Unstetigkeit: $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to-0} f(x) = 0$ Sprung,
Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$,
Extrema: Min(1,e), Wendepunkte: keine;
f(1,3) $\approx$ e(1 + 0.09/2 - 4*0.027/6) $\approx$ 2,7917



4.1 x = y = u/4   4.2 $(x, y) = (0.5; 0.5\sqrt{5})$

Übungsaufgaben Integralrechnung

1. Berechnen Sie folgende Integrale!

1.1 $\int\left(e^{x+1}+2^{-x}-\pi\right)dx$

1.2 $\int\left(\frac{2}{5}x\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\frac{7}{x}\right)dx$

1.3 $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2+8\sqrt[5]{x^3}\,dx$

1.4 $\int\frac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{x^2}{x^2+1}dx$

1.5 $\int 3e^x\sqrt{e^x+1}\,dx$

1.6 $\int\frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}\,dx$

1.7 $\int xe^{3x}dx$

1.8 $\int(2x+1)\arctan x\,dx$

1.9 $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

1.10 $\int\frac{e^x+2}{e^x+1}\,dx$

1.11 $\int\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$

1.12 $\int\frac{x+2}{x^3-2x^2+x}\,dx$

1.13 $\int\frac{2x^2+9x+12}{x^2+6x+10}\,dx$

2. Ermitteln Sie den Inhalt des ebenen Bereiches, der begrenzt wird durch

2.1 die Kurve $y=-x^3+9x^2-23x+15$ und die x – Achse,

2.2 $y^2=4x$ und y = 2x – 4.

In den folgenden Aufgaben darf eine Integraltabelle oder der Taschenrechner zur Berechnung des unbestimmten Integrals zu Hilfe genommen werden!

3. Berechnen Sie die Länge folgender Kurven:

3.1 $y=\frac{2}{3}x^2;\qquad 0\le x\le 3$

3.2 $x(t)=e^t\cos t;\ \ y(t)=e^t\sin t;\qquad 0\le t\le 1$

3.3 $y=\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x};\qquad 1\le x\le 4$

4. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch die Rotation der durch folgende Funktionen begrenzten Fläche um die x – Achse bzw. die y – Achse entsteht.

4.1 $y=6-\frac{6}{x^2}$, x = 2, x = 6, Rotation um x- und y- Achse,

4.2 $y=x^2+1$, y = 3 – x, Rotation um x – Achse.

Lösung:

1.1 $e^{x+1} - \frac{2^{-x}}{\ln 2} - \pi x + C$

1.2 $\frac{4}{25} x^2 \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + 7 \ln|x| + C$

1.3 $-\frac{1}{x} - 2 \ln|x| + x + 5x \sqrt[5]{x^3} + C$

1.4 $2\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x^3} + x - \arctan x + C$

1.5 $2\sqrt{\left(e^x + 1\right)^3} + C$

1.6 $-2\sqrt{5 + \cos x} + C$

1.7 $\frac{1}{9}(3x - 1)\, e^{3x} + C$

1.8 $(x^2 + x + 1) \arctan x - x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$

1.9 $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C$

1.10 $2x - \ln(e^x + 1) + C$

1.11 $4 \ln|x - 1| - 7 \ln|x + 3| + 5 \ln|x - 4| + C$

1.12 $2 \ln|x| - 2 \ln|x - 1| - \frac{3}{x - 1} + C$

1.13 $2x - \frac{3}{2} \ln|x^2 + 6x + 10| + \arctan(x + 3) + C$

2.1 8 2.2 9

3.1 6,97018 3.2 $\sqrt{2}(e - 1)$ 3.3 6

4.1 $V_x = 381{,}52$

$V_y = 41{,}4167$ (bei Hinzunahme der Bedingung y = 0 ergibt sich $V_y = 561{,}76$)

4.2 $V_x = 73{,}51$