

Integraltransformationen

Cordula Bernert

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Integraltransformationen | 3 |
| 1.1 | Die Fouriertransformation | 3 |
| 1.1.1 | Einführung | 3 |
| 1.1.2 | Definition der Fouriertransformation | 3 |
| 1.1.3 | Rechengesetze und Eigenschaften der Fouriertransformation | 9 |
| 1.1.4 | Anwendung der Fouriertransformation | 12 |
| 1.2 | *Laplacetransformation | 19 |
| 1.2.1 | Rechenregeln und Abbildungsgesetze | 22 |
| 1.2.2 | Die inverse Laplacetransformation | 28 |
| 2 | Ausgewählte Probleme der Numerik | 31 |
| 2.1 | Grundlagen | 31 |
| 2.2 | Fehleranalyse | 32 |
| 2.2.1 | Definition von Fehlergrößen | 33 |
| 2.2.2 | Rundungsfehler/Rechnungsfehler | 34 |
| 2.2.3 | Eingangsfehler und Kondition | 36 |
| 2.3 | Stabilität | 39 |
| 2.4 | *LANDAU-Symbole O und o | 42 |
| 2.5 | Diskrete Fourieranalysis | 43 |
| 2.5.1 | Diskrete Fouriertransformation für periodische Funktionen | 43 |
| 2.5.2 | Diskrete Fouriertransformation für nichtperiodische Funktionen | 46 |
| 2.6 | Die schnelle Fouriertransformation (FFT) | 49 |
| 2.6.1 | Formelsatz | 49 |
| 2.6.2 | Anwendungen | 50 |

Literaturverzeichnis

- [1] PREUß, WENISCH: Lehr- und Übungsbuch Numerische Mathematik, Fachbuchverlag Leipzig 2001
- [2] SCHWARZ, KÖCKLER: Numerische Mathematik, BG Teubner Verlagsgesellschaft 2004
- [3] HANKE-BOURGEOIS: Grundlagen der Numerischen Mathematik und des wissenschaftlichen Rechnens, Vieweg Verlag 2009
- [4] SCHWETLICK, KRETZSCHMAR: Numerische Verfahren für Naturwissenschaftler und Ingenieure, Fachbuchverlag Leipzig 1991
- [5] GRÜNDEMANN: Skript Numerische Verfahren 2008
- [6] BÄRWOLF: Numerik für Ingenieure, Physiker und Informatiker, Spektrum Verlag 2007

1 Integraltransformationen

1.1 Die Fouriertransformation

1.1.1 Einführung

Die Fourierreihenentwicklung ist nur für periodische Signale $f(t)$ möglich. Zu deren Analyse reichen die Grundfrequenz und deren Vielfache aus. In der Praxis treten jedoch häufig auch Einmalimpulse oder andere nichtperiodische Vorgänge auf. Dann müssen zur Beschreibung alle möglichen Frequenzen zugelassen werden. Folglich muss die Summation über überabzählbar viele Frequenzen erfolgen, und die Fourierreihe geht in die Fouriertransformation über. Die Fourierreihe ist demzufolge ein Spezialfall der Fouriertransformation für periodische Originalfunktionen. Deshalb bleiben auch die Anwendungsgebiete erhalten bzw. können erweitert werden zu:

- Untersuchung von nichtperiodischen Signalen
- Dimensionierung von Filtern, z.B. von Bandpass-, Hochpass-, Tiefpassfiltern, Mehrwegboxen, ...
- Hilfsmittel zur Lösung von Differentialgleichungen und speziellen linearen Gleichungssystemen

1.1.2 Definition der Fouriertransformation

Ausgangspunkt ist die Entwicklung periodischer Funktionen in eine Fourierreihe. Was passiert bei nichtperiodischen Funktionen, z.B. bei einem einmaligen Rechteckimpuls? Gibt es einen Grenzübergang zu unendlich großer Periode?

Sei $f(t)$ periodisch. Dann gilt:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}, \quad \omega_k = \frac{2k\pi}{T}$$
$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_k t} dt.$$

Sei $f(t)$ nichtperiodisch. Dann gilt: $\omega_{k+1} - \omega_k = \Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \implies \quad \frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_k t} dt \right) e^{i\omega_k t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_k t} dt \right) e^{i\omega_k t} \Delta\omega \end{aligned}$$

Mit $T \rightarrow \infty$ folgt $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ und $\omega_k \rightarrow \omega$, das diskrete Spektrum geht in ein kontinuierliches über. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (*) \\ F(i\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \end{aligned}$$

Definition 1.1 Sei $f(t)$ definiert für $-\infty < t < \infty$. Das Integral $F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ heißt Fouriertransformierte von $f(t)$, sofern es existiert. Die Zuordnung von $f(t)$ zu $F(i\omega)$ heißt Fouriertransformation: $\mathcal{FT}(f(t)) = F(i\omega)$.

Bemerkung 1.1 $f(t)$ heißt Originalfunktion, $F(i\omega)$ Bildfunktion. Die Menge der Originalfunktionen bildet den Originalbereich (Zeitbereich), und die Menge der Bildfunktionen den Bildbereich (Frequenzbereich).

Bemerkung 1.2 $F(i\omega)$ ist i. Allg. eine komplexwertige Funktion.

Bemerkung 1.3 $F(i\omega)$ stellt die Verallgemeinerung der Fourierkoeffizienten dar. Sie enthält alle Information über die Ausgangsfunktion $f(t)$.

Bemerkung 1.4 Das Integral wird als uneigentliches Integral berechnet, falls dieses nicht existiert als Cauchy'scher Hauptwert (d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} \sim dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A \sim dt$).

Bemerkung 1.5 Nichtperiodische Funktionen können nicht aus harmonischen Funktionen mit einer Grundfrequenz und deren Vielfachen ($\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) zusammengesetzt werden. Es werden immer alle Frequenzen ($-\infty < \omega < \infty$) mit den komplexen Amplituden $\frac{1}{2\pi} F(i\omega) d\omega$ überlagert.

Bemerkung 1.6 Es sind folgende Begriffsbildungen üblich:

$F(i\omega)$: komplexe Amplitudendichte, Spektraldichte

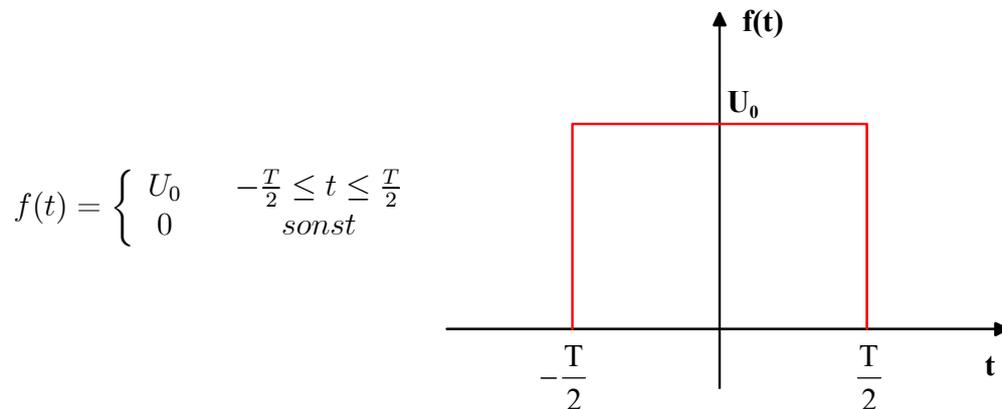
$|F(i\omega)|$: Amplitudenspektrum

$\arg F(i\omega)$: Phasenspektrum.

Bemerkung 1.7 Die Rücktransformation wird durch die Formel (*) vermittelt:

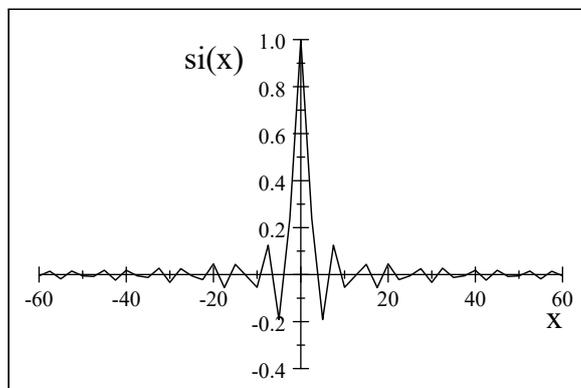
$$\mathcal{FT}^{-1}(F(i\omega)) = f(t).$$

Beispiel 1.1 für die Berechnung einer Fouriertransformierten



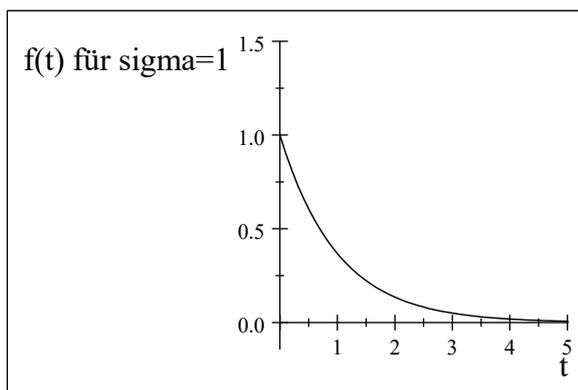
$$\begin{aligned} \mathcal{FT}(f(t)) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U_0 e^{-i\omega t} dt = -\frac{U_0}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\ &= -\frac{2U_0}{\omega} \frac{e^{-i\omega T/2} - e^{i\omega T/2}}{2i} \\ &= \frac{2U_0}{\omega} \sin \frac{\omega T}{2} \\ &= 2U_0 \frac{T \sin \frac{\omega T}{2}}{2 \frac{\omega T}{2}} \\ &= U_0 T \operatorname{si}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \end{aligned}$$

Die Funktion $si(x) = \frac{\sin x}{x}$ heißt Spalt- oder Samplingfunktion:



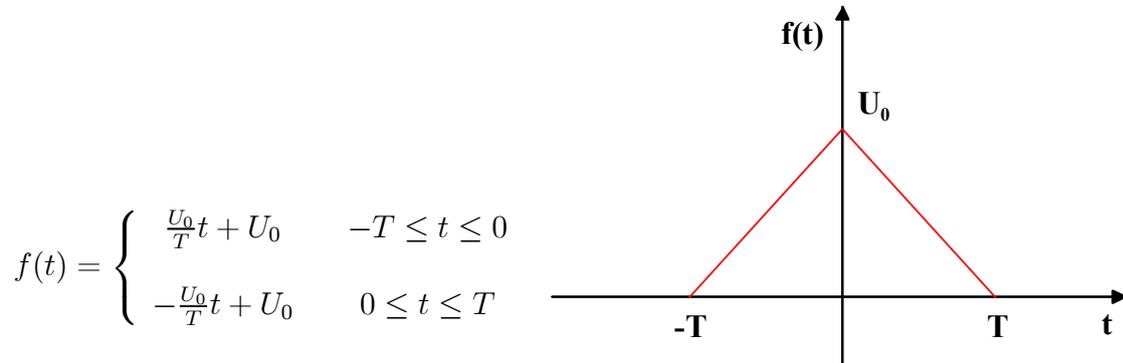
Beispiel 1.2 für die Berechnung einer Fouriertransformierten

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\sigma t} & 0 \leq t \\ 0 & t < 0 \\ \text{mit} & \sigma > 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{FT}(f(t)) &= \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+i\omega)t} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\sigma+i\omega} e^{-(\sigma+i\omega)t} \right]_0^A \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} -\frac{1}{\sigma+i\omega} (e^{-(\sigma+i\omega)A} - 1) \\ &= \frac{1}{\sigma+i\omega} \end{aligned}$$

Beispiel 1.3 für die Berechnung einer Fouriertransformierten



$$f(t) = \begin{cases} \frac{U_0}{T}t + U_0 & -T \leq t \leq 0 \\ -\frac{U_0}{T}t + U_0 & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{FT}(f(t)) &= \int_{-T}^0 \frac{U_0}{T}te^{-i\omega t} dt + \int_0^T -\frac{U_0}{T}te^{-i\omega t} dt + \int_{-T}^T U_0e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{U_0}{T} \left(\left[-\frac{t}{i\omega}e^{-i\omega t} + \int \frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t} dt \right]_{-T}^0 - \left[-\frac{t}{i\omega}e^{-i\omega t} - \frac{1}{i^2\omega^2}e^{-i\omega t} \right]_0^T \right) + \frac{2U_0}{\omega} \sin \omega T \\ &= \frac{U_0}{T} \left(\left[0 + \frac{-T}{i\omega}e^{i\omega T} + \frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}e^{i\omega T} \right] - \left[-\frac{T}{i\omega}e^{-i\omega T} + \frac{1}{\omega^2}e^{-i\omega T} + 0 - \frac{1}{\omega^2} \right] \right) \\ &\quad + \frac{2U_0}{\omega} \sin \omega T \\ &= 2\frac{U_0}{T} \frac{1}{\omega^2} + \frac{U_0}{T} \frac{T}{i\omega} (e^{-i\omega T} - e^{i\omega T}) - \frac{U_0}{T} \frac{1}{\omega^2} (e^{i\omega T} + e^{-i\omega T}) + \frac{2U_0}{\omega} \sin \omega T \\ &= 2\frac{U_0}{T} \frac{1}{\omega^2} + \frac{2U_0}{\omega} \sin \omega T + \frac{2U_0}{\omega} \frac{(e^{-i\omega T} - e^{i\omega T})}{2i} - \frac{2U_0}{T\omega^2} \frac{(e^{i\omega T} + e^{-i\omega T})}{2} \\ &= \frac{2U_0}{T\omega^2} + \frac{2U_0}{\omega} \sin \omega T - \frac{2U_0}{\omega} \sin \omega T - \frac{2U_0}{T\omega^2} \cos \omega T \\ &= \frac{2U_0}{T\omega^2} (1 - \cos \omega T) \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Symmetrie der Funktion ergibt sich weiter hinten noch eine deutlich einfachere Rechnung zur Bestimmung der Fouriertransformierten.

Beispiel 1.4 für die Berechnung der Fouriertransformierten von $f(t) = e^{-a^2 t^2}$; $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{FT}(f(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 t^2} e^{-i\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2 t^2 + i\omega t + \frac{i^2 \omega^2}{2^2 a^2} - \frac{i^2 \omega^2}{2^2 a^2})} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(at + \frac{i\omega}{2a})^2 + \frac{i^2 \omega^2}{4a^2}} dt \\
 &= e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(at + \frac{i\omega}{2a})^2} dt
 \end{aligned}$$

Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist bekannt: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1$.

Mit der Substitution $\frac{z}{\sqrt{2}} = at + \frac{i\omega}{2a}$, $\curvearrowright \frac{dz}{\sqrt{2}} = a dt$

kann wie folgt weitergerechnet werden:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{FT}(f(t)) &= e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + \frac{i\sqrt{2}\omega}{2a}}^{\infty + \frac{i\sqrt{2}\omega}{2a}} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{a\sqrt{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi}}{a\sqrt{2}} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}} \cdot 1 \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}} \stackrel{\omega=2\pi f}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{\pi^2 f^2}{a^2}}
 \end{aligned}$$

Satz 1.1 Existiert $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$, so existiert die Fouriertransformierte $F(i\omega)$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$. $F(i\omega)$ ist dann beschränkt und stetig; $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} |F(i\omega)| = 0$.

1.1.3 Rechengesetze und Eigenschaften der Fouriertransformation

1. Sei $f(t)$ fouriertransformierbar und $f(t) = f(-t)$. Dann gilt mit der Substitution:
 $t_{neu} = -t_{alt}$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{FT}(f(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 e^{-i\omega t} f(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \\
 &= \int_{\infty}^0 e^{i\omega t_{neu}} f(-t_{neu}) (-dt_{neu}) + \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{i\omega t_{neu}} f(t_{neu}) (dt_{neu}) + \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \\
 &= \int_0^{\infty} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) f(t) dt \\
 &= 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = 2\mathcal{FT}_c(f(t)).
 \end{aligned}$$

2. Sei $f(t)$ fouriertransformierbar und $f(t) = -f(-t)$. Dann gilt analog:

$$\mathcal{FT}(f(t)) = -2i \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = -2i\mathcal{FT}_s(f(t)).$$

3. Die komplexe Schreibweise der Fouriertransformation geht mit der Eulerschen Formel $e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t$ und der Substitution $t_{neu} = -t_{alt}$ über in

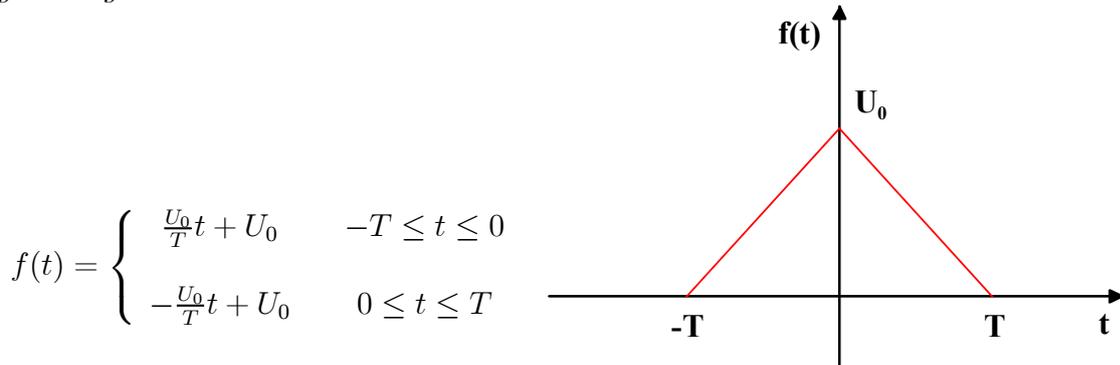
$$\begin{aligned}
 \mathcal{FT}(f(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega t - i \sin \omega t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^0 f(t) (\cos \omega t - i \sin \omega t) dt + \int_0^{\infty} f(t) (\cos \omega t - i \sin \omega t) dt \\
 &= \int_0^{\infty} f(-t) (\cos(-\omega t) - i \sin(-\omega t)) dt + \int_0^{\infty} f(t) (\cos \omega t - i \sin \omega t) dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} f(-t) \cos \omega t dt + \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - i \left(\int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt - \int_0^{\infty} f(-t) \sin \omega t dt \right) \\
&= \mathcal{FT}_c(f(-t)) + \mathcal{FT}_c(f(t)) - i(\mathcal{FT}_s(f(t)) - \mathcal{FT}_s(f(-t)))
\end{aligned}$$

$$\mathcal{FT}_c(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = \frac{1}{2} \mathcal{FT}(f(|t|)) : \quad \text{Cosinus-FT}$$

$$\mathcal{FT}_s(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = \frac{i}{2} \mathcal{FT}(f(|t|) \operatorname{sgnt}) : \quad \text{Sinus-FT.}$$

Beispiel 1.5 Nutzung von Nr. 1 zur Berechnung der Fouriertransformierten der folgenden geraden Funktion:



$$\begin{aligned}
\mathcal{FT}(f(t)) &= 2U_0 \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cos \omega t dt \\
&= 2U_0 \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \frac{1}{\omega} \sin \omega t + \int \frac{1}{T\omega} \sin \omega t dt \right]_0^T \\
&= 2U_0 \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \frac{1}{\omega} \sin \omega t - \frac{1}{T\omega^2} \cos \omega t \right]_0^T \\
&= 2U_0 \left[0 - \frac{1}{\omega} \sin 0 - \frac{1}{T\omega^2} (\cos \omega T - \cos 0) \right] \\
&= \frac{2U_0}{T\omega^2} [1 - \cos \omega T]
\end{aligned}$$

Rechengesetze der Fouriertransformation

Es sei $F(i\omega) = \mathcal{FT}(f(t)); \quad G(i\omega) = \mathcal{FT}(g(t))$

1. **Additionssatz:**

$$\mathcal{FT}(af(t) + bg(t)) = aF(i\omega) + bG(i\omega); \quad a, b \in \mathbb{C}$$

2. **Verschiebungssatz:**

$$\mathcal{FT}(f(at + b)) = \frac{1}{|a|} e^{\frac{ib\omega}{a}} F\left(\frac{i\omega}{a}\right); \quad a \neq 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

3. **Dämpfungssatz:**

$$\mathcal{FT}(e^{ibt} f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{i\omega - b}{a}\right); \quad a > 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{C}$$

4. **Faltungssatz:**

$$\exists \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt$$

$$\Rightarrow \quad \exists \quad a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau : \quad \text{Faltung}, \quad \mathcal{FT}(a(t)) = F(i\omega) \cdot G(i\omega)$$

5. **Integrationsatz:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0 \implies \mathcal{FT}\left(\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{1}{i\omega} F(i\omega)$$

6. **Differentiationsatz:**

$$\begin{aligned} &\text{Ist } f^{(n)}(t) \text{ fouriertransformierbar, } n \in \mathbb{N}, \\ &\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0, \quad \dots, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f^{(n-1)}(t) = 0 \\ &\implies \quad \mathcal{FT}(f^{(n)}(t)) = (i\omega)^n F(i\omega) \end{aligned}$$

7. **Multiplikationssatz:**

$$\text{Ist } f(t) \text{ fouriertransformierbar, } n \in \mathbb{N} \implies \mathcal{FT}(t^n f(t)) = i^n F^{(n)}(i\omega)$$

8. Parsevalscher Satz:

$$\exists \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad \implies \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(i\omega)|^2 d\omega$$

9. Interpretation in Elektrotechnik / Elektronik:

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ ist die Energie, die ein Signal $f(t)$ in einem Widerstand der Größe 1Ω in Wärme umsetzt.

Tabellen für die Fouriertransformation sind z.B. zu finden in Minöl / 10, in Bronstein: Taschenbuch der Mathematik, in Oberhettinger "Tabellen zur Fouriertransformation". Dabei ist zu beachten, dass in der Literatur die Darstellung der Fouriertransformation mit anderen Vorfaktoren als in der Vorlesung erfolgen kann!

1.1.4 Anwendung der Fouriertransformation

Die Anwendungen der Fouriertransformation sind sehr vielfältig in Naturwissenschaft, Technik und Mathematik, so dass zu den Einzelheiten auf die speziellen Fachgebiete verwiesen werden muss. Es seien stellvertretend genannt:

- Analyse und Synthese von Signalen
- Untersuchungen von linearen Systemen, z.B. zur Dimensionierung von Filtern....
- Lösung von partiellen Differentialgleichungen mit Anfangs- oder Randwerten
- schnelle Lösung spezieller linearer Gleichungssysteme
- Berechnung von uneigentlichen Integralen
- digitale Bildverarbeitung
- Datenkompression
- Beweis des Abtasttheorems:

Satz 1.2 *Es sei $\Delta t = T = \frac{\pi}{\Omega}$ für eine mit Ω bandbegrenzte, d.h. $F(i\omega) \equiv 0$ für $|\omega| > \Omega$, stetige, stückweise glatte, absolut integrierbare Funktion $f(t)$ und gilt weiter $\int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)| dt < \infty$, so lässt sich $f(t)$ darstellen durch*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \operatorname{si}(\Omega(t - nT)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n\frac{\pi}{\Omega}\right) \operatorname{si}(\Omega t - n\pi); \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die auftretende Reihe heißt Kardinalreihe. Die Bedingung $F(i\omega) \equiv 0$ für $|\omega| > \Omega$ ist in der Technik erfüllt (frequenzbandbegrenztetes Spektrum). Damit lässt sich das Signal aus den abgetasteten Werten $f(nT)$ zusammensetzen. Die Abtastperiode ist dann $T = \frac{\pi}{\Omega}$.

Beispiel 1.6 Berechnung von uneigentlichen Integralen

Wir benutzen

$$r_T(t) = \begin{cases} 1 & -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit der FT } F(i\omega) = 2T \operatorname{si}(T\omega).$$

mit $T = 1$ und die Gleichung von Parseval-Plancherel:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \int_{-1}^1 dt = 2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| 2 \frac{\sin(\omega)}{\omega} \right|^2 d\omega, \end{aligned}$$

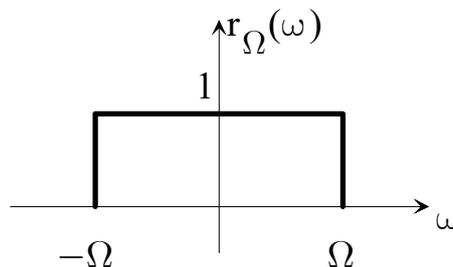
woraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2} d\omega = \pi.$$

Ist die Fouriertransformation ausführbar für eine bestimmte Funktion, so existiert eine eindeutige Abbildung zwischen der Originalfunktion und der Bildfunktion, so dass es keine Rolle spielt, ob man mit der Originalfunktion oder der Fouriertransformierten arbeitet. Daraus ergibt sich ein zusätzlicher Vorteil: Berechnungen, die in einem der beiden Bereiche schwierig sind, können in den jeweils anderen Bereich verlegt werden, wo i.Allg. eine Vereinfachung der Rechnung eintritt.

Beispiel 1.7 Ein ideales Tiefpassfilter lässt nur niedrige Frequenzen („tiefe Töne“) passieren, sperrt also Frequenzen mit $|\omega| > \Omega$. Das kann im Frequenzbereich leicht realisiert werden, in dem man die Fouriertransformierte des zu filternden Signales mit der Funktion $G(i\omega)$ multipliziert:

$$\begin{aligned} G(i\omega) &= r_{\Omega}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega| < \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit} \\ g(t) &= \mathcal{FT}^{-1}(G(i\omega)) \end{aligned}$$



Dabei wird die Fouriertransformierte des Signals außerhalb des Bereiches $[-\Omega, \Omega]$ ausgeblendet, weil dort der Faktor $r_\Omega(\omega) = 0$ ist. Das gefilterte Signal im Zeitbereich erhält man dann durch die inverse Fouriertransformation von $F(i\omega) \cdot G(i\omega) = F(i\omega) \cdot r_\Omega(\omega)$. Für die Rücktransformation verwendet man nun den Faltungssatz:

$$\begin{aligned}\mathcal{FT}(a(t)) &= F(i\omega) \cdot G(i\omega) \\ a(t) &= \mathcal{FT}^{-1}(F(i\omega) \cdot G(i\omega)) \text{ mit} \\ a(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau = (f * g)(t) : \text{ Faltung}\end{aligned}$$

D.h. um das gefilterte Signal $a(t)$ im Zeitraum zu bestimmen, benötigen wir die Funktion $g(t)$, von der bekannt ist

$$\mathcal{FT}(g(t)) = G(i\omega) = r_\Omega(\omega)$$

Wir wissen

$$\begin{aligned}\mathcal{FT}(r_\Omega(t)) &= 2\Omega si(\Omega\omega), \text{ d.h.} \\ \mathcal{FT}\left(\frac{1}{2\Omega}r_\Omega(t)\right) &= si(\Omega\omega) = H(\omega)\end{aligned}$$

Aus der Definition der Fouriertransformation kann man die sogenannte „Symmetrieregeln“ für $H(t)$ ableiten:

$$\begin{aligned}\mathcal{FT}(H(t)) &= 2\pi \cdot h(-\omega) \text{ mit } \mathcal{FT}(h(t)) = H(\omega), \text{ d.h.} \\ h(t) &= \frac{1}{2\Omega}r_\Omega(t)\end{aligned}$$

Da $r_\Omega(\omega)$ eine gerade Funktion ist, gilt weiter

$$\begin{aligned}\mathcal{FT}(si(\Omega t)) &= \mathcal{FT}(H(t)) \\ &= 2\pi \cdot h(-\omega) \\ &= 2\pi \cdot h(\omega) \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{2\Omega}r_\Omega(\omega) \\ &= \frac{\pi}{\Omega}r_\Omega(\omega), \text{ d.h.} \\ \mathcal{FT}\left(\frac{\Omega}{\pi}si(\Omega t)\right) &= r_\Omega(\omega)\end{aligned}$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}g(t) &= \mathcal{FT}^{-1}(G(i\omega)) = \\ &= \mathcal{FT}^{-1}(r_\Omega(\omega)) = \frac{\Omega}{\pi}si(\Omega t)\end{aligned}$$

↷ Die Bestimmung des Ausgangssignals im Zeitbereich erfolgt dann entsprechend:

$$y(t) = x(t) * g(t) = x(t) * \frac{\Omega}{\pi} \text{si}(\Omega t).$$

Die Konvergenzbedingung für die Existenz der Fouriertransformierten:

$$\exists \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

ist relativ streng. Bereits für $f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$ ist sie nicht erfüllt, denn es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \int_0^{\infty} 1 dt = \text{„}\infty\text{“}.$$

Damit ist das Einsatzgebiet der Fouriertransformation stark beschränkt. Es gibt zwei Möglichkeiten, dieses Problem zu lösen:

1. die Erweiterung der Klasse der betrachteten Funktionen auf die Distributionen und
2. die Veränderung des Integranden, so dass das uneigentliche Integral für mehr Funktionen der üblichen Art konvergiert.

zu Variante 1: Distributionen sind verallgemeinerte Funktionen, deren exakte Definition über lineare Funktionale den Rahmen dieser Vorlesung sprengen würde. Der bekannteste Vertreter der nichtregulären Distributionen ist die Diracsche δ -Distribution, in der Technik oft auch „Dirac-Impuls“ genannt. Sie dient z.B. zur korrekten Formulierung von kurzzeitig wirkenden Störfunktionen in der Theorie der Differentialgleichungen und ist in der Physik und der Technik sehr verbreitet. Wirkt der bekannte Gesamtimpuls $\int_{t_0}^{t_1} f(t) dt$ in einer kurzen Zeitspanne $[t_0, t_1 = t_0 + \varepsilon]$ (z.B. bei Punktkräften), kann man zu Beschreibung eine Impulsfunktion folgender Art verwenden

$$\delta(t - t_0, \varepsilon) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{für } t_0 < t < t_0 + \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Konzentriert man den Impuls auf $t = t_0$, dann müsste

$$\delta(t - t_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(t - t_0, \varepsilon) = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 1/\varepsilon = \text{„}\infty\text{“} & \text{für } t = t_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Funktion definieren, was mathematisch keinen Sinn macht. Insofern wird die δ -Distribution hier durch ihre mathematischen Eigenschaften charakterisiert:

Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(t, \varepsilon) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1,\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(t, \varepsilon) dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{\varepsilon} f(t) \frac{1}{\varepsilon} dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (F(\varepsilon) - F(t_0)) \\ &= f(t_0). \quad (*)\end{aligned}$$

Es gilt zu beachten, dass die dabei auftretenden Integrale ebenfalls einer Erweiterung bedürfen, die aber hier auch nicht weiter verfolgt werden soll.

Durch diese Eigenschaften der δ -Distribution können nun einige spezielle Funktionen doch noch fouriertransformiert werden.

Beispiel 1.8 Für die δ -Distribution selbst gilt an der Stelle $t_0 = 0$

$$\mathcal{FT}(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \delta(t) dt = e^{-i\omega \cdot 0} = 1$$

und folglich

$$\mathcal{FT}^{-1}(1) = \delta(t).$$

Beispiel 1.9 Damit lässt sich nun auch die Funktion $f(t) \equiv 1$ fouriertransformieren.

$$\delta(t) = \mathcal{FT}^{-1}(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega t} d\omega$$

Mit der Variablensubstitution $\omega' = t$ und $t' = -\omega$ kann dieses Integral auf die Form

der Fouriertransformierten der Funktion $f(t) \equiv 1$ umgeformt werden:

$$\begin{aligned}\delta(\omega') &= \frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} 1 \cdot \exp(i(-t')\omega')(-dt') \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \exp(-it'\omega')dt' \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathcal{FT}(1),\end{aligned}$$

woraus durch Umstellen der Gleichung folgt:

$$\mathcal{FT}(1) = 2\pi \cdot \delta(\omega).$$

Beispiel 1.10 Diese Erkenntnisse nutzt man nun zur Transformation von Sprungfunktionen, beispielsweise für

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t < \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Identität $s(t) = 0.5 + 0.5\text{sgn}(t)$ ist bis auf die Stelle $t = 0$ erfüllt, die aber bei der Integration keine Wirkung hinterlässt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{FT}(s(t)) &= \mathcal{FT}(0.5) + \mathcal{FT}(0.5\text{sgn}(t)) \\ &= 0.5 \cdot 2\pi\delta(\omega) + 0.5 \cdot \frac{2}{i\omega} \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}.\end{aligned}$$

Diese neuen Möglichkeiten werden z.B für **LTI-Systeme** angewendet:

Als ein lineares zeitinvariantes System (LTI-System von linear time invariant system) wird ein Modell für einen Teil aus Natur oder Technik bezeichnet, wenn die darin auftretenden Abbildungen linear und unabhängig von zeitlichen Verschiebungen sind. Es besteht aus inneren Zustandsgrößen und einer Dynamik, die die zeitliche Entwicklung dieser Zustandsgrößen beschreibt.

Mathematisch wird das durch eine lineare Transformation g zwischen den Eingangssignalen $e_i(t)$ und Ausgangssignalen $a_i(t)$ beschrieben:

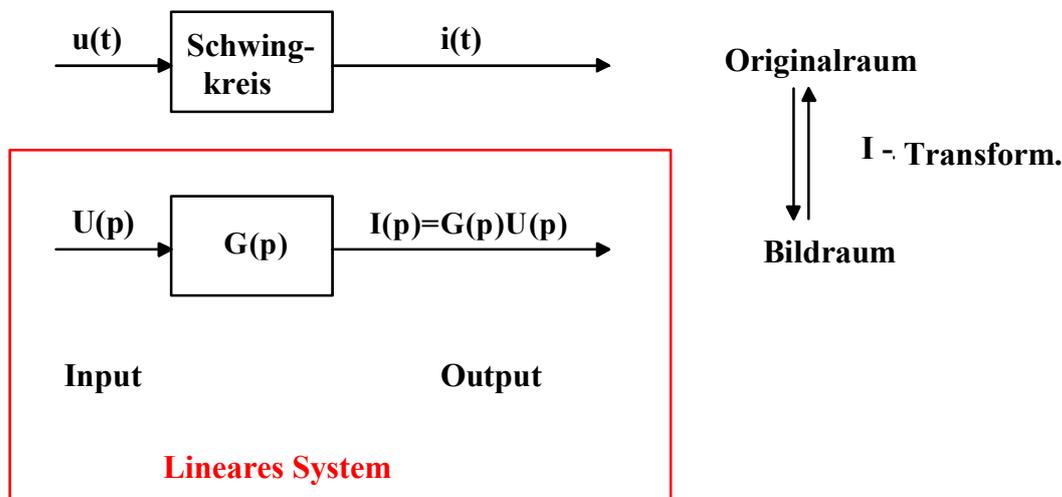
$$g\left(\sum_{i=1}^n \gamma_i e_i(t)\right) = \sum_{i=1}^n \gamma_i (g(e_i(t))) = \sum_{i=1}^n \gamma_i a_i(t)$$

g wird Übertragungsfunktion des Systems genannt. D.h. die Superposition der Eingangssignale führt im Ausgang zu einer Superposition der einzeln transformierten Eingangssignale. Die Zeitinvarianz bedeutet in dieser Notation:

$$g(e(t - t_0)) = a(t - t_0)$$

Das heißt, auf ein verzögertes Eingangssignal liefert das System ein gleiches, entsprechend verzögertes Ausgangssignal. Einige LTI-Systeme lassen sich z.B. durch lineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben. Damit sind diese Systeme aber der Systemanalyse leicht zugänglich.

Viele technische Systeme in der Nachrichten- oder Regeltechnik, wie z.B. Übertragungssysteme, sind in guter Näherung LTI-Systeme. Im Zusammenhang mit den Integraltransformationen findet sich dort die Übertragungsfunktion G im Spektralbereich wieder, wie z.B. in bei der Modellierung eines elektrischen Schwingkreises mit der Spannung $u(t)$ als Eingangsgröße und der Stromstärke $i(t)$ als Ausgang. Der Schwingkreis selbst wird durch eine Funktion $g(t)$ vertreten, die die Umwandlung des Eingangssignals in das Ausgangssignal ausführt. Die Modellierung im Frequenzbereich ist dabei günstig, wenn man Systeme mit einem bestimmten Frequenzverhalten konstruieren möchte:



Es sei nun

$$e(t) = x(t) \circ \bullet X(i\omega),$$

(d.h. zu $x(t)$ gehört die FT $X(i\omega)$)

$$a(t) = y(t) \circ \bullet Y(i\omega)$$

und

$$g(t) \circ \bullet G(i\omega)$$

Mit $Y(i\omega) = G(i\omega)X(i\omega)$ folgt dann aus dem Faltungssatz der Fouriertransformation

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{FT}^{-1}(G(i\omega)X(i\omega)) \\ &= (g * x)(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)x(t - \tau)d\tau \end{aligned}$$

Nach der Anregung des Systems mit der Diracschen δ -Distribution

$$e(t) = x(t) = \delta(t) \circ \bullet 1$$

folgt

$$y(t) = \mathcal{FT}^{-1}(G(i\omega) \cdot 1) = g(t).$$

D.h., das Ausgangssignal, die Antwort des Systems im Zeitbereich, entspricht $g(t)$. Deshalb wird die Funktion $g(t)$ als Impulsantwort bezeichnet.

Variante 2 der Erweiterungsmöglichkeiten der Fouriertransformation führt uns zur Laplacetransformation.

1.2 *Laplacetransformation

Eine Wichtung des Integranden in der Fouriertransformation mit $e^{-\sigma t}$ dämpft das Wachstum des Integranden bei $\sigma > 0$. Die Chance, dass das Integral existiert, wird größer:

$$\begin{aligned} F_{\sigma}(i\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}e^{-\sigma t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+i\omega)t}dt \end{aligned}$$

Wir betrachten nun Funktionen $u(t)$ mit $u(t) \equiv 0, \quad \forall t < 0$ (Einschaltvorgänge).

Damit geht $F_\sigma(i\omega)$ mit $p = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$ über in

$$\begin{aligned} F_\sigma(i\omega) &= \int_0^\infty u(t)e^{-(\sigma+i\omega)t} dt \\ &= \int_0^\infty u(t)e^{-pt} dt \\ &= U(p). \end{aligned}$$

$U(p)$ ist im Allgemeinen eine komplexwertige Funktion, eine Abbildung von \mathbb{R}^+ in \mathbb{C} .

Definition 1.2 Sei $u(t) = 0 \quad \forall t < 0$, $p \in \mathbb{C}$. Das Integral

$$U(p) = \int_0^\infty u(t)e^{-pt} dt$$

heißt Laplacetransformierte, sofern es für mindestens ein $p \in \mathbb{C}$ existiert. Die Zuordnung von $u(t)$ zu $U(p)$ heißt Laplacetransformation: $\mathcal{LT}(u(t)) = U(p)$.

Bemerkung 1.8 $u(t)$ heißt Originalfunktion, $U(p)$ Bildfunktion.

Bemerkung 1.9 $u(t)$ kann für $t < 0$ beliebig sein, weil in der Definition die Untergrenze des Integrals null ist. Es wird dann $u(t) \equiv 0$ für $t < 0$ gesetzt.

Beispiel 1.11 $u(t) = 1$ für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} U(p) &= \int_0^\infty u(t) e^{-pt} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-pt} dt \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{p} e^{-Ap} + \frac{1}{p} \right) \end{aligned}$$

Wegen $|e^{-Ap}| = |e^{-xA} \cdot e^{-iyA}| = e^{-xA} \cdot 1$ folgt $\lim_{A \rightarrow \infty} e^{-pA} = 0$, falls $\operatorname{Re} p = x > 0$.
Damit ergibt sich

$$U(p) = \mathcal{LT}(1) = \frac{1}{p} \quad \forall p \mid \operatorname{Re} p > 0$$

Beispiel 1.12 $u(t) = t$ für $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
 U(p) &= \mathcal{LT}(t) = \int_0^{\infty} u(t) e^{-pt} dt \\
 &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A t e^{-pt} dt \\
 &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-t \frac{1}{p} e^{-tp} \Big|_0^A + \int_0^A \frac{1}{p} e^{-pt} dt \right) \\
 &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left(-A \frac{1}{p} e^{-Ap} - 0 - \frac{1}{p^2} e^{-pA} + \frac{1}{p^2} \right) \\
 &= \frac{1}{p^2} \quad \forall p \mid \operatorname{Re} p > 0
 \end{aligned}$$

Beispiel 1.13 $u(t) = e^{at}$ für $t \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$

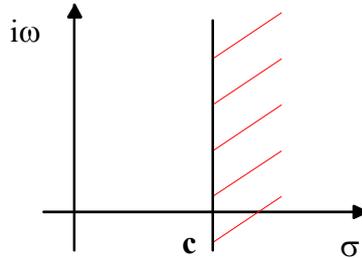
$$\begin{aligned}
 U(p) &= \mathcal{LT}(e^{at}) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt \\
 &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-(p-a)t} dt \\
 &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t} \Big|_0^A \right] \\
 &= \lim_{A \rightarrow \infty} -\frac{1}{p-a} (e^{-(p-a)A} - 1) \\
 &= \frac{1}{p-a} \quad \forall p \mid \operatorname{Re} p > a
 \end{aligned}$$

Problem: Welche Funktionen sind laplacetransformierbar?

Satz 1.3 $f(t)$ sei stückweise stetig, und es gelte $|f(t)| \leq M e^{ct}$ mit $M, c \in \mathbb{R}$; $M > 0$, $c > 0$. Dann existiert $\mathcal{LT}(f(t))$ für alle $p \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} p > c$.

Bemerkung 1.10 Die Bedingungen des Satzes sind nicht notwendig, nur hinreichend, d.h. die Laplacetransformierten können dennoch existieren, auch wenn die Bedingungen nicht erfüllt sind.

Bemerkung 1.11 Das Konvergenzgebiet des Laplaceintegrals ist die Halbebene $\operatorname{Re} p > c$ der komplexen Zahlenebene. Wenn $c < \infty$ gilt, ist die Fortsetzung der Laplacetransformierten auf ganz \mathbb{C} möglich, evtl. mit Ausnahme bestimmter singulärer Stellen.



Bemerkung 1.12 Die Berechnung der Laplacetransformierten ist sehr aufwendig \implies Benutzung von Korrespondenztabelle aus z.B. Greuel, *Mathematische Ergänzungen und Aufgaben für Elektrotechniker*, MINÖL Band 10, Bronstein,... Dabei werden die Tabellen in beiden Richtungen, sowohl zur Hin- als auch zur Rücktransformation benutzt.

Da jedoch die Tabellen nicht alle Anwendungsfälle erfassen können, ist es notwendig, zusätzlich die Rechengesetze der Laplacetransformation zu beherrschen.

1.2.1 Rechenregeln und Abbildungsgesetze

1. Linearkombination von Originalfunktionen

Zu $f_i(t)$ sei $F_i(p) = \mathcal{LT}(f_i(t))$; $i = 1, 2, \dots, n$ bekannt. Welche Laplacetransformation gehört zur Funktion $g(t) = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n$, $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$?

$$\begin{aligned}
 G(p) &= \mathcal{LT}(g(t)) = \int_0^{\infty} (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n) e^{-pt} dt \\
 &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n) e^{-pt} dt \\
 &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A c_1 f_1 e^{-pt} dt + \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A c_2 f_2 e^{-pt} dt + \dots + \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A c_n f_n e^{-pt} dt \\
 &= c_1 \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f_1 e^{-pt} dt + c_2 \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f_2 e^{-pt} dt + \dots + c_n \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A f_n e^{-pt} dt \\
 &= c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p) + \dots + c_n F_n(p)
 \end{aligned}$$

Diese Regel wird als Additionssatz bezeichnet:

$$\mathcal{L}T(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n) = c_1 \mathcal{L}T(f_1) + c_2 \mathcal{L}T(f_2) + \dots + c_n \mathcal{L}T(f_n)$$

$\mathcal{L}T$ ist damit ein linearer Operator.

Beispiel 1.14 $\mathcal{L}T(1 + \alpha e^{at} + \sin \beta t) = \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{p-a} + \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$, $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2. Lineare Substitution im Originalbereich

Zu $f(t)$ sei $F(p) = \mathcal{L}T(f(t))$ bekannt. Gesucht ist die Laplacetransformierte für $g(t)$.

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < \frac{b}{a} \\ f(at - b) & \text{für } t \geq \frac{b}{a} \end{cases}$$

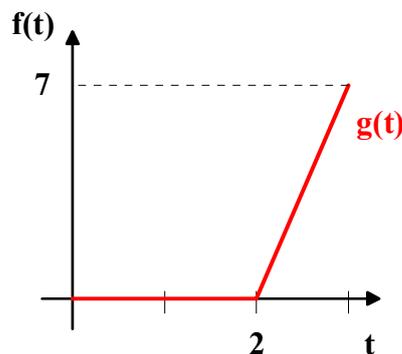
Mit der Substitution $at - b = z$; $dz = a dt$; $\frac{b}{a} \rightarrow 0$; $\infty \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$\begin{aligned} G(p) &= \mathcal{L}T(g(t)) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt \\ &= \int_{\frac{b}{a}}^{\infty} f(at - b) e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(z) e^{-p \frac{z+b}{a}} dz \\ &= \frac{1}{a} e^{-p \frac{b}{a}} \int_0^{\infty} f(z) e^{-\frac{pz}{a}} dz \\ &= \frac{1}{a} e^{-\frac{pb}{a}} F\left(\frac{p}{a}\right). \end{aligned}$$

Bemerkung 1.13 Sei $b = 0$; $a > 0$: $\mathcal{L}T(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$: *Ähnlichkeitssatz*

Bemerkung 1.14 Sei $b > 0$; $a = 1$:
 $\mathcal{L}T(f(t - b)) = e^{-pb} F(p)$ für $t \geq b$: *Verschiebungssatz*

Beispiel 1.15 $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 2 \\ 7(t - 2) & \text{für } t \geq 2 \end{cases}$



1. Rechenmöglichkeit: $\mathcal{LT}(t) = \frac{1}{p^2}$; $\mathcal{LT}(7t) = \frac{7}{p^2}$;
 Benutze den Verschiebungssatz mit $b = 2$: $\mathcal{L}(f(t-b)) = e^{-pb}F(p)$ für $t \geq b$.
 Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathcal{LT}(g(t)) &= e^{-2p}\mathcal{LT}(7t) \\ &= \frac{7}{p^2}e^{-2p}\end{aligned}$$

2. Rechenmöglichkeit: $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 2 \\ 7t - 14 & \text{für } t \geq 2 \end{cases}$, $\mathcal{LT}(t) = \frac{1}{p^2}$;

Benutze die lineare Substitution im Originalbereich: $\mathcal{LT}(f(at-b)) = \frac{1}{a}e^{-\frac{pb}{a}}F\left(\frac{p}{a}\right)$
 mit $a = 7$; $b = 14$

$$\begin{aligned}\mathcal{LT}(g(t)) &= \frac{1}{7}e^{-p\frac{14}{7}}F\left(\frac{p}{7}\right) \\ &= \frac{1}{7}e^{-2p}\frac{1}{\left(\frac{p}{7}\right)^2} \\ &= \frac{1}{7}e^{-2p}\frac{49}{p^2} \\ &= \frac{7}{p^2}e^{-2p}\end{aligned}$$

3. Laplacetransformation von Ableitungen

Zu $f(t)$ sei $F(p) = \mathcal{LT}(f(t))$ bekannt. Gesucht ist die Laplacetransformierte für $\dot{f}(t)$. Mit partieller Integration ergibt sich:

$$\mathcal{LT}(\dot{f}(t)) = \int_0^{\infty} \dot{f}(t) e^{-pt} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{A \rightarrow \infty} [f(t)e^{-pt}|_0^A + \int_0^A pe^{-pt}f(t)dt] \\
&= 0 - f(+0) + p \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-pt}f(t)dt \\
&= -f(+0) + pF(p).
\end{aligned}$$

Diesen Prozess kann man mittels vollständiger Induktion auf höhere Ableitungen ausdehnen.

Satz 1.4 *Differentiationssatz:*

1. $f(t)$ besitze die ersten n Ableitungen $f^{(i)}(t)$; $i = 1, 2, \dots, n$.
2. $f^{(i)}(t)$ seien stückweise stetig für $i = 1, 2, \dots, n$
3. Es existiere $\lim_{t \rightarrow +0} f^{(i)}(t) = f^{(i)}(+0)$; $i = 1, 2, \dots, n$.
4. $|f^{(i)}(t)| \leq Me^{ct}$ für $i = 1, 2, \dots, n$; $M, c \in \mathbb{R}$; $M > 0$

Dann gilt:

$$\mathcal{LT}(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - p^{n-1}f(+0) - p^{n-2}\dot{f}(+0) - \dots - f^{(n-1)}(+0)$$

Bemerkung 1.15 Die Anwendung dieses Satzes erfolgt z.B. bei der Transformation einer Anfangswertaufgabe für eine gewöhnliche Differentialgleichung. Im Bildraum entsteht dann eine algebraische Gleichung für die Laplacetransformierte der gesuchten Funktion, die mittels Rücktransformation zur Lösung des AWP führt.

Bemerkung 1.16 Außerdem kann dieser Satz zur Berechnung unbekannter Laplacetransformierter eingesetzt werden:

Beispiel 1.16 Gegeben sind $f(t) = \cos \omega t$ und ihre Laplacetransformierte

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
\mathcal{LT}(\dot{f}(t)) &= \mathcal{LT}(-\omega \sin \omega t) \\
&= pF(p) - f(+0) \\
&= p \frac{p}{p^2 + \omega^2} - \cos 0 \\
&= \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} - \frac{p^2 + \omega^2}{p^2 + \omega^2} \\
&= -\frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2}.
\end{aligned}$$

Aus der Linearität der Laplacetransformation folgt damit:

$$\begin{aligned} -\omega \mathcal{L}T(\sin \omega t) &= -\frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}T(\sin \omega t) &= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

4. Dämpfungssatz

Es sei $F(p) = \mathcal{L}T(f(t))$. Dann gilt:

$$\mathcal{L}T(e^{-\alpha t} f(t)) = F(p + \alpha).$$

Eine wirkliche Dämpfung liegt nur für $\alpha > 0$ vor!

Beispiel 1.17 *Gedämpfte Schwingung:* $f(t) = Ae^{-\alpha t} \sin \omega t$
Nach Tabelle ergibt sich

$$\mathcal{L}T(A \sin \omega t) = \frac{A\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Mit dem Dämpfungssatz folgt:

$$\mathcal{L}T(e^{-\alpha t} A \sin \omega t) = \frac{A\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}.$$

5. Faltungssatz

Es sei $F(p) = \mathcal{L}T(f(t))$, $G(p) = \mathcal{L}T(g(t))$; $t \geq 0$. Das Integral

$$\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau = f * g$$

wird als Faltung der Funktionen f und g bezeichnet. Dann gilt

$$\mathcal{L}T(f * g) = F(p) \cdot G(p).$$

Mit diesem Satz kann der Integrationssatz hergeleitet werden.

6. Integrationssatz

Es sei im Faltungssatz $g(t) \equiv 1$. Damit folgt

$$\mathcal{L}T\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = F(p) \cdot \frac{1}{p}$$

Beispiel 1.18

$$\begin{aligned}\mathcal{LT}\left(\int_0^t \sin(\omega\tau) d\tau\right) &= \mathcal{L}(\sin \omega t) \cdot \frac{1}{p} \\ &= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{p}\end{aligned}$$

7. Multiplikationssatz

Es sei $F(p) = \mathcal{LT}(f(t))$. Dann gilt:

$$\mathcal{LT}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(p); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Beispiel 1.19 Wegen $\mathcal{LT}(\sin \omega t) = F(p) =$ und $F'(p) = \frac{-2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$ gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{LT}(t \sin \omega t) &= (-1)^1 F'(p) \\ &= -\frac{-2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2} \\ &= \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}.\end{aligned}$$

8. Divisionssatz

Es sei $F(p) = \mathcal{LT}(f(t))$. Dann gilt:

$$\mathcal{LT}\left(\frac{1}{t} f(t)\right) = \int_p^\infty F(\tau) d\tau.$$

Beispiel 1.20

$$\begin{aligned}\mathcal{LT}(t) &= \frac{1}{p^2} \curvearrowright \\ \mathcal{LT}(1) &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= \int_p^\infty \frac{1}{\tau^2} d\tau \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\tau}\right]_p^A \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{A} + \frac{1}{p}\right] \\ &= \frac{1}{p}\end{aligned}$$

1.2.2 Die inverse Laplacetransformation

Die inverse Laplacetransformation wird zur Rücktransformation einer Funktion $F(p)$ vom Bildraum in den Originalraum benötigt.

Definition 1.3 Gilt $F(p) = \mathcal{L}T(f(t))$, so heißt $f(t)$ die inverse Laplacetransformierte von $F(p)$. Man schreibt: $f(t) = \mathcal{L}T^{-1}(F(p))$.

Satz 1.5 Sei $F(p)$ wenigstens stückweise stetig und existiert eine Konstante $M > 0$, so dass gilt: $|F(p)| < M|e^{\gamma p}|$; $\gamma \in \mathbb{R}$, dann ist $\mathcal{L}T^{-1}(F(p)) = f(t)$ eindeutig bestimmt.

Folgerung 1.1 Der Satz ist für stückweise stetige und beschränkte Funktionen $F(p)$ stets erfüllt.

Satz 1.6 Das komplexe Umkehrintegral

Sei $F(p)$ wenigstens stückweise stetig, und es existiere eine Konstante $M > 0$, so dass gilt: $|F(p)| < M|e^{\gamma p}|$; $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann gilt in jedem Stetigkeitspunkt von $F(p)$ für $x = \operatorname{Re} p > \gamma$

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}T^{-1}(F(p)) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp \\ &= \sum_{k=1}^n (\text{Residuen von } F(p) e^{pt})_k. \end{aligned}$$

Zur Auswertung des komplexen Umkehrintegrals werden Methoden der komplexen Funktionentheorie benötigt, z.B. als wichtigstes Hilfsmittel der Residuensatz. Da das nicht im Stoff enthalten ist, wird die Rücktransformation mittels Tabelle bestimmt.

Methode zur Bestimmung der inversen Laplacetransformation

1. Reduktion der betrachteten Funktion auf eine Linearkombination von Grundfunktionen, die in der Tabelle enthalten sind, z.B. durch Partialbruchzerlegung, Reihenentwicklung, algebraische Umformungen,....
2. Benutzen der Tabelle der Laplacetransformation in umgekehrter Richtung unter Berücksichtigung der Rechengesetze für $\mathcal{L}T^{-1}$.

Die Rechengesetze der inversen Laplacetransformation ergeben sich aus den Rechenregeln für die Laplacetransformation durch Vorschalten des Operators $\mathcal{L}T^{-1}$. Dieser ist linear:

$$\mathcal{L}T^{-1}(c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p) + \dots + c_n F_n(p)) = c_1 \mathcal{L}T^{-1}(F_1(p)) + c_2 \mathcal{L}T^{-1}(F_2(p)) + \dots + c_n \mathcal{L}T^{-1}(F_n(p))$$

Beispiel 1.21

$$\begin{aligned}
\mathcal{LT}^{-1}\left(\frac{5}{p^2+4} - \frac{3p}{p^2+16}\right) &= \mathcal{LT}^{-1}\left(\frac{5}{2} \frac{2}{p^2+4}\right) - \mathcal{LT}^{-1}\left(3 \frac{p}{p^2+16}\right) \\
&= \frac{5}{2} \mathcal{LT}^{-1}\left(\frac{2}{p^2+4}\right) - 3 \mathcal{LT}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+16}\right) \\
&= \frac{5}{2} \sin 2t - 3 \cos 4t
\end{aligned}$$

Für den Multiplikationssatz ergibt sich dann z.B.:

$$\begin{aligned}
\mathcal{LT}(t^n f(t)) &= (-1)^n F^{(n)}(p); \quad n = 0, 1, 2, \dots \\
\mathcal{LT}^{-1}(\mathcal{LT}(t^n f(t))) &= \mathcal{LT}^{-1}((-1)^n F^{(n)}(p)); \quad n = 0, 1, 2, \dots \curvearrowright \\
t^n f(t) &= (-1)^n \mathcal{LT}^{-1}(F^{(n)}(p)); \quad n = 0, 1, 2, \dots \\
\mathcal{LT}^{-1}(F^{(n)}(p)) &= (-1)^n t^n f(t) \quad n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Beispiel 1.22 Wegen $\mathcal{LT}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = \sin t$ und $\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = \frac{-2p}{(p^2+1)^2}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{LT}^{-1}\left(\frac{-2p}{(p^2+1)^2}\right) &= \mathcal{LT}^{-1}\left(\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2+1}\right)\right) \\
&= \mathcal{LT}^{-1}(F'(p)) \\
&= (-1)^1 t^1 f(t) \\
&= -t \sin t
\end{aligned}$$

Für den Dämpfungssatz erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathcal{LT}(e^{-\alpha t} f(t)) &= F(p + \alpha) \\
\mathcal{LT}^{-1}(\mathcal{LT}(e^{-\alpha t} f(t))) &= \mathcal{LT}^{-1}(F(p + \alpha)) \quad \curvearrowright \\
\mathcal{LT}^{-1}(F(p + \alpha)) &= e^{-\alpha t} f(t)
\end{aligned}$$

Beispiel 1.23 Wegen $\mathcal{LT}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = \sin t$ folgt damit

$$\begin{aligned}
\mathcal{LT}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+2p+2}\right) &= \mathcal{LT}^{-1}\left(\frac{1}{(p+1)^2+1}\right) \\
&= \mathcal{LT}^{-1}(F(p+1)) \\
&= e^{-t} f(t) \\
&= e^{-t} \sin t.
\end{aligned}$$

Beispiel 1.24 Rücktransformation von nicht in der Tabelle enthaltenen Funktionen

Gesucht ist: $\mathcal{L}T^{-1}\left(\frac{2p^2 - p + 1}{p^2 - 2p - 3}\right)$

1. Weg: Abdividieren, Partialbruchzerlegung und Anwenden der Tabelle:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}T^{-1}\left(\frac{2p^2 - p + 1}{p^2 - 2p - 3}\right) &= \mathcal{L}T^{-1}\left(2 + \frac{3p + 7}{p^2 - 2p - 3}\right) \\ &= \mathcal{L}T^{-1}\left(2 + \frac{3p + 7}{(p - 3)(p + 1)}\right) \\ &= \mathcal{L}T^{-1}\left(2 + \frac{4}{p - 3} - \frac{1}{p + 1}\right) \\ &= \mathcal{L}T^{-1}(2) + \mathcal{L}T^{-1}\left(\frac{4}{p - 3}\right) - \mathcal{L}T^{-1}\left(\frac{1}{p + 1}\right) \\ &= 2\delta(t) + 4e^{3t} - e^{-t}. \end{aligned}$$

2. Weg: Abdividieren und Anwenden der Tabelle:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}T^{-1}\left(\frac{2p^2 - p + 1}{p^2 - 2p - 3}\right) &= \mathcal{L}T^{-1}\left(2 + \frac{3p + 7}{p^2 - 2p - 3}\right) \\ &= \mathcal{L}T^{-1}(2) + 3\mathcal{L}T^{-1}\left(\frac{p + \frac{7}{3}}{p^2 - 2p - 3}\right) \quad (\text{Nr. 41 mit } c = \frac{7}{3}; \alpha = -2; \beta = -3) \\ &= 2\delta(t) + 3 \cdot \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}t} \left[\frac{7}{3} + 1\right] \sinh 2t + 2 \cosh 2t \\ &= 2\delta(t) + \frac{3}{2}e^t \left(\frac{10}{3} \sinh 2t + 2 \cosh 2t\right) \\ &= 2\delta(t) + 3e^t \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2}(e^{2t} - e^{-2t}) + \frac{1}{2}(e^{2t} + e^{-2t})\right) \\ &= 2\delta(t) + 3e^t \left(\left(\frac{5}{6} + \frac{3}{6}\right)e^{2t} + \left(-\frac{5}{6} + \frac{3}{6}\right)e^{-2t}\right) \\ &= 2\delta(t) + 3 \cdot \frac{8}{6}e^{3t} + 3 \cdot \left(\frac{-2}{6}\right)e^{-t} \\ &= 2\delta(t) + 4e^{3t} - e^{-t}. \end{aligned}$$

Beispiel 1.25 Rücktransformation von nicht in der Tabelle enthaltenen Funktionen

$F(p)$ besitze eine Reihenentwicklung nach Potenzen von $\frac{1}{p}$, d.h.

$$F(p) = a_0 + \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \frac{a_3}{p^3} + \dots$$

Durch gliedweise Rücktransformation erhält man

$$\mathcal{L}T^{-1}(F(p)) = a_0\delta(t) + a_1 + a_2t + \frac{a_3}{2!}t^2 + \dots$$

2 Ausgewählte Probleme der Numerik

2.1 Grundlagen

In der Wissenschaft und der Technik gibt es zahlreiche Probleme, die exakt bzw. mit analytischen Methoden nicht oder nur sehr aufwendig lösen lassen. Als Beispiele seien hier genannt:

- das Gauß'sche Fehlerintegral als ein bestimmtes Integral, für das keine analytische Stammfunktion existiert,
- die Lösung nichtlinearer Gleichungen,
- die Suche von Nullstellen höhergradiger Polynome,
- die Lösung sehr großer linearer Gleichungssysteme oder
- die Lösung von Differentialgleichungen oder Differentialgleichungssystemen mit Anfangs- und/oder Randwerten.

Das führte zur Entwicklung von speziellen Verfahren, die die Lösungen der Probleme annähern. Für die Durchführung dieser Verfahren werden heute Computer eingesetzt. Allerdings steht dort nur eine Zahldarstellung mit endlicher Stellenzahl zur Verfügung, was zu Rechenfehlern führt.

Hauptgegenstand der Numerischen Mathematik:

1. Bereitstellung von Lösungsverfahren für Probleme aus Algebra und Analysis
2. Untersuchung der Eigenschaften dieser Algorithmen
3. Umsetzung der Algorithmen auf dem Rechner

Die Algorithmen müssen dabei folgende Bedingungen erfüllen:

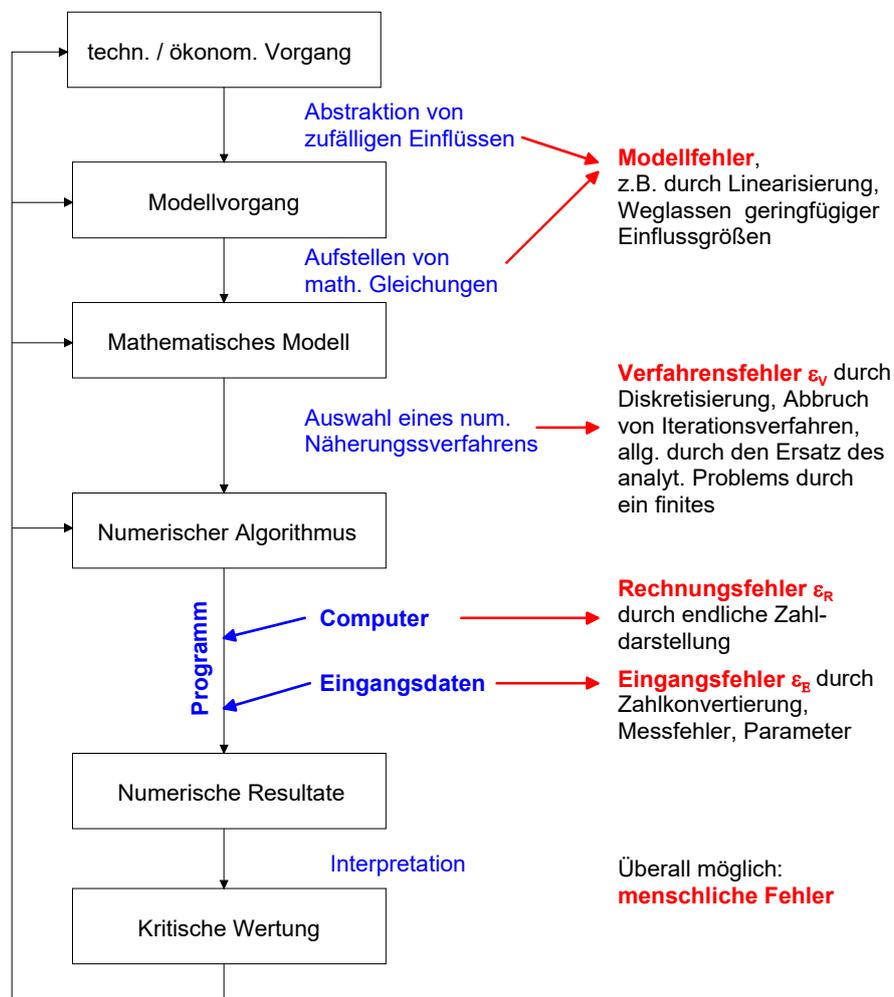
- Allgemeinheit für eine bestimmte Aufgabenklasse
- Determiniertheit: Schritte und Reihenfolge der rationalen Rechenoperationen sind eindeutig bestimmt

- Endlichkeit: Nach einer bestimmten Anzahl von Schritten erreicht man eine brauchbare Näherungslösung oder der Algorithmus bricht ab.

Es entwickelte sich im Laufe der Zeit eine enge Wechselbeziehung zwischen der Entwicklung der Numerik und der Rechentechnik, z.B. bezüglich der Sprachentwicklung, der Speicherbereichsentwicklung, Geschwindigkeitsanforderungen, Visualisierung der Ergebnisse...

2.2 Fehleranalyse

Fehler können an vielen Stellen des Lösungsprozesses auftreten. Es ist wichtig, sie und ihren Einfluss auf die Lösung zu kennen



Es gelten dabei folgende Definitionen:

Definition 2.1 *Verfahrensfehler = exakte Lösung - Näherungslösung, wobei äußere Einflüsse, wie z.B. ungenaue Eingangsdaten oder die endliche Zahldarstellung außen vor bleiben.*

Definition 2.2 *|Gesamtfehler| = |exakte Lösung - Näherungslösung| $\leq \varepsilon_V + \varepsilon_R + \varepsilon_E$ (d.h. unter Beachtung aller Einflüsse!)*

2.2.1 Definition von Fehlergrößen

Es sei a : die gesuchte Zahl, a^* : ein Näherungswert dafür.

$$\begin{aligned} \text{wahrer Fehler von } a : \quad \Delta a &= a^* - a \\ \text{absoluter Fehler von } a : \quad |\Delta a| &= |a^* - a| \end{aligned}$$

Beide Größen sind nicht exakt angebbbar, da a i. Allg. nicht bekannt ist. Deshalb sucht man dafür Abschätzungen oder obere Schranken:

$$\begin{aligned} |a^* - a| \leq K_a &\iff -K_a \leq a^* - a \leq K_a \\ &\iff a^* - K_a \leq a \leq a^* + K_a \end{aligned}$$

K_a heißt absoluter Höchstfehler. Zum Vergleich der Qualität von Näherungsverfahren benutzt man häufig relative Fehler, um die Größe des Fehlers besser einschätzen zu können, z.B.

$$\begin{aligned} \text{den relativen Fehler von } a : \quad \rho_a &= \frac{|a^* - a|}{|a|} \\ \text{den relativen Höchstfehler } R_a \text{ von } a : \quad \frac{|a^* - a|}{|a|} &\leq R_a, \quad R_a > 0 \\ \text{den prozentualen Höchstfehler von } a : \quad P_a &= 100 \cdot R_a \cdot \% \end{aligned}$$

Beispiel 2.1 *Man messe auf einen Millimeter genau $a_1 = 1m$ und $a_2 = 10cm$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} |\Delta a_1| &= 1mm = |\Delta a_2|, \quad \text{aber} \\ \frac{|\Delta a_1|}{|a_1|} &= 0.\overline{001} \triangleq 0.1\% \\ \frac{|\Delta a_2|}{|a_2|} &= 0.\overline{1} \triangleq 11.1\%. \end{aligned}$$

Da a unbekannt ist, muss man aber bei der Abschätzung des relativen Fehlers im Nenner a^* statt a verwenden. Welche Auswirkungen hat das?

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &= \left| \frac{\Delta a}{a^*} \right| = \left| \frac{\Delta a}{\Delta a + a} \right| = \left| \frac{\frac{\Delta a}{a}}{\frac{\Delta a}{a} + \frac{a}{a}} \right| = \rho_a \cdot \frac{1}{1 + \rho_a} \quad \curvearrowright \\ \rho_a &= \frac{\tilde{\rho}}{1 - \tilde{\rho}} = \tilde{\rho} (1 + \tilde{\rho} + \tilde{\rho}^2 + \dots) \quad (\text{Summe geom. Reihe!}) \\ &= \tilde{\rho} + \tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}^3 + \dots\end{aligned}$$

Die Benutzung von $\tilde{\rho} = \left| \frac{\Delta a}{a^*} \right|$ an Stelle von $\rho_a = \left| \frac{\Delta a}{a} \right|$ ist damit erlaubt, wenn $\tilde{\rho}^2$ und Glieder noch höherer Ordnung vernachlässigbar klein sind. Das ist dann der Fall, wenn wir voraussetzen, dass gilt:

$$\tilde{\rho} = \left| \frac{\Delta a}{a^*} \right| \ll 1 \quad \curvearrowright \quad \tilde{\rho} \approx \rho_a.$$

Beispiel 2.2 $a = \pi$; $a^* = 3.14$ \curvearrowright $|\Delta a| = |3.14 - \pi| \leq 0.0016 = K_\pi$

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &= \left| \frac{\Delta a}{a^*} \right| \leq \frac{0.0016}{3.14} = 0.000509554 \approx 0.00051 = \tilde{R}_\pi \triangleq 0.051\% = \tilde{P}_\pi \\ \rho_a &= \left| \frac{\Delta a}{a} \right| \leq \frac{0.0016}{\pi} = 0.000509296 \approx 0.00051 = \tilde{\rho}\end{aligned}$$

2.2.2 Rundungsfehler/Rechnungsfehler

Sei $a \in \mathbb{R}$; $a_i \in \mathbb{N}$; $0 \leq a_i \leq 9$; $i \leq n$; $a_n \neq 0$.

Dann hat a folgende normalisierte Gleitpunktdarstellung:

$$\begin{aligned}a &= \pm(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_{n-t+1} \cdot 10^{n-t+1} + a_{n-t} \cdot 10^{n-t} + \dots) \\ &= \pm 0.a_n a_{n-1} \dots a_{n-t+1} a_{n-t} \dots \cdot 10^{n+1}\end{aligned}$$

Im Rechner steht nur eine endlichen Teilmenge der rationalen Zahlen zur Verfügung \curvearrowright Rundung von a auf a^* :

$$\begin{aligned}a^* &= \pm(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_{n-t+1} \cdot 10^{n-t+1}) \\ &= \pm 0.a_n a_{n-1} \dots a_{n-t+1} \cdot 10^{n+1}\end{aligned}$$

Damit hat a^* t tragende Ziffern, d.h. a^* ist t -stellig. Es gilt folgende Rundungsvorschrift auf t tragende Ziffern:

- 1) Ist $a_{n-t} < 5$ \curvearrowright a_{n-t+1} bleibt unverändert
- 2) Ist $a_{n-t} \geq 5$ \curvearrowright $a_{n-t+1} := a_{n-t+1} + 1$

Der absolute Fehler $|a^* - a|$ heißt Rundungsfehler von a . Es gilt $|a^* - a| \leq 0.5 \cdot 10^{n-t+1}$. Eine Ziffer heißt sicher, wenn sie in der Gleitkommadarstellung der Zahl genau wie in der Originalzahl auftritt oder wenn bei der ersten verschiedenen Ziffer der Unterschied im Dezimalsystem < 5 ist. Setzt man voraus, dass die letzte tragende Ziffer sicher ist, ergibt sich bei t tragenden Ziffern für den relativen Fehler:

$$\frac{|a^* - a|}{|a|} \leq \frac{\text{maximaler absoluter Fehler}}{\text{kleinste darstellbare Zahl}} = \frac{0.5 \cdot 10^{n-t+1}}{0.1 \cdot 10^{n+1}} = 5 \cdot 10^{-t}.$$

Beispiel 2.3 *Rundung auf $t = 4$ tragende Ziffern:*

$$\begin{array}{lll} 0.012358 & \implies & 0.01236 = 0.1236 \cdot 10^{-1} \\ 4.2354 & \implies & 4.235 = 0.4235 \cdot 10^1 \\ 4.2698 & \implies & 4.270 = 0.4270 \cdot 10^1 \\ 3.2355 & \implies & 3.236 = 0.3236 \cdot 10^1 \\ 42354 & \implies & 0.4235 \cdot 10^5 \\ 42698 & \implies & 0.4270 \cdot 10^5 \end{array}$$

Bei Differenzbildung geschieht nun beispielsweise Folgendes:

exakte Rechnung

$$42354 - 42698 = -344$$

$$\frac{|a^* - a|}{|a|} = \frac{6}{344} \triangleq 1.74\%$$

$$42354 - 42356 = -2$$

$$\frac{|a^* - a|}{|a|} = \frac{8}{2} \triangleq 400\%$$

Rechnung mit $t = 4$ tragenden Ziffern

$$\begin{aligned} 0.4235 \cdot 10^5 - 0.4270 \cdot 10^5 \\ = -0.0035 \cdot 10^5 = -350 \end{aligned}$$

$$0.4235 \cdot 10^5 - 0.4236 \cdot 10^5 = -10$$

Merke: Durch Anhäufung von Rundungsfehlern entstehen Rechnungsfehler. Z.B. entfallen durch Stellenauslöschung bei der Subtraktion sichere Ziffern. Eine genaue Verifikation aller Rechenverfahren bringt aber keinen Erfolg, da die Abschätzungen im Allgemeinen zu grob sind.

Gegenmaßnahmen:

- Rechnen mit erhöhter Genauigkeit an kritischen Stellen (evtl. mit verlängerter Mantisse)
- Verwendung von stabilen Algorithmen (s. Kapitel 1.2)

2.2.3 Eingangsfehler und Kondition

Zu berechnen sei

$$y = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi(\underline{x}). \quad (1.1)$$

Definition 2.3 Die Berechnung von $y = \phi(\underline{x})$ heißt korrekt gestelltes Problem, wenn

1. y eindeutig aus den Eingangsgrößen (x_1, x_2, \dots, x_n) berechenbar ist und, wenn
2. y stetig von den x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ abhängig ist, d.h., wenn kleine Änderungen in den Eingangsdaten auch nur kleine Änderungen in y hervorrufen.

Die obige Differenzbildung zweier annähernd gleich großer Zahlen erfüllt die zweite Bedingung nicht! Die Korrektheit der Aufgabe ist aber eine unabdingbare Voraussetzung für die numerische Lösung des Problems. Falls sie nicht vorhanden ist, kann man die Aufgabe u.U. regularisieren. Das entspricht dem Übergang zur benachbarten korrekten Aufgabe.

Gegeben seien nun fehlerbehaftete Eingangsdaten $\underline{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ mit $\Delta x_i = x_i^* - x_i$, aus denen entsprechend (1.1) $y^* = \phi^*(\underline{x}^*)$ berechnet wird.

Gesucht: $|\Delta y| = |y^* - y| \leq ?$ und $\frac{|\Delta y|}{|y|} \leq ?$

Aufspaltung von Δy ergibt:

$$\Delta y = \underbrace{\phi^*(\underline{x}^*) - \phi(\underline{x}^*)}_{\Delta y_R} + \underbrace{\phi(\underline{x}^*) - \phi(\underline{x})}_{\Delta y_E} = \Delta y_R + \Delta y_E$$

- Δy_E – Fehler, der nur auf den Einfluss von Fehlern in den Eingangsdaten zurückgeht, unvermeidbarer Fehler, der in der Natur des zu lösenden Problems liegt; einfach abschätzbar
- Δy_R – Rechenfehler bei der Funktionsauswertung mittels Gleitpunktoperationen, Fehler, der durch den Algorithmus zur Funktionsauswertung bestimmt wird; aufwendig abschätzbar

Abschätzung von $|\Delta y_E|$ und $\frac{|\Delta y_E|}{|y|}$:

Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt:

$$\begin{aligned} |\Delta y_E| &= |\phi(\underline{x}^*) - \phi(\underline{x})| \approx \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi(\underline{x}^*)}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \phi(\underline{x}^*)}{\partial x_i} \right| |\Delta x_i| \\ \frac{|\Delta y_E|}{|y|} &\leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \phi(\underline{x}^*)}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} \right| \frac{|\Delta x_i|}{|x_i|} \end{aligned}$$

Definition 2.4 Die Zahlen $\left| \frac{\partial \phi(\underline{x}^*)}{\partial x_i} \right|$ heißen **absolute Konditionszahlen**. Sie geben an, mit welchem Faktor Δx_i zur Änderung von $|\Delta y_E|$ beiträgt

Definition 2.5 Die Zahlen $\left| \frac{\partial \phi(\underline{x}^*)}{\partial x_i} \frac{x_i}{y} \right|$ heißen **relative Konditionszahlen**.

Bemerkung 2.1

Bei kleinen Konditionszahlen spricht man von einem gut konditionierten Problem (1.1), anderenfalls von einem schlecht konditionierten Problem.

Eingangsfehler der Grundrechenarten

1. **Addition/Subtraktion:** $z = \phi(x_1, x_2) = x_1 \pm x_2$

$$\begin{aligned} |\Delta z| &\leq \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right|_* |\Delta x_1| + \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right|_* |\Delta x_2| \\ &\leq |\Delta x_1| + |\Delta x_2| \quad \curvearrowright \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta z}{z} \right| &\leq \frac{|\Delta x_1|}{|x_1^* \pm x_2^*|} + \frac{|\Delta x_2|}{|x_1^* \pm x_2^*|} \\ &= \left| \frac{x_1}{x_1^* \pm x_2^*} \right| \left| \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| \frac{x_2}{x_1^* \pm x_2^*} \right| \left| \frac{\Delta x_2}{x_2} \right| \end{aligned}$$

Im Falle $x_1 \pm x_2 \approx 0$ erfolgt eine Verstärkung des relativen Fehlers in z durch Auslöschung gemeinsamer Ziffern in der Mantisse.

Beispiel 2.4

$$z = 0.1236 + 1.234 - 1.356 = 0.0016 = 0.1600 \cdot 10^{-2} \quad (\text{exakt})$$

in vierstelliger Gleitpunktarithmetik ($t = 4$) gilt jedoch:

| Variante | Rechnung | Bemerkung |
|----------|--|------------------------|
| a) | $0.1236 + 1.234 = 1.358$ | gerundet! |
| | $1.358 - 1.356 = 0.002 = 0.2000 \cdot 10^{-2}$ | führende Ziffer falsch |
| b) | $1.234 - 1.356 = -0.1220$ | exakt |
| | $0.1236 - 0.1220 = 0.1600 \cdot 10^{-2}$ | exakt |

Beispiel 2.5

$$z = 1 - \cos x = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \quad \text{für } |x| \approx 2k\pi$$

Bei der Auswertung von $1 - \cos x$ tritt für $|x| \approx 2k\pi$ Auslöschung auf, die durch Auswertung des äquivalenten Ausdruckes $\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ vermieden werden kann. Abschätzungen dieser Art sind i.Allg. grob, speziell bei vielen Operanden oder vielen Rechenoperationen. Sie geben aber Hinweise auf kritische Stellen in der Aufgabe bzw. dem Algorithmus.

Merke:

- **Subtraktion annähernd gleicher Zahlen vermeiden!**
- **Unvermeidbare Subtraktionen möglichst an den Anfang der Rechnung legen!**
- **Das Assoziativgesetz gilt nicht, Reihenfolge beachten!**

2. **Multiplikation:** $z = \phi(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

$$\begin{aligned} |\Delta z| &\leq \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right|_* |\Delta x_1| + \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right|_* |\Delta x_2| \\ &= |x_2^*| |\Delta x_1| + |x_1^*| |\Delta x_2| \quad \curvearrowright \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| \leq \left| \frac{\Delta x_1}{x_1^*} \right| + \left| \frac{\Delta x_2}{x_2^*} \right|$$

3. **Division:** $z = \phi(x, y) = \frac{x_1}{x_2}$

$$\begin{aligned} |\Delta z| &\leq \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right|_* |\Delta x_1| + \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right|_* |\Delta x_2| \\ &= \left| \frac{1}{x_2^*} \right| |\Delta x_1| + \left| \frac{x_1^*}{(x_2^*)^2} \right| |\Delta x_2| \quad \curvearrowright \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\Delta z}{z} \right| \leq \left| \frac{\Delta x_1}{x_1^*} \right| + \left| \frac{\Delta x_2}{x_2^*} \right|$$

Merke:

Bei Multiplikation/Division ist der relative Fehler in z in der Größenordnung der relativen Fehler in x_1 und x_2 ! (Division durch Zahlen nahe Null verursacht große Fehler.)

Beispiel 2.6 Es ist die Masse m eines Kegels mit dem Radius r , der Höhe h und der konstanten Dichte ρ zu berechnen.

Gegeben: $r^* = r(1 + \varepsilon_R)$; $\rho^* = \rho(1 + \varepsilon_\rho)$; $h^* = h(1 + \varepsilon_h)$

$\Delta r = r^* - r$; $\Delta \rho = \rho^* - \rho$, $\Delta h = h^* - h$

\curvearrowright ε_R ist der relative Fehler von r , denn es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{r^*}{r} &= 1 + \varepsilon_R \\ \varepsilon_R &= \frac{r^*}{r} - 1 = \frac{r^* - r}{r}\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$m = \frac{1}{3}\pi r^2 h \rho \quad ; \quad m^* = \frac{1}{3}\pi (r^*)^2 h^* \rho^*$$

Gesucht: $|\Delta m| = |m^* - m| \leq ?$ und $\left| \frac{\Delta m}{m} \right| \leq ?$

$$\begin{aligned}|\Delta m| &\leq \left| \frac{\partial m}{\partial r} \right|_* |\Delta r| + \left| \frac{\partial m}{\partial h} \right|_* |\Delta h| + \left| \frac{\partial m}{\partial \rho} \right|_* |\Delta \rho| \\ &= \left(\frac{2}{3}\pi r^* h^* \rho^* \right) |\Delta r| + \left(\frac{1}{3}\pi (r^*)^2 \rho^* \right) |\Delta h| + \left(\frac{1}{3}\pi (r^*)^2 h^* \right) |\Delta \rho| \\ \left| \frac{\Delta m}{m} \right| &\leq 2 \left| \frac{\Delta r}{r^*} \right| + 1 \left| \frac{\Delta h}{h^*} \right| + 1 \left| \frac{\Delta \rho}{\rho^*} \right| \approx 2|\varepsilon_r| + 1|\varepsilon_h| + 1|\varepsilon_\rho|\end{aligned}$$

$\frac{2}{3}\pi r^* h^* \rho^*$, $\frac{1}{3}\pi (r^*)^2 \rho^*$, und $\frac{1}{3}\pi (r^*)^2 h^*$ sind absolute Konditionszahlen; 2, 1, und 1 sind relative Konditionszahlen.

Eine andere Möglichkeit zur Abschätzung dieser Fehler besteht in der Untersuchung des mittleren Fehlers des Resultats, wobei die absoluten Fehler als voneinander unabhängige Zufallsgrößen mit dem Erwartungswert Null betrachtet werden. Dann gilt für die Standardabweichung σ von $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\sigma \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n (\phi_{x_i} |_{\underline{x}^*})^2 \cdot \sigma_i^2}$$

Diese stochastische Methode wird aber hier nicht weiter verfolgt.

2.3 Stabilität

Definition 2.6 Ein Algorithmus (numerisches Verfahren) heißt numerisch stabil gegenüber Rundungsfehlern, wenn gilt

$$|\Delta y_R| \leq C \cdot |\Delta y_E| \quad C = \text{const} > 0, \quad (1.2)$$

anderenfalls heißt er numerisch instabil.

Bemerkung 2.2 Je kleiner die Konstante C , um so stabiler ist das numerische Verfahren.

Bemerkung 2.3 Numerische Stabilität ist nicht identisch mit kleinen erzeugten Rundungsfehlern. Die Forderung (1.2) besagt, dass die Rundungsfehler gegenüber den (unvermeidlichen) Eingangsfehlern nicht beliebig groß werden dürfen.

Beispiel 2.7 Zu berechnen sei die Zahlenfolge

$$I_n = \frac{1}{e} \int_0^1 x^n e^x dx \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots, N$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{e} \int_0^1 e^x dx = \frac{1}{e} [e - 1] = 1 - \frac{1}{e} \\ I_n &= \frac{1}{e} \left[x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x dx \right]_0^1 \quad (\text{partielle Integration!}) \\ &= \frac{1}{e} \left[e - 0 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx \right] \\ &= 1 - n \cdot \frac{1}{e} \int_0^1 x^{n-1} e^x dx = 1 - n I_{n-1} \quad (*) \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$0 < I_{n+1} < I_n; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$$

Mit Hilfe der Rekursionsformel (*) kommt man im Vergleich zu den exakten Werten zu folgender Tabelle:

| n | $I_n(\text{exakt})$ | $I_n^*(\text{numerisch, 2 Stellen nach Komma})$ | |
|-----|---------------------|---|--|
| 0 | 0.63 | 0.63 | |
| 1 | 0.37 | 0.37 | |
| 2 | 0.26 | 0.26 | |
| 3 | 0.21 | 0.22 | |
| 4 | 0.17 | 0.12 | |
| 5 | 0.15 | 0.40 | Rechenfehler, die sich aus den Rundungsfehlern im Verfahren summieren |
| 6 | 0.13 | -1.40 | |
| 7 | 0.11 | 10.80 | |
| 8 | 0.10 | -85.40 | |

Dieses Beispiel ist offensichtlich instabil. Die Ursache dafür liegt im Anwachsen des Rechenfehlers im Schritt n um den Faktor n , denn es gilt:

$$\begin{aligned} I_0^* &= I_0 + \varepsilon; & \varepsilon &\leq 0.5 \cdot 10^{-3} \\ I_n^* &= 1 - nI_{n-1}^* \\ I_n &= 1 - nI_{n-1} & \curvearrowright \\ |I_n^* - I_n| &= |nI_{n-1} - nI_{n-1}^*| = n |I_{n-1}^* - I_{n-1}| \end{aligned}$$

Ein kleinerer Eingangsfehler ε kann damit die falschen Ergebnisse der numerischen Rechnung zwar nach hinten verlagern, aber nicht beseitigen. Das Verfahren ist unbrauchbar, weil instabil. Der Ausweg besteht in der Konstruktion eines stabilen Verfahrens.

Im obigen Beispiel wird wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ gesetzt:

$$I_N = 0 \quad \text{für} \quad N \gg 1$$

Aus (*) : $I_n = 1 - nI_{n-1}$ folgt

$$\begin{aligned} I_{n-1} &= \frac{1}{n}(1 - I_n) \quad \text{und} \\ I_{n-1}^* &= \frac{1}{n}(1 - I_n^*) & \curvearrowright \\ |I_{n-1}^* - I_{n-1}| &= \left| \frac{1}{n}I_n - \frac{1}{n}I_n^* \right| = \frac{1}{n} |I_n^* - I_n| \end{aligned}$$

Folglich liefert die Verfahrensvorschrift

$$I_N = 0; \quad I_{n-1} = \frac{1}{n}(1 - I_n); \quad n = N, N-1, \dots, 1$$

ein stabiles Verfahren, da sich bis auf den letzten Schritt ($n = 1$) in jedem Schritt der Fehler um den Faktor $\frac{1}{n} < 1$ verringert. Mit diesem verbesserten Algorithmus ergibt sich für das obige Beispiel

| n | $I_n(\text{exakt})$ | $I_n^*(\text{numerisch, 2 Stellen nach Komma})$ | |
|-----|---------------------|---|-----------------------|
| 8 | 0.10 | 0 | (wird gesetzt) |
| 7 | 0.11 | 0.12 | |
| 6 | 0.13 | 0.13 | |
| 5 | 0.15 | 0.14 | |
| 4 | 0.17 | 0.17 | |
| 3 | 0.21 | 0.21 | |
| 2 | 0.26 | 0.26 | |
| 1 | 0.37 | 0.37 | |
| 0 | 0.63 | 0.63 | |

Bemerkung 2.4 *Rekursionsformeln neigen zu instabilem Verhalten. Sie sollten vor der numerischen Auswertung untersucht werden.*

Beispiel 2.8 *Beispiel für ein schlecht konditioniertes Gleichungssystem:*

$$\begin{array}{rcccl}
 33x + 12y & = & 110 & & 33.1x + 12y & = & 110 \\
 69x + 25y & = & 270 & & 69x + 25y & = & 270 \\
 & \Downarrow & & & & \Downarrow & \\
 & & & \text{exakte} & & & \\
 & & & \text{Lösungen} & & & \\
 x & = & 163.\bar{3} & & x & = & 980 \\
 y & = & -440 & & y & = & -2694
 \end{array}$$

Obwohl der Fehler in den Eingangsdaten nur $|33.1 - 33| = 0.1$ beträgt, entstehen zwei völlig verschiedene Lösungen.

2.4 *LANDAU-Symbole O und o

Definition 2.7 *Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ seien in einer Umgebung von x_0 definiert, dann schreibt man*

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{bei } x \rightarrow x_0, \text{ wenn gilt } \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M < \infty \quad \forall x \in U(x_0)$$

Man schreibt

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{bei } x \rightarrow x_0, \text{ wenn gilt } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Beispiel 2.9

$$\sin x = O(x) \quad \text{bei } x \rightarrow 0, \text{ denn } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{bei } x \rightarrow 0, \text{ denn } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{bei } x \rightarrow \infty, \text{ denn } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

$$e^{-x} = o(x^{-25}) \quad \text{bei } x \rightarrow \infty, \text{ denn } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^{-25}} = 0$$

$$x = o(x \ln x) \quad \text{bei } x \rightarrow \infty, \text{ denn } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \ln x} = 0$$

Beispiel 2.10 STIRLINGsche Formel:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad \text{bei } n \rightarrow \infty$$

Eigenschaften von O :

1.

$$\begin{aligned} f(x) &= O(g(x)) \quad \text{und} \quad g(x) = O(f(x)) \quad \text{für } x \rightarrow x_0 \\ \iff &\exists m > 0, M > 0 \quad \text{und} \quad m|f(x)| \leq |g(x)| \leq M|f(x)| \quad \forall x \in U(x_0) \end{aligned}$$

2.

$$O(g(x)) \cdot O(h(x)) = O(g(x) \cdot h(x)).$$

2.5 Diskrete Fourieranalysis

Die Bestimmung der Fourierkoeffizienten kann nicht immer analytisch erfolgen, weil

1. die Integrale i.Allg. nicht geschlossen lösbar sind bzw.
2. $f(t)$ nur durch ein Oszillogramm oder eine Wertetabelle gegeben ist.

Dann erfolgt die Berechnung numerisch.

2.5.1 Diskrete Fouriertransformation für periodische Funktionen

Ausgangspunkt für die Fouriertransformation ist in der Technik im Allgemeinen eine Folge von Messwerten über einer Periode T . Die Berechnung der Fourierreihe zum Basissystem der e-Funktionen für eine Funktion mit der Periode T ist bekannt:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-ikt \frac{2\pi}{T}) dt \quad (o)$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikt \frac{2\pi}{T}). \quad (oo)$$

Müssen die Fourierkoeffizienten numerisch berechnet werden, so ergibt sich mit $\Delta t = \frac{T}{N}$, $t_j = \frac{T}{N}j$, und der N -ten Einheitswurzel $\nu = \exp(\frac{2\pi}{N}i)$

$$\begin{aligned} c_k &\simeq \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \exp(-ikt_j \frac{2\pi}{T}) \Delta t \\ &= \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \exp(-ik \frac{T}{N} j \frac{2\pi}{T}) \frac{T}{N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \exp(-i \frac{2\pi}{N} k j) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \nu^{-kj}; \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (*) \end{aligned}$$

Wegen $\overline{\nu^k} = \overline{\nu}^k = \nu^{-k}$ folgt weiter

$$c_k \simeq \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \overline{\nu^{kj}}; \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Für die benutzten Funktionswerte gilt dann

$$\begin{aligned} f_j &= f(t_j) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp(ikt_j \frac{2\pi}{T}) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \exp(ik \frac{T}{N} j \frac{2\pi}{T}) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \nu^{kj}; \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (**) \end{aligned}$$

Die Formel (*) heißt Diskrete Fouriertransformation (DFT), und (**). wird als Inverse Diskrete Fouriertransformation (IDFT) bezeichnet. Sie gelten zunächst nur für periodische Funktionen. Eine kompakte Schreibweise erhält man mit der Matrix F_N und den Vektoren \underline{c} und \underline{f}

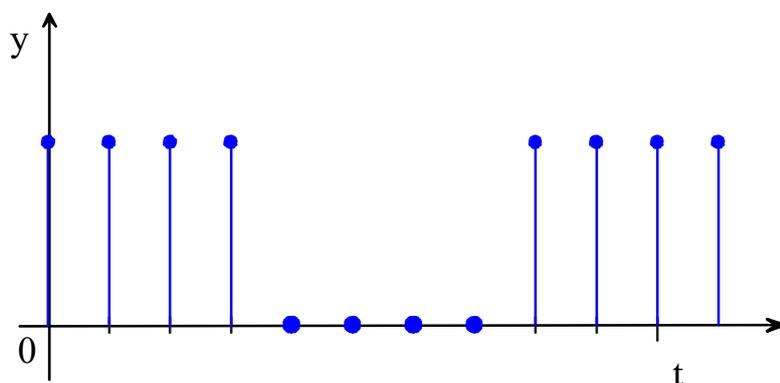
$$F_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \nu & \nu^2 & \dots & \nu^{N-1} \\ 1 & \nu^2 & \nu^4 & \dots & \nu^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \nu^{N-1} & \nu^{2(N-1)} & \dots & \nu^{(N-1)^2} \end{pmatrix}; \quad \underline{c} = (c_k); \quad \underline{f} = (f_k); \quad k = 0, \dots, N-1$$

in Gestalt der Matrixgleichung:

$$\underline{c} = \frac{1}{N} \overline{F_N} \cdot \underline{f} \quad \text{und} \quad \underline{f} = F_N \cdot \underline{c}.$$

Achtung: in der Literatur wird der Faktor $\frac{1}{N}$ manchmal auch auf beide Richtungen gleichmäßig aufgeteilt oder der anderen Transformationsrichtung zugeteilt! Da es sich um einen konstanten Faktor handelt, ist diese unterschiedliche Handhabung möglich und muss bei der Anwendung von Formeln aus der Literatur oder Programmsystemen berücksichtigt werden.

Beispiel 2.11 Die Diskrete Fouriertransformation für die periodische Funktion:



lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel[\text{IDFT}]{\text{DFT}} \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 - (\sqrt{2} + 1)i \\ 0 \\ 1 - (\sqrt{2} - 1)i \\ 0 \\ 1 + (\sqrt{2} - 1)i \\ 0 \\ 1 + (\sqrt{2} + 1)i \end{pmatrix} : \quad (f_i) \stackrel[\text{IDFT}]{\text{DFT}} (c_i)$$

Testet man dieses Beispiel in MATLAB mit $x=[1,1,1,1,0,0,0,0]$; $c=\text{fft}(x,8)$, $f=\text{ifft}(c,8)$, so erhält man $c_0 = 4$ und nicht $c_0 = 0.5$ wie nach der Formel (*):

$$c_0 = \frac{1}{8} \sum_{j=0}^7 y_j e^{-0} = \frac{1}{8} (1 + 1 + 1 + 1) = \frac{1}{2}.$$

Daran ist zu erkennen, dass die Vorfaktoren in MATLAB anders verteilt sind! In MATLAB ist ein Formelsatz realisiert, in dem der Vorfaktor $\frac{1}{N}$ der IDFT zugeteilt wurde:

$$c_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \nu^{-kj}; \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (+)$$

$$f_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k \nu^{kj}; \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (++)$$

Dieser Formelsatz korrespondiert in der analytischen Form der Fouriertransformation mit:

$$c_k = \int_0^T f(t) \exp(-ikt \frac{2\pi}{T}) dt \quad (\#)$$

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikt \frac{2\pi}{T}). \quad (\#\#)$$

Diese Version wird in Ihrem Studiengang benutzt.

In der Mathematik wird häufig die Version der gleichmäßigen Aufteilung der Faktoren auf die beiden Transformationsrichtungen genutzt, weil dann durch die Transformation keine Längenänderung der transformierten Objekte auftritt. Die Transformation heißt dann Isometrie und besitzt weitere spezielle Eigenschaften, die mathematisch ausgenutzt werden können.

2.5.2 Diskrete Fouriertransformation für nichtperiodische Funktionen

Um zum Formelsatz für die Fouriertransformation für nichtperiodische Funktionen zu gelangen, wird in der Ausgangsformel für die Fourierreihendarstellung der Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ ausgeführt. Mit der Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und $\omega_k = k\omega = k\frac{2\pi}{T}$ gilt dann $\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{2\pi}{T}$. Unter der Voraussetzung $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ ergibt sich aus den

Formeln (o) und (oo)

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp(ikt \frac{2\pi}{T}) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-ikt \frac{2\pi}{T}) dt \right) \exp(ikt \frac{2\pi}{T}) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{2\pi} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-i\omega_k t) dt \right) \exp(i\omega_k t) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-i\omega_k t) dt \right) \exp(i\omega_k t) \Delta\omega
 \end{aligned}$$

Bei $T \rightarrow \infty$ liegen dann die ω_k dicht, und die äußere Summe geht in ein Integral über. Teilt man den Faktor $\frac{1}{2\pi}$ gleichmäßig auf, so erhält man

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt \right) \exp(i\omega t) d\omega$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(i\omega) \exp(i\omega t) d\omega \\
 F(i\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt
 \end{aligned}$$

Bei der Diskretisierung dieser Integrale im Intervall der Länge T ergibt sich aufgrund der Symmetrie der komplexwertigen e-Funktionen

$$\begin{aligned}
 f(t_k) &= \sum_{j=0}^{N-1} F(i\omega_j) \exp(i\omega_j t_k) \Delta\omega \\
 F(i\omega_j) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \exp(-i\omega_j t_l) \Delta t.
 \end{aligned}$$

Ineinander eingesetzt erhält man unter Berücksichtigung von $\Delta t = \frac{T}{N}$, $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$, $t_j = j\Delta t = j\frac{T}{N}$ sowie $\omega_j = j\Delta\omega = j\frac{2\pi}{T}$ und $\nu = \exp\left(\frac{2\pi}{N}i\right)$

$$\begin{aligned}
 f(t_k) &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \exp(-i\omega_j t_l) \Delta t \right) \exp(i\omega_j t_k) \Delta\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \exp(-i\omega_j t_l) \frac{T}{N} \exp(i\omega_j t_k) \frac{2\pi}{T} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \exp(-ij \frac{2\pi}{T} l \frac{T}{N}) \exp(ij \frac{2\pi}{T} k \frac{T}{N}) \\
 &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \exp(-ij \frac{2\pi}{N} l) \right) \exp(ij \frac{2\pi}{N} k) \\
 &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \nu^{-jl} \right) \nu^{jk}.
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir den Formelsatz der diskreten Fouriertransformation:

$$\begin{aligned}
 f(t_k) &= \sum_{j=0}^{N-1} F(i\omega_j) \nu^{jk} & k = 0, \dots, N-1 \\
 F(i\omega_k) &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \nu^{-jk} & k = 0, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

Prinzipiell fällt der Formelsatz (u.U. bis auf die Verteilung der Vorfaktoren) mit dem für periodische Funktionen zusammen. Er ist außerdem für f und F identisch bis auf das Vorzeichen im Exponenten der e-Funktion (und u.U. bis auf den Vorfaktor).

Der Aufwand der DFT ohne Berechnung der Werte für ν beträgt $O(2N^2)$ Gleitpunktoperationen wegen N Additionen und N Multiplikationen pro Schritt ohne Berechnung der ν . In modernen Anwendungen werden aber beispielsweise Datensätze der Länge $N = 10^6$ transformiert. Bei einer Dauer von 1 Microsekunde pro Paar von Addition und Multiplikation benötigt dann jedoch eine DFT

$$t = 2(10^6)^2 * \frac{10^{-6}s}{2 \text{ Operationen}} = 10^6 s \approx 11,5 \text{ Tage.}$$

Das ist inakzeptabel und würde den Einsatz der DFT verhindern.

2.6 Die schnelle Fouriertransformation (FFT)

2.6.1 Formelsatz

Es sei nun N gerade. Dann kann man die Symmetrieeigenschaften der e-Funktionen weiter ausnutzen und zu einer rekursiven Verfahrensvorschrift gelangen, indem man die Gesamtsumme aufspaltet in eine Summe über alle geraden und eine über alle ungeraden Indices:

$$\begin{aligned}
 F_k^{(N)} &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \nu^{-jk} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \exp(-i \frac{2\pi}{N} kj) \\
 &= \frac{1}{N} \left(\frac{N/2}{N/2} \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j} \exp(-i \frac{2\pi}{N/2} kj) + \frac{N/2}{N/2} \sum_{j=0}^{N/2-1} f_{2j+1} \exp(-i \frac{2\pi}{N/2} kj) \exp(-i \frac{2\pi}{N} k) \right) \\
 &= \frac{1}{N} \left(\frac{N}{2} F_k^{e(N/2)} + \nu^{-k} \frac{N}{2} F_k^{o(N/2)} \right) = \frac{1}{2} F_k^{e(N/2)} + \nu^{-k} \frac{1}{2} F_k^{o(N/2)}.
 \end{aligned}$$

$F_k^{e(N/2)}$ sind dabei die Koeffizienten einer DFT mit der halben Länge $\frac{N}{2}$ der Funktionswerte von f mit geraden Indices (e wie even) und $F_k^{o(N/2)}$ sind dabei die Koeffizienten einer DFT mit der halben Länge $\frac{N}{2}$ der Funktionswerte von f mit ungeraden Indices (o wie odd). Gilt nun $N = 2^p$, so benötigt man p rekursive Durchführungen der FFT mit jeweils der Hälfte der Summanden. Diese Wahl von N liefert das effektivste Verfahren. Es sei z.B. $N = 8 = 2^3$. Betrachtet man nur die Reihenfolge, in der die Berechnung ausgeführt wird, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 F_k^{(8)} &= \sum_{j=0,2,4,6} \alpha_j f_j + w_k \sum_{j=1,3,5,7} \beta_j f_j \\
 &= \sum_{j=0,4} \gamma_j f_j + r_{k-1} \sum_{j=2,6} \delta_j f_j + w_k \left(\sum_{j=1,5} \varepsilon_j f_j + s_{k-1} \sum_{j=3,7} \phi_j f_j \right) \\
 &= (\mu_0 f_0 + \mu_4 f_4) + (\mu_2 f_2 + \mu_6 f_6) + (\mu_1 f_1 + \mu_5 f_5) + (\mu_3 f_3 + \mu_7 f_7)
 \end{aligned}$$

Am Ende dieses Prozesses steht eine Folge von FFTs für jeweils eine Variable in der sogenannten bitreversiven Reihenfolge. Dieser Fakt muss berücksichtigt werden, sobald Hin- und Rücktransformation einzeln berechnet werden. Bei paarweise ausgeführten Transformationen ist die Bitreversion nicht nötig. Die 2. Transformation stellt automatisch die ursprüngliche Reihenfolge wieder her. Durch diese rekursive Aufspaltung der DFT kommt es zu einer Reduktion des Aufwandes bei einer sorgfältigen Implementierung der FFT. Im Fall $N = 2^m$ werden $\frac{1}{2} Nm = \frac{1}{2} N \log_2(N)$ komplexe Gleitpunktoperationen benötigt. Bei $N = 10^6$ ergibt sich damit für die nächstgelegene Zweierpotenz

$N = 2^{20} = 1048567$ und $\log_2(2^{20}) = 20$

$$t = \frac{1}{2} 2^{20} * 20 * \frac{10^{-6} s}{2 \text{ Operationen}} \approx 5s.$$

Diesem enormen Zeitgewinn verdankt diese Version der DFT ihren Namen: Schnelle Fouriertransformation (Fast Fourier Transform). Sie wird dadurch zu einem mächtigen Instrument der modernen Numerik.

2.6.2 Anwendungen

***Das Prinzip des Einsatzes der FFT zur Lösung LGIS** Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{f}$ und setzen voraus, dass die Systemmatrix A eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren $\underline{\mu}_l$ besitzt. Die Eigenwerte λ_l seien bekannt. Zu dieser Klasse von Aufgaben zählt z.B. die Laplace-Operator-Diskretisierung im Rechteck mit konstanten Δx_i . (s. Kapitel 1.7.). Betrachten wir nun diesen Operator $A = \Lambda$ im Raum der Fouriertransformierten. Dann gilt:

$$\Lambda \underline{\mu}_l = \lambda_l \underline{\mu}_l \quad \text{mit} \quad \underline{\mu}_l \underline{\mu}_m = \delta_{lm} \cdot \rho_l \quad \text{für} \quad l = 1, \dots, n.$$

Die Zerlegung von \underline{x} und \underline{f} in der Basis der Eigenvektoren liefert folgenden Ansatz:

$$\underline{x} = \sum_{l=1}^n X_l \underline{\mu}_l \quad (1)$$

$$\underline{f} = \sum_{l=1}^n \frac{1}{\rho_l} F_l \underline{\mu}_l \quad (2)$$

(unter Beachtung von $(\underline{f}, \underline{\mu}_l) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{\rho_l} F_l (\underline{\mu}_m, \underline{\mu}_l) = \sum_{m=1}^n \frac{1}{\rho_l} F_l \rho_l \delta_{ml} = F_l$).
Einsetzen in die Ausgangsgleichung ergibt:

$$\begin{aligned} \Lambda \underline{x} &= \underline{f} \\ \Lambda \sum_{l=1}^n X_l \underline{\mu}_l &= \sum_{l=1}^n \frac{1}{\rho_l} F_l \underline{\mu}_l \\ \sum_{l=1}^n X_l \Lambda \underline{\mu}_l &= \sum_{l=1}^n \frac{1}{\rho_l} F_l \underline{\mu}_l \\ \sum_{l=1}^n X_l \lambda_l \underline{\mu}_l &= \sum_{l=1}^n \frac{1}{\rho_l} F_l \underline{\mu}_l \\ \sum_{l=1}^n \left(X_l \lambda_l - \frac{1}{\rho_l} F_l \right) \underline{\mu}_l &= \mathbf{0} \iff X_l = \frac{F_l}{\lambda_l \rho_l}; \quad l = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3)$$

Mit einer Fouriertransformation der rechten Seite (2), der anschließenden Berechnung der Zerlegungskoeffizienten X_l nach (3) und der Rücktransformation der gesuchten Größe \underline{x} entsprechend (1) löst man somit das lineare Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{f}$.

Dieses Vorgehen lohnt sich nur, wenn für das Problem (1),(2) ein schnelles Verfahren zur Verfügung steht, was bei der FFT der Fall ist. Im eindimensionalen Fall konkurriert das Verfahren mit dem Progonkaverfahren, das dort bzgl. der Effektivität nahezu unschlagbar ist. Im mehrdimensionalen Fall wird die FFT für bestimmte Richtungen verwendet. Bei ungleichmäßigem Netz ist eine Vorkonditionierung der Systemmatrix i.Allg. hilfreich.

Signalanalyse Bei periodischen Funktionen gilt das Abtasttheorem von SHANNON:

Satz 2.1 Gilt $F(i\omega) \equiv 0$ für $|\omega| > b \implies f(t) = \frac{b\Delta t}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta t) \frac{\sin(b(t-n\Delta t))}{b(t-n\Delta t)}$.

Dabei ist Δt das Abtastintervall, $b = \frac{\pi}{\Delta t}$ die Abschneidefrequenz (Nyquistfrequenz).

Die auftretende Reihe heißt Kardinalreihe. Die Bedingung $F(i\omega) \equiv 0$ für $|\omega| > b$ ist in der Technik erfüllt (frequenzbandbegrenztetes Spektrum). Damit lässt sich das Signal aus den abgetasteten Werten $f(nT)$ zusammensetzen. Die zur Nyquistfrequenz gehörige maximale Periodenlänge beträgt damit $T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\pi} \Delta t = 2\Delta t$. Folglich werden 2 Abtastungen pro Periode benötigt, um die Funktion erfolgreich rekonstruieren zu können. Im nichtperiodischen Fall wird eine Rekonstruktion mit allen möglichen Frequenzen nötig sein, nicht nur mit den Vielfachen der Grundfrequenz. Das Vorgehen ist analog zu oben, auch eine Bandbegrenzung wird benötigt.

Bedingt durch den Dämpfungssatz der Fouriertransformation und die Heisenbergsche Unschärferelation sind einige Vorkehrungen nötig, um mit der FFT gute Ergebnisse zu erzielen. Aus dem Dämpfungssatz

$$FT(f(at)) = \frac{1}{a} FT\left(\frac{i\omega}{a}\right) \quad \text{für } a > 0$$

folgt

$$FT\left(f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right) = \alpha FT(\alpha i\omega) \quad \text{für } \alpha > 0.$$

Bei $\alpha < 1$ folgt $\frac{1}{\alpha} > 1$, d.h. $f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$ entspricht einer Stauchung im Zeitbereich und $FT(\alpha i\omega)$ entspricht einer Streckung im Frequenzbereich. Damit transformiert die Fouriertransformation kleine Details aus dem Zeitbereich, wie z.B. Sprünge, Extrema,.. in große Bereiche im Frequenzbereich. Es kommt zu einer Verschmierung von scharfen Kanten des Originalbereichs im Bildbereich über große Intervalle. Es gibt dabei keine Kompromisse aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation, die eine funktionalanalytische Ungleichung mit folgender Aussage ist:

$$\|\text{Breite des Signals im Zeitbereich}\| * \|\text{Breite des Spektrums}\| \geq \frac{1}{2}.$$

Zusammenfassung:

Beides kann also nicht gleichermaßen klein werden. Folglich wähle man den zu transformierenden Bereich so groß, dass das Signal darin abgeklungen ist. Es darf dann mit Nullen aufgefüllt werden. Ein vorheriges scharfes Abschneiden wird als Sprung im Signal und damit als sehr kleines abzubildendes Detail interpretiert, was zu falschen Frequenzwerten über der gesamten Breite des Frequenzbereichs führt.

Das Abtastintervall ist fein genug zu wählen, so dass die Nyquistfrequenz deutlich höher ist als die zu erwartende maximale Frequenz.

Wird b zu klein geschätzt und damit Δt zu groß angesetzt, erscheinen höherfrequente Anteile des Signals frequenzverschoben (Aliasing durch Untersampling).

Wird hingegen b überschätzt, so kommt es bei der Berechnung der Kardinalreihe zu einer Konvergenzbeschleunigung.

Beispiel 2.12

$$f(t) = \exp(-0.1t^2) * (2 \sin t + 6 \cos(3t))$$

Damit ergibt sich für die beiden Komponenten des Signals

$$b \leq \frac{2\pi}{1} \quad \text{bzw.} \quad b \leq \frac{2\pi}{3} \quad \text{d.h.} \quad b \leq 2\pi$$

und für die Abtastperiode

$$\Delta t \leq \frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

Das Signal ist bei $|t| = 10$ fast vollständig abgeklungen ($f(10) \leq 1.36 * 10^{-4}$). Folglich kann man im Intervall $[-10, 10]$ mit $\Delta t = 0.5$ diskretisieren und sinnvolle Ergebnisse einer FFT und IFFT erwarten.

Um Frequenzen besser einem Abschnitt des Signals zuordnen zu können, verwendet man gegebenenfalls Fensterfunktionen, die über die Funktion im Zeitbereich gelegt werden. Sie müssen aus den oben genannten Gründen möglichst am Rand des Fenster verschwinden. Es gibt sehr viele unterschiedliche praktisch genutzte Fensterfunktionen, die je nach Ziel der Untersuchung ausgewählt werden. Eine Verbesserung der Analysefunktion kann man durch den Einsatz einer Wavelettransformation erreichen, die keine Fenster benötigt, um die Auflösung für Teilbereiche des Signals zu erhöhen.